



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

23/12-79

Б-30

P11 - 12173

1473/2-79

Н.С.Бахвалов, Е.П.Жидков, Е.П.Каданцева,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
МОДЕЛЬНОЙ САМОСОГЛАСОВАННОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

1979

P11 - 12173

Н.С.Бахвалов, Е.П.Жидков, Е.П.Каданцева,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
МОДЕЛЬНОЙ САМОСОГЛАСОВАННОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Направлено в ЖВММФ

Бахвалов и др.

Р11 - 12173

Численное решение модельной самосогласованной электродинамической задачи

Обсуждается численное решение модельной самосогласованной задачи. Сгусток электронов движется в резонаторе под действием наведенной стороны волны и собственного поля сгустка, которое перестраивается при его движении. Соответствующая группа уравнений Максвелла и релятивистское уравнение Ньютона, описывающее движение сгустка, решаются методом конечных разностей.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Bakhvalov N.S. et al.

P11 - 12173

On a Numerical Solution of Model Self-Consistent Electrodynamic Problem

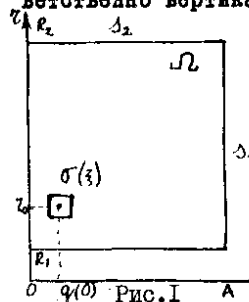
The numerical solution of model self-consistent problem is discussed. A dense electron bunch moves under the action of induced strange wave and own bunch field reconstructing when moving. The corresponding group of Maxwell equations and relativistic Newton equation are solved by the finite-difference method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Расчет электромагнитных полей, возбуждаемых движением плотных сгустков и пучков электронов в ускоряющей структуре, представляет большой интерес для коллективных методов ускорения /1/. Важно знать распределение возбужденных полей и уметь оценивать обратное влияние этих полей на движение сгустка. В предлагаемой работе обсуждается численное решение модельной самосогласованной задачи. Сгусток электронов движется в резонаторе под действием наведенной стороны волны и собственного поля сгустка, которое перестраивается при его движении. Соответствующая группа уравнений Максвелла и релятивистское уравнение Ньютона, описывающее движение сгустка, решаются методом конечных разностей. Ранее этим методом была решена задача с заданным законом движения сгустка /2,3/.

Рассматривается замкнутый коаксиальный резонатор с идеально проводящими стенками. На внутренний цилиндр свободно "надет" кольцевой сгусток. Прямоугольные сечения резонатора Ω и сгустка $\sigma(\xi)$ представлены на рис. I. Через s_1, s_2 обозначены соответственно вертикальные и горизонтальные участки границы $\partial\Omega$. Далее приняты такие обозначения:
 $\xi = ct, u = E_r, v = E_z, \omega = H_\varphi, q(\xi)$ - координата центра сгустка $\sigma(\xi)$ по z . Сгусток движется параллельно оси z , так что z_0 (координата его центра по z) не меняется. M - масса сгустка, ρ - его заряд. В области Ω решается следующая самосогласованная задача:



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{z} \frac{\partial z \omega}{\partial z} - \frac{4\pi}{c} j_z, \quad j_z = c \frac{dq}{d\xi} \rho, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\pi r}, & (r, z) \in \sigma(0), \\ 0, & (r, z) \in \Omega \setminus \sigma(0). \end{cases}$$

$q(\xi)$ удовлетворяет релятивистскому уравнению движения Ньютона:

$$c^2 M \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dq}{d\xi} \left(1 - \left(\frac{dq}{d\xi} \right)^2 \right)^{-1/2} \right) = 2\pi \int_{\sigma(\xi)} \rho v r dz d\xi.$$

Заданы начальные и граничные условия:

$$u(r, z, 0) = u_0(r, z), \quad v(r, z, 0) = v_0(r, z), \quad \omega(r, z, 0) = \omega_0(r, z), \quad (2)$$

$$u|_{s_1} = \frac{\partial v}{\partial z}|_{s_1} = \frac{\partial \omega}{\partial z}|_{s_1} = v|_{s_2} = \frac{\partial z u}{\partial z}|_{s_2} = \frac{\partial z \omega}{\partial z}|_{s_2} = 0.$$

u_0, v_0 - решение потенциальной электростатической задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -4\pi \rho, \\ \phi|_s = 0, \\ u_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad v_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{cases} \quad (3)$$

u_0, v_0 удовлетворяют граничным условиям (2).

