СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11 - 10634

В.Л.Пахомов, К.Пырвулеску

НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ДЕРЕВЬЕВ В ПОЛНЫХ ГРАФАХ

1977

P11 - 10634

В.Л.Пахомов, К.Пырвулеску

НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ СВЯЗЫВАЮЩИХ ДЕРЕВЬЕВ В ПОЛНЫХ ГРАФАХ

Пахомов В.Л., Пырвулеску К. P11 - 10634

Нахождение кратчайших связывающих деревьев в полных графах

Предлагаются два эквивалентных пакета программ для ЭВМ БЭСМ-6 и CDC-6500, вычисляющих кратчайшие деревья для полных графов порядка ≤ 100. Программы легко адаптируются без резкого увеличения счётного времени для графов большего порядка.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Pakhomov V.L., Pirvulescu K. P11 - 10634

Construction of Minimal Spanning Trees for Total Graphs

Two equivalent programs are presented for the computers BESM-6 and CDC-6500 that construct minimal spanning trees for total graphs of an order of ≤ 100. The executive time increases slowly with increasing an order of graphs.

The investigation has been performed at the Laboratory Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Задача построения кратчайшей связывающей сети для n точек на плоскости встречается во многих областях науки, техники и народного хозяйства, например, в задачах проектирования энергосистем, прокладки авиалиний, создания сетей ЭВМ или любых других коммуникаций и т.п. Авторы встретились с этой задачей при разработке системы автоматизированного проектирования модулей ядерной электроники /1/.

Дадим два эквивалентных определения дерева, описывающих его свойства, используемые в предлагаемых программах для вычисления минимальных по суммарной длине ребер деревьев в графах порядка $\leqslant 100$ /2/.

1. Связный неориентированный граф называется деревом, если он не имеет циклов.

2. Граф является деревом, если любые две его вершины связаны единственной цепью.

Теперь сформулируем нашу задачу.

В конечном графе G порядка n каждому ребру $E = (a,b)$ приписывается мера $\mu(a, b)$. Требуется построить связную часть T, содержащую все вершины G и имеющую минимальную полную меру

$$\mu(T) = \sum_{E \in T} \mu(E).$$

Очевидно, что T есть дерево.

Решить эту задачу полным перебором нельзя, т.к. число различных деревьев, которые можно построить на n вершинах,

$$t_n = n^{n-2},$$

т.е. уже для IO вершин получаем IOOOOOOOO вариантов.

Предлагаемые нами программы рассчитаны на нахождение кратчайшей связывающей сети для числа вершин $\leqslant$ IOO. Выбор такого количества объясняется тем, что на практике, в задачах автоматизации проектирования радиоэлектронной аппаратуры, большего не требуется. Но эти программы легко адаптируются и на любое другое максимальное число вершин, причем без резкого возрастания времени счета. Сам алгоритм не накладывает никаких ограничений на число вершин, эта величина полностью определяется только имеющимся объемом оперативной памяти. В предлагаемых программах для запоминания матрицы длин всех ребер полного графа порядка n требуется $n(n-1)/2$ слов (ячеек) памяти.

Опишем работу алгоритма /2,3/.

Построение начинается с выбора кратчайшего ребра $A_I = E_I$ в G. На каждом последующем шаге строится часть A_i при помощи добавления к A_{i-1} такого ребра E_i, что оно является кратчайшим и граф A_i не имеет циклов. Если есть несколько таких ребер одинаковой длины, то берется любое из них. (Если все ребра имеют разную длину, то получаемое решение единственно. Но мы в любом случае находим глобальный минимум).

Ясно, что последний граф A_{i-1} должен покрывать все вершины G и быть деревом. Причем A_{i-1} имеет минимальную полную меру.

