СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



P11 - 10538

Хр.Семерджиев

# АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ СПЛАЙНАМИ С МИНИМАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ И КРУЧЕНИЕМ

1977

P11 - 10538

Хр.Семерджиев

# АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ СПЛАЙНАМИ С МИНИМАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ И КРУЧЕНИЕМ

Семерджиев Хр.

P11 - 10538

Аппроксимация кривых сплайнами с минимальной кривизной и кручением

Предлагается аппроксимировать точечные плоские или пространственные кривые сплайнами, дающими их параметрическое представление, когда в качестве параметра выбрана длина дуги. Наклоны этих сплайнов находятся из условия минимальности кривизны и кручения кривой.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977**

P11 - 10538

Semerdzhiev Ch.

Approximation of Curves by Splines with Minimum Curvature and Torsion

A new method of approximation of plane or space curves given by a point set is described. Point plane or space curves are suggested to be approximated by splines which give their parametric representation. The spline slopes are found from the condition of minimum of curvature and torsion. The presented method can be applied when processing experimental data.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

**Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977**



Кусочно-полиномиальные приближения, или просто сплайны, имеют ряд преимуществ перед обычными полиномиальными приближениями, в частности, при решении задач на ЭВМ. Большую популярность получили кубические сплайны, сконструированные из кубических парабол а имеющие непрерывные первую а вторую производные, а третья производная может при этом претерпевать в точках соединения разрыв с конечным скачком. Такие сплайны введены впервые Шёнбергом /I/ в 1946 г. Внутренняя структура сплайнов оказывалась скрытой почти 10 лет. Первое их внутреннее свойство открыто Холлидеем /2/ в 1957 г. Это свойство обычно называют свойством минимальной нормы. Теорема Холлидея утверждает, что:

Если на плоскости $Oxy$ заданы точки $(x_i, y_i)$, $(i=1,2,\dots,N,\ x_0=a,\ x_N=b)$, то среди всех функций $f(x)$, имеющих на $[a,b]$ непрерывные первую а вторую производные, и таких, что $f(x_i)=y_i$ $(i=1,2,\dots,N)$ кубический сплайн $S(f;x)$ с точками соединения в $x_i$, для которого $S''(f;a)=S''(f;b)=0$, минимизирует интеграл

$$\int_a^b |f''(x)|^2\,dx. \qquad (I)$$

Таким образом, натуральный (стандартный) кубический сплайн можно искать так, чтобы минимизировать функционал (I).

В дальнейшем будем рассматривать сплайны (назовем их нестандартными), которые минимизируют функционал

$$\int_{\Gamma} |K(s)|^2 ds , \qquad (2)$$

где $K(s)$ – кривизна кривой $\Gamma$, а $s$ – длина дуги. Если перейти к прямоугольным координатам, получаем, что такие сплайны минимизируют функционал

$$\int_a^b \frac{|f''(x)|^2}{[1+f'^2(x)]^{3/2}} dx \qquad (3)$$

Из (1) и (3) видно, что при стандартных сплайнах делается неявное предположение о том, что $f'(x)$ является почти константой на промежутке $[a,b]$.

В работе /3/ сообщается о программе, написанной на языке ФОРТРАН, по которой можно вычислять значения нестандартного (по терминологии авторов /3/, "нелинейного") кубического сплайна на данном множестве абсцисс. Однако в /3/ авторами используется только непрерывность кривизны сплайна в узлах $x_i$ $(i=2,3,\dots,N-1)$.

Целью настоящей работы является описание нового единого подхода аппроксимации плоских, пространственных и многомерных кривых с использованием параметрического представления на основе нестандартных сплайнов, когда в качестве параметра выбрана длина дуги кривой. Известно /4/, что от такого параметрического представления можно перейти к любому другому параметрическому представлению. Напомним, что кривая с нулевой кривизной является прямой и что кривая с нулевым кручением является плоской.

Описанный в работе метод может найти хорошее применение при обработке экспериментальных данных.

Пусть заданы на плоскости $Oxy$ точки $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,\dots,N)$ кривой $\Gamma$. Будем искать кубические сплайны $x(s)$ и $y(s)$ как функции длины дуги $s$. Предполагаем при этом, что точка $P_i$ получается при параметрическом представлении кривой $\Gamma$ $(x(s), y(s))$, когда $s=s_i$, где

$$s_i = \sum_{k=2}^{i} \overline{P_{k-1}P_k}, \quad s_1=0, \quad i=2,3,\dots,N. \qquad (4)$$