ω_0 - наведенная сторонняя волна:

$$\omega_0(r, z) = B \cos \sigma_e \xi \left\{ Y_0(\sigma_e R_1) J_1(\sigma_e z) - J_0(\sigma_e R_1) Y_1(\sigma_e z) \right\} \Big|_{\xi=0},$$

σ_e - e -ое положительное решение уравнения

$$Y_0(x R_1) J_0(x R_2) - Y_0(x R_2) J_0(x R_1) = 0. \quad (4)$$

J_0, J_1 - функции Бесселя, Y_0, Y_1 - функции Неймана [4].

Решение поставленной задачи (I) удовлетворяет энергетическим соотношениям:

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + \omega^2) r dz d\xi \Big|_0^T = -\frac{2\pi}{c} \int_0^T \int_{\sigma(\xi)} j_z v r dz d\xi, \quad (5)$$

$$c^2 M \left(\left(1 - \left(\frac{dq}{d\xi} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right) = \frac{2\pi}{c} \int_0^T \int_{\sigma(\xi)} j_z v r dz d\xi.$$

Интегралы в правой и левой частях первого энергетического соотношения обозначим через I_n и I_λ , их численные значения - соот-

ветственно через \tilde{I}_n и \tilde{I}_λ . Удовлетворение энергетических соотношений принимается основным критерием правильности численного решения.

Алгоритм численного решения

Система уравнений Максвелла решается по схеме Лакса с пересчетом по явному кресту, как описано в [3]. Отличие состоит в следующем: правая часть в течение временного шага τ фиксирована, и при счете $(n+1/2)$ -го и $(n+1)$ -го слоев берется равной значению на n -ом слое. После того, как u, v, ω на $(n+1)$ -м слое сосчитаны, находим положение $\sigma(\xi)$ при $\xi = (n+1)\tau$, используя уравнение движения Ньютона.

Положим

$$\rho = \frac{dq}{d\xi}, \quad \frac{2\pi}{c^2 M} \int_{\sigma(\xi)} \rho v r dz d\xi = F(\xi).$$

Напишем разностный аналог уравнения Ньютона:

$$\frac{P_{n+1}}{\sqrt{1-P_{n+1}^2}} - \frac{P_n}{\sqrt{1-P_n^2}} = \frac{F_n + F_{n+1}}{2} \tau,$$

$$\frac{P_{n+1}}{\sqrt{1-P_{n+1}^2}} = \frac{P_n}{\sqrt{1-P_n^2}} + \frac{F_n + F_{n+1}}{2} \tau = A_{n+1}.$$

Отсюда получаем:

$$P_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{\sqrt{1+A_{n+1}^2}}, \quad q_{n+1} = q_n + \tau \frac{P_n + P_{n+1}}{2}.$$

F_{n+1} зависит от q_{n+1} . Задачу приходится решать итерациями.

На первом шаге положим $F_{n+1} = F_n$:

$$A_{n+1}^1 = A_n + F_n \tau, \quad P_{n+1}^1 = \frac{A_{n+1}^1}{\sqrt{1+(A_{n+1}^1)^2}},$$

$$q_{n+1}^1 = q_n + \tau \frac{P_n + P_{n+1}^1}{2}.$$

Далее последовательно находятся $q_{n+1}^2, q_{n+1}^3, \dots$:

$$A_{n+1}^{k+1} = A_n + \frac{F_n + F_{n+1}^k}{2} \tau, \quad P_{n+1}^{k+1} = \frac{A_{n+1}^{k+1}}{\sqrt{1+(A_{n+1}^{k+1})^2}},$$

$$q_{n+1}^{k+1} = q_n + \tau \frac{P_n + P_{n+1}^{k+1}}{2}.$$

Практически достаточно трех итераций: за три итерации в значении q устанавливается четыре знака.