Таблица

Ξ	X	Y	Ξ	X	Y	Ξ	X	Y	Ξ	X	Y
1	160	89	2	131	4	3	10	35	4	179	23
5	69	6	6	161	93	7	125	82	8	103	47
9	67	62	10	110	27	11	150	87	12	33	64
13	11	37	14	81	48	15	92	47	16	170	52
17	189	10	18	111	47	19	75	60	20	55	8
21	134	88	22	145	38	23	38	87	24	101	86
25	195	52	26	188	55	27	18	1	28	84	49
29	145	84	30	76	99	31	128	64	32	2	3
33	124	60	34	181	43	35	93	39	36	24	25
37	137	55	38	60	37	39	136	71	40	20	41
41	183	5	42	163	10	43	17	71	44	181	95
45	127	21	46	1	59	47	79	26	48	85	25
49	21	15	50	199	75	51	95	43	52	103	14
53	81	15	54	107	73	55	4	23	56	182	38
57	19	42	58	89	100	59	103	91	60	68	42
61	46	87	62	8	18	63	42	28	64	98	95
65	56	8	66	141	37	67	139	60	68	185	71
69	190	25	70	90	30	71	33	33	72	14	45
73	123	58	74	33	41	75	191	80	76	59	13
77	150	37	78	169	3	79	38	13	80	91	99
81	17	24	82	26	20	83	144	80	84	188	55
85	108	42	86	111	42	87	187	6	88	199	6
89	96	39	90	181	83	91	118	48	92	23	94
93	192	92	94	147	74	95	142	4	96	163	4
97	118	91	98	17	23	99	101	22	100	78	68

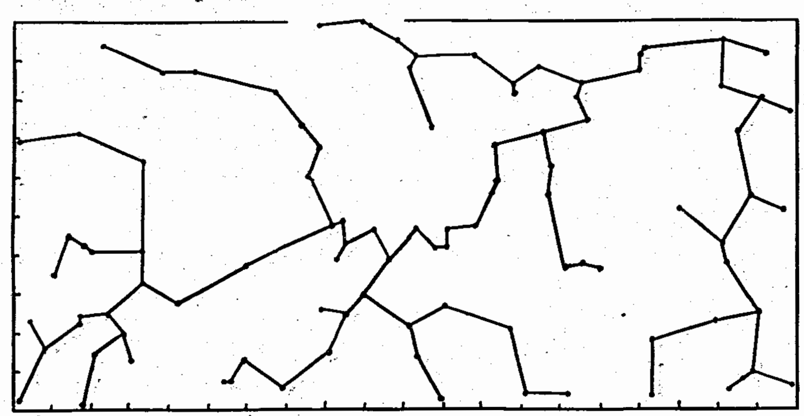

Рис.I

По предлагаемым программам можно найти кратчайшие деревья и для графов с несимметричной матрицей расстояний, т.е. когда

$$\mu(a,b) \neq \mu(b,a).$$

Но при этом в 2 раза возрастает требуемый объем памяти.

Алгоритм также дает решение и для ориентированных полных графов, и для ориентированных неполных графов. При этом надо полагать меру отсутствующих ребер равной ∞.

Далее, эти же программы могут дать ответ на вопрос, существует ли хоть какая-нибудь связывающая сеть в данном графе, т.е. определить связность графа.

Авторами реализовано 2 пакета программ, использующих изложенный алгоритм на ЭВМ БЭСМ-6 и СДС-6500.

В качестве теста для обоих пакетов программ было взято I00 случайных точек, равномерно распределенных в прямоугольной области 200 х I00 единиц. Эти точки были нами получены по программе RNDM (генератор случайных чисел) на СДС-6500.

Результаты счета на обеих машинах полностью совпадают. На рис.I изображено найденное кратчайшее дерево. Исходные данные приведены в таблице.

Возможны два метода использования этих программ на БЭСМ-6.

I. Адаптировать предлагаемые программы под свои размерности массивов и использовать их, обеспечивая ввод исходных данных и нужное представление результатов.

2. Использовать только ту часть системы "Граф", которая вам необходима.

Второй метод не требует никакой адаптации программ и их изучения. Нужно только подготовить исходные данные (координаты вершин графа) на перфокартах или магнитной ленте в требуемом формате.