В (4) через $\overline{P_{k-1}P_k}$ обозначено расстояние между точками $P_{k-1}$ и $P_k$. Для сплайнов $x(s)$ и $y(s)$ выполняются условия $x_i = x(s_i)$ и $y_i = y(s_i)$ $(i=1,2,\dots,N)$, при этом необходимо найти еще величины

$$m_i = x'(s_i+0) = x'(s_i-0); \quad n_i = y'(s_i+0) = y'(s_i-0). \qquad (5)$$

При условии, что величины $m_i$ и $n_i$ (5) $(i=1,2,\dots,N)$ заданы, на каждом промежутке $[s_{i-1}, s_i]$ решаем интерполяционную задачу Эрмита и получаем /5,6/

$$x(s) = \frac{m_{i-1}}{h_i^2}(s_i-s)^2(s-s_{i-1}) - \frac{m_i}{h_i^2}(s-s_{i-1})^2(s_i-s) + \qquad (6)$$

$$+ \frac{x_{i-1}}{h_i^3}(s_i-s)^2[2(s-s_{i-1})+h_i] + \frac{x_i}{h_i^3}(s-s_{i-1})^2[2(s_i-s)+h_i],$$

$$h_i = s_i - s_{i-1}, \quad s_{i-1} \le s \le s_i .$$

Аналогичное выражение можно написать и для $y(s)$ путем замены $m$ на $n$ и $x$ на $y$. Дифференцируя (6) три раза, получаем

$$x'(s) = \frac{m_{i-1}}{h_i^2}(s_i-s)(2s_{i-1}+s_i-3s) - \frac{m_i}{h_i^2}(s-s_{i-1})(2s_i+s_{i-1}-3s) +$$

$$+ \frac{6}{h_i^3}(x_i-x_{i-1})(s_i-s)(s-s_{i-1}), \qquad (7)$$

$$x''(s) = -\frac{2m_{i-1}}{h_i^2}(2s_i + s_{i-1} - 3s) - \frac{2m_i}{h_i^2}(2s_{i-1} + s_i - 3s) +$$

$$+ \frac{6}{h_i^3}(x_i - x_{i-1})(s_i + s_{i-1} - 2s), \tag{8}$$

$$x'''(s) = \frac{6}{h_i^2}(m_{i-1} + m_i) - \frac{12}{h_i^3}(x_i - x_{i-1}). \tag{9}$$

Сначала построим сплайны $x(s)$ и $y(s)$ таким образом, чтобы кривизна $K(S)$ была бы непрерывна в узлах, т.е.

$$K(s_i - 0) = K(s_i + 0), \quad i = 2, 3, \ldots, N-1, \tag{10}$$

где /4/ $K(s) = |x''y' - x'y''|$. Параметр $S$ должен быть натуральным. Для этого необходимо и достаточно /4/, чтобы вектор $(x'(s), y'(s))$ был единичным. Так получаем дополнительные уравнения для $m_i$ и $n_i$, $i = 2, 3, \ldots, N-1$. Именно,

$$m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1. \tag{11}$$

В системе (10) и (11) не хватает 4 уравнений. Такие уравнения получаются из выбранных /5,6/ граничных условий для $x'(s)$ и $y'(s)$ в точках $s_1$ и $s_N$. Необходимые для составления (10) величины $x''(s_i - 0)$, $x''(s_i + 0)$, $y''(s_i + 0)$ и $y''(s_i - 0)$ получаем из (8):

$$x''(s_i - 0) = \frac{1}{h_i}(2m_{i-1} + 4m_i) - \frac{6}{h_i^2}(x_i - x_{i-1}), \tag{12}$$

$$x''(s_i + 0) = -\frac{1}{h_{i+1}}(4m_i + 2m_{i-1}) + \frac{6}{h_{i+1}^2}(x_{i+1} - x_i). \tag{13}$$



Такой метод естественным образом распространяется на трехмерные кривые. При этом можно потребовать непрерывности не только кривизны, но и кручения. Имеем /4/

$$K^2(s) = (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 \tag{14}$$

и

$$\tau(s) = \frac{\Delta(s)}{K^2(s)}, \quad \Delta(s) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Соответствующие уравнения для неизвестных $m_i$, $n_i$ и $\ell_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ получаются из граничных условий для $x'$, $y'$ и $z'$ в точках $s_1$ и $s_N$ и из равенств

$$K^2(s_i - 0) = K^2(s_i + 0), \tag{16}$$

$$\Delta(s_i - 0) = \Delta(s_i + 0), \tag{17}$$

$$m_i^2 + n_i^2 + \ell_i^2 = 1, \tag{18}$$

где $i = 2, 3, \ldots, N-1$.

В случае стандартных сплайнов (плоские кривые) имеем непрерывность первых и вторых производных в точках $s_i$ $(i = 2, 3, \ldots, N-1)$ и, следовательно, уравнения (10) удовлетворяются. Однако не будут удовлетворяться уравнения (11). Наклоны $m_i$, $n_i$ и $\ell_i$ стандартных сплайнов можно использовать в качестве начальных приближений в итерационной процедуре для нахождения наклонов нестандартных сплайнов.