Начальные данные. Аналитические разложения

Для контроля счета начальных данных независимо считались $\int_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) r dr dz$ и $F(0)$. Для этих величин из уравнения (3) методом разделения переменных могут быть получены точные аналитические разложения. При их выводе использовались формулы из [5]. В результате имеем:

$$I_{uv}^a = \int_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) r dr dz = \beta_0^2 \sum_{k, \ell=1}^{\infty} \frac{16A}{k^2} \frac{\sin^2 \frac{k\pi q(0)}{A} \sin^2 \frac{k\pi h}{A}}{\left(\frac{k\pi}{A}\right)^2 + \sigma e^2} \frac{\sigma e^2 J_0^2(\sigma e R_1)}{J_0^2(\sigma e R_1) - J_0^2(\sigma e R_2)} \times \left[\int_{z_0-h}^{z_0+h} (J_0(\sigma e z) Y_0(\sigma e R_2) - Y_0(\sigma e z) J_0(\sigma e R_2)) dz \right]^2, \quad (6)$$

$$F_a(0) = -\frac{2\pi}{c^2 M} \beta_0^2 \sum_{k, \ell=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k} \frac{\sin \frac{2k\pi q(0)}{A} \sin^2 \frac{k\pi h}{A}}{\left(\frac{k\pi}{A}\right)^2 + \sigma e^2} \frac{\sigma e J_0^2(\sigma e R_1)}{J_0^2(\sigma e R_1) - J_0^2(\sigma e R_2)} \times \left[\int_{z_0-h}^{z_0+h} (J_0(\sigma e z) Y_0(\sigma e R_2) - Y_0(\sigma e z) J_0(\sigma e R_2)) dz \right]^2$$

Здесь $z_0, q(0)$ - координаты центра ступка соответственно по z, z , $2h$ - линейный размер сечения ступка, которое имеет форму квадрата. A - длина резонатора по z , σe - корни уравнения (4). При счете σe использовалась асимптотика:

$$\sigma e \sim \frac{\pi \ell}{R_2 - R_1}.$$

Первые два корня σ_1, σ_2 уточнялись простым делением отрезка пополам. При $\ell \geq 3$ асимптотика корней σe давала три верхних знака, что оказалось достаточным для корректного счета рядов (6). За 4¹ машинного времени CDC-6500 считаются суммы с 10 000 членами ряда: $\sum_{k, \ell=1}^{100}$. При этом в значениях норм и $F(0)$ устанавливаются соответственно 5 и 4 знака. Ниже приведены значения частичных сумм $\sum_{k, \ell=1}^N$ при различных N :

N	I_{uv}^a	$F_a(0)$
1	$0.30456 \cdot 10^8$	$-0.77699 \cdot 10^{-1}$
2	$0.61932 \cdot 10^8$	$0.52784 \cdot 10^{-1}$
10	$0.10940 \cdot 10^9$	$-0.65663 \cdot 10^{-1}$
30	$0.11348 \cdot 10^9$	$-0.50379 \cdot 10^{-1}$
100	$0.11367 \cdot 10^9$	$-0.50355 \cdot 10^{-1}$

Замечание

В рассматриваемом случае задача нахождения начальных данных (3) решается аналитически. Но ряды для функций u_0, v_0 сходятся очень медленно и непригодны для расчета во всех узлах мелкой сетки.

Численный метод решения потенциальной электростатической задачи

Начальные значения поля определяются из решения краевой задачи (3).

В области Ω , строим квадратную сетку $\bar{\Omega}_h$:

$\bar{\Omega}_h = \{z_i, z_j\}, z_i = R_1 + (i-1)h, z_j = (j-1)h, (i, j) \in \{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq L\}$.
На $\bar{\Omega}_h$ (3) аппроксимируется разностной краевой задачей:

$$\frac{\Phi_{i+j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i-j}}{h^2} + \frac{\Phi_{j+1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{j-1}}{h^2} + \frac{1}{z_i} \frac{\Phi_{i+j} - \Phi_{i-j}}{2h} = -4\beta_{ij},$$

$$\Phi_{ij}|_{\sigma} = 0, \quad \beta_{ij} = \begin{cases} \frac{F_0}{2\pi z_i}, & (z_i, z_j) \in \sigma(0), \\ 0, & (z_i, z_j) \in \Omega \setminus \sigma(0). \end{cases} \quad (7)$$

Значения u_{ij}^0, v_{ij}^0 взяты в центрах ячеек $\bar{\Omega}_h$:

$$u_{ij}^0 = \frac{1}{2h} (\Phi_{i-j-1} + \Phi_{i-j} - \Phi_{i-j-1} - \Phi_{ij}), \quad (8)$$

$$v_{ij}^0 = \frac{1}{2h} (\Phi_{i-j-1} + \Phi_{ij-1} - \Phi_{i-j} - \Phi_{ij}).$$