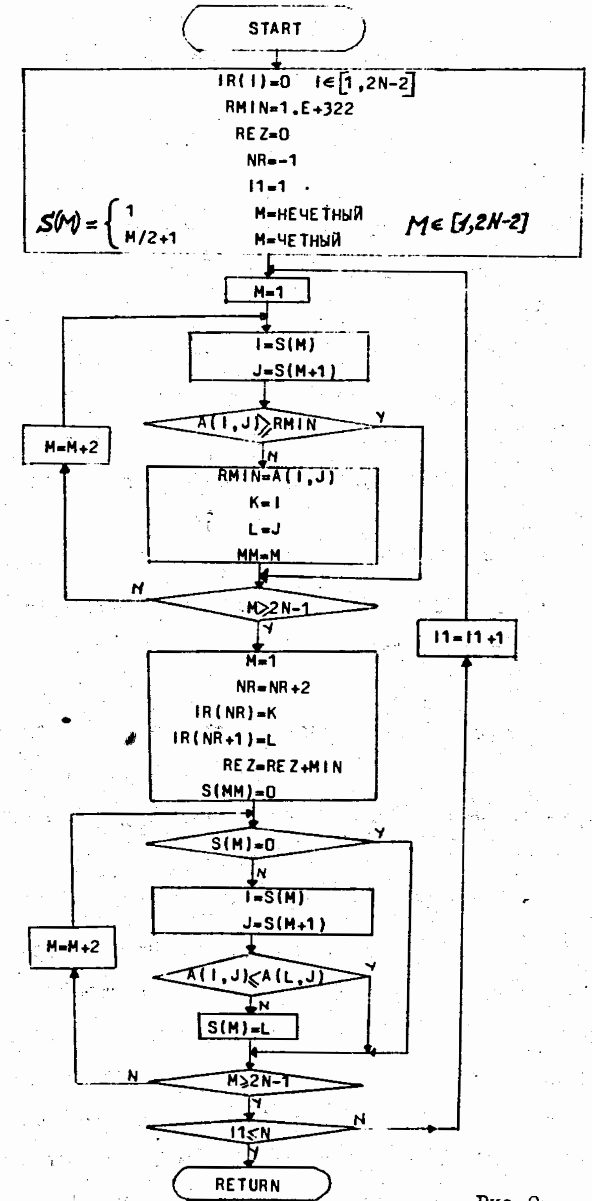

Рис.2

Полное описание системы "Граф" для пользователей можно получить у авторов. Магнитная лента с системой "Граф" всегда находится на БЭСМ-6 и открыта для счета.

"Граф" обеспечивает ввод исходных данных и диагностику ошибок.

Результаты счета печатаются в виде таблицы с последовательной нумерацией строк, в которых указаны номера 2-х смежных вершин кратчайшего дерева и длина инцидентного им ребра. Таблица упорядочена по возрастанию длин ребер. Номера вершин определяются порядком их расположения в исходных данных.

Можно получить сразу кратчайшие деревья для нескольких графов (нескольких наборов данных), т.е. определить оптимальный (кратчайший) лес.

При этом печатается общее количество вершин всех графов – N_b, количество графов – N_r и количество ребер оптимального леса – N_p, причем всегда

$$N_b = N_r + N_p$$

и печатается суммарная длина оптимального леса в выбранных вами единицах.

Длина ребра, инцидентного вершинам $a(x_a,y_a)$ и $b(x_a,y_a)$, определяется как

$$\mu(a,b)=\mu(b,a)=\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}.$$

Естественно, длину ребра можно как угодно переопределить и интерпретировать, например, как расстояние в любой другой метрике или как время, стоимость и т.п. Значения координат вершин также можно определять в нужном для вашей задачи смысле.

На СДС-6500 программы могут работать по тем же исходным данным, что и для БЭСМ-6. Получаемые результаты идентичны. На рис.2 приведена блок-схема программы ARBORE, вычисляющей кратчайшее дерево по предварительно сформированной матрице расстояний исходного графа.

Пояснения к рис.2.

IR(I), $I \in [1, 2(n-1)]$ – массив для запоминания ребер кратчайшего дерева. Для каждого ребра запоминаются последовательно инцидентные ему вершины (их номера).

A (I,J), $I,J \in [1,n]$ – матрица длин ребер полного графа.

Авторы выражают благодарность Н.Н.Говоруну за поддержку этой работы и В.И.Кочкину за консультации по использованию программы RNDM.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л.Пахомов и др. Использование системы "Граф" для автоматизации проектирования и изготовления печатных плат. ОИЯИ, 11-8642, Дубна, 1975.
2. О.Оре. Теория графов. Наука, М., 1968.
3. R.C.Prim. Shortest Connection Networks and some Generalizations. The Bell System Technical Journal, nov., 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 апреля 1977 года.