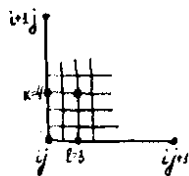
Для контроля счета начальных данных находились

$$I_{uv}^v = h^2 \sum_{ij \in \bar{\Omega}_h} ((u_{ij}^0)^2 + (v_{ij}^0)^2) z_{i-1/2},$$

$$F_z(0) = \frac{2\pi}{c^2 M} h^2 \sum_{ij \in \sigma(0)} \beta_{ij} v_{ij}^0 z_{i-1/2}.$$

Большие трудности представляет корректный счет $F(0)$. Предварительно задача расчета начальных данных (7) решалась методом прогноза [6, 10] по выбранным экспериментально шагам h и $h/2$. Счет норм и $F(0)$ с использованием аналитических разложений (6) показал, что прогноз по этим шагам дает заниженные значения норм $\int_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) r dr dz$ и интеграла $F(0)$, управляющего движением.

На следующем этапе начальные данные считались так: методом прогноза находят Φ_{ij} в узлах сетки с шагом h . Полученные значения линейной интерполяцией "размножаются" на сетку с шагом $h/10$:



$$f'_{ij} = \left(1 - \frac{\kappa + \ell - 2}{10}\right) f_{ij} + \frac{\kappa - 1}{10} f_{i+1j} + \frac{\ell - 1}{10} f_{ij+1},$$

$$i' = (i-1) \cdot 10 + \kappa,$$

$$j' = (j-1) \cdot 10 + \ell.$$

Затем проводятся уточняющие итерации на сетке $\bar{\Omega} h/10$. Значения u_{ij}^0, φ_{ij}^0 в узлах сетки с шагом $h/10$ считаются по формулам (8). 300 итераций дают удовлетворительное согласование численных значений нормы с их "аналитическими" значениями [9]. Отметим, однако, что $F(0)$ считается недостаточно точно и время счета начальных данных (20' машинного времени на ЭВМ СРС-6500) больше времени счета динамической задачи (см. табл. I).

В предлагаемой работе обсуждаются результаты эффективного численного решения задачи (I): за 7' машинного времени начальные данные считаются с высокой точностью (см. табл. I).

Реализован следующий алгоритм. За начальное приближение $\Phi_{ij}^{(0)}$ взяты первые четыре члена разложения Φ в ряд:

$$\Phi_{ij}^{(0)} = \rho_0 \sum_{\kappa, \ell=1}^2 \frac{\alpha_{\kappa\ell} v e}{\left(\frac{\kappa\ell}{A}\right)^2 + \beta e^2} \sin \frac{\kappa\pi z_i}{A} \left[J_0(\beta e R_2) Y_0(\beta e z_i) - J_0(\beta e R_2) Y_0(\beta e z_i) \right],$$

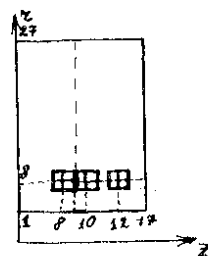
$$\alpha_{\kappa} = \frac{q}{\kappa\pi} \sin \frac{\kappa\pi(0)}{A} \sin \frac{\kappa\pi h}{A}, \beta e = \frac{\pi^2 \sigma^2 J_0^2(\beta e R_1)}{2 J_0^2(\beta e R) - J_0^2(\beta e R_1)} \int_0^{\omega h} (J_0(\beta e r) Y_0(\beta e R) - J_0(\beta e R) Y_0(\beta e r)) dr.$$

Используя метод Карре [7, 8], находим значения Φ в узлах сетки с шагами $h/4$ и $h/8$, по которым далее проводится линейная экстраполяция на $h=0$. Полученные на сетке с шагом $h/4$ значения Φ линейно "размножаются" на сетку с шагом $h/8$. Значения u_{ij}^0, φ_{ij}^0 считаются по формулам (8).

Замечание

Нелинейная экстраполяция на $h=0$ дает худший результат по сравнению с линейной экстраполяцией.

Начальные данные считались для следующих расположений площадки 6. На рис. 2 указано расположение центра площадки $\sigma(0)$ в узлах дискретной сетки Ωh ($h = \frac{1}{2} \ell \sigma$, $\ell \sigma$ - линейный размер площадки).



$$z = \kappa h,$$

$$z = \ell h.$$

Рис. 2.

Таблица I.

"Аналитические значения"

Значения, полученные по методу Карре, с помощью линейной экстраполяции (время счета 7')

Значения, полученные по методу прогноза, с последующими уточняющими итерациями (время счета 20', сделано 300 итераций)

$$\kappa = 8, \ell = 8$$

$$I_{uv}^a = 0.113 \cdot 10^9$$

$$I_{uv}^r = 0.107 \cdot 10^9$$

$$I_{uv}^r = 0.107 \cdot 10^9$$

$$F_a(0) = -0.503 \cdot 10^{-1}$$

$$F^r(0) = -0.489 \cdot 10^{-1}$$

$$F^r(0) = -0.340 \cdot 10^{-1}$$

$$\kappa = 8, \ell = 10$$

$$I_{uv}^a = 0.113 \cdot 10^9$$

$$I_{uv}^r = 0.107 \cdot 10^9$$

$$F_{uv}^r = 0.167 \cdot 10^9$$

$$F_a(0) = 0.503 \cdot 10^{-1}$$

$$F^r(0) = 0.489 \cdot 10^{-1}$$

$$F^r(0) = 0.224 \cdot 10^{-1}$$

$$\kappa = 8, \ell = 12$$

$$I_{uv}^a = 0.106 \cdot 10^9$$

$$I_{uv}^r = 0.102 \cdot 10^9$$

$$I_{uv}^r = 0.104 \cdot 10^9$$

$$F_a(0) = 0.179 \cdot 10^0$$

$$F^r(0) = 0.175 \cdot 10^0$$

$$F^r(0) = 0.710 \cdot 10^{-1}$$

Обсуждение результатов численного решения
динамической самосогласованной задачи

Проведены расчеты со следующими параметрами:

$$R_1 = 2.7 \text{ см}, R_2 = 10.8 \text{ см}, h = \frac{R_2 - R_1}{26}, h_M = \frac{h}{4}, \tau = \frac{h_M}{\lambda},$$

$$\rho_0 = -5 \cdot 10^4 \frac{\text{срзв}}{\text{см}^2}, l_0 = 2h = 8h_M, A = 64h_M, B = 3.6 \cdot 10^3 \text{ эрст.}$$

Здесь R_1, R_2 - радиусы внутреннего и внешнего цилиндров резонатора, h_M - "мелкий" шаг дискретной сетки Ω_{h_M} , τ - временной шаг, l_0 - линейный размер площадки $\sigma(\xi)$, ρ_0 - заряд ступки, A - длина резонатора, B - амплитуда наведенной стороны волны. Если ввести дискретную сетку с шагом $h = l_0/2$, то в соответствующих дискретных координатах можно провести расчеты для следующих начальных положений центра площадки $\sigma(0)$:

(8,8), (8,10), (8,12) (см. табл. I). Кроме того, для исходного положения (8,8) был проведен счет с $\rho_0/4.25$, и для положения (8,12) проведен счет при отсутствии наведенной стороны волны ($B=0$). Во всех случаях ступок монотонно движется в направлении оси Z и доходит до правой стенки резонатора. На счет вариантов с $B = 3.6 \cdot 10^3$ и $\rho_0 = -5 \cdot 10^4$ расходуется в среднем 12^1 машинного времени на ЭВМ СДС-6500. Ступок с меньшим зарядом $\rho_0/4.25$ движется быстрее, он достигает правой стенки за 8^1 машинного времени. При $B=0$ на счет варианта тратится 17^1 машинного времени. Соответствующие графики $F(\xi)$ представлены на рис. 3.

В момент времени $\xi=0$ все графики имеют одинаковый наклон с графиком невозмущенной силы

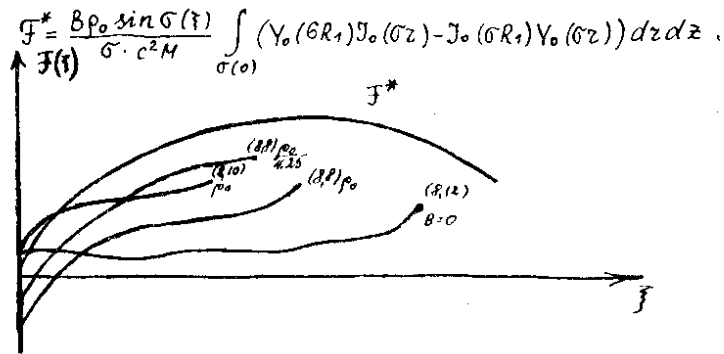


Рис. 3

Большие трудности встретились при счете $F(\xi)$. Сначала движение площадки предполагалось "дискретным". Интегральная сумма F_n , аппроксимирующая $F(\xi)$, считалась по формуле прямоугольников:

$$F_n = \frac{2\pi}{c^2 M} h_M^2 \sum_{i,j \in \Omega(h)} \rho_{ij} v_{ij}^n z_{i-1/2}, \quad \xi = h\tau. \quad (9)$$

(Напомним, что значения функций u, v, w считаются в центрах ячеек сетки Ω_{h_M}).

При таком счете площадка $\sigma(\xi)$ "перепрыгивала" через ячейки сетки Ω_{h_M} , график F_n сильно осциллировал. Разностный аналог второго энергетического соотношения (5) удовлетворялся плохо. Чтобы точнее считать F_n , пришлось учитывать непрерывное движение площадки. При этом площадка $\sigma(\xi)$, естественно, не всегда точно "укладывалась" в ячейки сетки Ω_{h_M} . В ячейках сетки, целиком принадлежащих площадке, интегральная сумма F_n считалась по формуле прямоугольников (9). На "неполных" ячейках F_n считалась по формуле трапеций. Значения функции v на границах "неполных" ячеек находились линейной экстраполяцией. После этого площадка $\sigma(\xi)$ начала двигаться монотонно, и на графике $F(\xi)$ пропали осцилляции. Энергетические соотношения (5) выполнялись удовлетворительно.

Например, при начальном положении центра ступки (8,8) получены такие значения $\tilde{I}_n, \tilde{I}_n, \gamma = c^2 M ((1-q^2)^{-1/2} - 1)$ при различных $n, \xi = n\tau$:

n	\tilde{I}_n	\tilde{I}_n	γ
45	$-0.936 \cdot 10^6$	$-0.108 \cdot 10^7$	$0.106 \cdot 10^7$
90	$-0.816 \cdot 10^7$	$-0.102 \cdot 10^8$	$0.101 \cdot 10^8$
135	$-0.222 \cdot 10^8$	$-0.270 \cdot 10^8$	$0.267 \cdot 10^8$

При $n=135$ ступок доходит до правой стенки резонатора.

Любопытно заметить, что при численном моделировании с заниженными начальными данными (см. стр. 7) наблюдалось замедленное движение ступки. Значение $F(\tau)$ падало до нуля, интегральные соотношения "разрушались". Затем F становилось отрицательным, интегральные соотношения выравнивались, и ступок шел назад. Этот эффект устойчив по τ . Для некоторых начальных положений ступок втягивался в центр резонатора и начинал колебаться около него. Исключение составлял ступок с меньшим зарядом, который во всех случаях монотонно двигался вперед.

Литература

1. Иванов И.Н. и др. ЭЧАЯ I, вып.2, 1971, с.393-440.
2. Бахвалов Н.С. и др. ОИЯИ, Р9-8643, Дубна, 1975.
3. Бахвалов Н.С. и др. О численном решении системы уравнений Максвелла в неоднородной области с движущимся разрывом в правой части. ЖВМ и МФ, т.16. №3, 1976, с.697-704.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, суммы, рядов и производных. ФМ., Москва, 1962, с.965.
5. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т.П, "Наука", М., 1974.
6. Бахвалов Н.С. и др. ОИЯИ, Д-10-7707, Дубна, 1974.
7. В.А.Carre "The Determination of the Optimum Accelerated Factor for the Successive Over-relaxation". Computer Journal, vol.4, No 1, April 1961.
8. J.S.Hornsby "A Computer Programme for the Solution of Elliptic Partial Differential Equations". Препринт CERN, 63-7.
9. Бахвалов Н.С. и др. Применение метода сеток к решению одной модельной самосогласованной задачи. В сб.: Программирование и математические методы решения физических задач. ОИЯИ, Д10, II-II264, Дубна, 1978, стр.223-226.
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., "Наука", 1977, с.288-315.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 января 1979 года.