Системы нелинейных алгебраических уравнений для определения наклонов становятся проще, если ввести локальные системы координат. Введем локальную систему координат $K_i$ с началом в точке $P_i$ а осью абсцисс, направленной от $P_i$ к $P_{i+1}$. Рассмотрим donee подробно величины, связанные со сплайном $x(s)$. Вместо того, чтобы работать с наклоном $m_i$ в точке $s_i$, вводим угол $\alpha_i^K$ между касательной к сплайну $x(s)$ в точке $s_i$ и осью абсцисс $K$-ой локальной системы координат. Обозначим $tg(\alpha_i^K)$ через $m_i^K$. Ясно, что $m_i^i$ можно выразить через $m_i^{i-1}$ а что

$$(m_i^i)^2+(n_i^i)^2=1\,,\quad (i=2,3,\dots,N-1)\,. \tag{I9}$$

Вместо выражений (I2), (I3) и (9) будем иметь

$$x''(s_i-0)=\frac{1}{h_i}(2m_{i-1}^{i-1}+4m_i^{i-1})\,,\quad x''(s_i+0)=-\frac{1}{h_{i+1}}(4m_i^i+2m_{i+1}^i) \tag{20}$$

$$x'''(s_i-0)=\frac{6}{h_i^2}(m_{i-1}^{i-1}+m_i^{i-1})\,,\qquad x'''(s_i+0)=\frac{6}{h_{i+1}}(m_i^i+m_{i+1}^i)\,. \tag{2I}$$

Подставляя величины (20), (2I) и ем аналогичные для сплайнов $y(s)$ и $z(s)$ в (I0), (I6) р (I7), получаем donee простые уравнения для определения величин $m_i^i$, $n_i^i$ и $\ell_i^i$. В этом случае для того, чтобы подсчитать координаты некоторой точки кривой, сначала нужно найти по данному $s$ координаты этой точки в локальной системе координат н затем перевести их в исходную систему.

Для того, чтобы утверждать, что построенные сплайны дают кривую, проходящую через заданные точки, с минимальной кривизной и кручением, надо построить сплайны, минимизирующие функционал



(2) с дополнительными ограничениями (II) в случае плоских кривых или функционал

$$\int (K^2(s)+\tau^2(s))\,ds \tag{22}$$

с дополнительными ограничениями (I8) в пространственном случае. Функционал (2) принимает следующий вид :

$$\int_\Gamma K^2(s)\,ds=\int_{s_1}^{s_N}K^2(s)\,ds=\sum_{i=2}^{N}\int_{s_{i-1}}^{s_i}[x''(s)y'(s)-x'(s)y''(s)]^2\,ds\,. \tag{23}$$

Интегралы, входящие в (23), можно вычислять точно численно, так как функция $(x''y'-y''x')^2$ является на каждом промежутке алгебраическим многочленом степени не выше шести. Для этой цели можно воспользоваться квадратурными формулами Ньютона-Котеса или Гаусса-Лежандра с необходимым числом узлов. Приведем Тах— явное выражение (23) относительно неизвестных величин $m_i$ и $n_i$ $(i=1,2,\dots N)$. Подставляя в (23) выражения (7), (8) и им аналогичные для сплайна $y(s)$ и интегрируя по $s$, находим :

$$\int_\Gamma K^2(s)\,ds=\sum_{i=2}^{N}\Big[A_1^i(m_{i-1}^2n_i^2-2m_in_im_{i-1}n_{i-1}+n_{i-1}^2m_i^2)+$$

$$+A_2^i(\beta_i^2m_{i-1}^2-2\alpha_i\beta_im_in_i+\alpha_i^2n_{i-1}^2)+A_3^i(\beta_i^2m_i^2+\alpha_i^2n_i^2)+$$

$$+A_4^i(\beta_im_im_{i-1}n_{i-1}+\alpha_in_in_{i-1}m_{i-1}-\beta_in_im_{i-1}^2-\alpha_im_in_{i-1}^2-$$

$$-\alpha_in_i^2m_{i-1}-\beta_im_i^2n_{i-1})+A_5^i\alpha_i\beta_im_{i-1}n_{i-1}+A_6^i(\beta_in_im_im_{i-1}+$$

$$+\alpha_im_in_in_{i-1})+A_7^i(\alpha_i\beta_in_im_{i-1}+\alpha_i\beta_im_in_{i-1}-\beta_i^2m_im_{i-1}-\alpha_i^2n_in_{i-1})\Big],$$

где $\alpha_i = x_i - x_{i-1}$ , $\beta_i = y_i - y_{i-1}$ ,

$$A_1^i = \frac{2}{h_i}\left(I_{60}^i + I_{33}^i\right), \qquad A_2^i = \frac{9}{h_i^3}\left(I_{60}^i + 2I_{51}^i + I_{42}^i\right),$$

$$A_3^i = \frac{18}{h_i^3}\left(2I_{60}^i - 2I_{51}^i - I_{42}^i + 3I_{33}^i\right), \quad A_4^i = \frac{6}{h_i^2}\left(I_{60}^i + I_{51}^i + I_{42}^i + I_{33}^i\right),$$

$$A_5^i = -\frac{18}{h_i^3}\left(I_{60}^i + 2I_{51}^i + I_{42}^i + 7I_{33}^i\right), \quad A_6^i = \frac{6}{h_i^2}\left(I_{60}^i - 5I_{51}^i + 28I_{42}^i - 20I_{33}^i\right),$$

$$A_7^i = \frac{36}{h_i^2}\left(I_{42}^i + I_{33}^i\right), \qquad I_{k\ell}^i = h_i^{-7}\int_{s_{i-1}}^{s_i}(s_i - s)^k (s - s_{i-1})^\ell ds =$$

$$= \frac{k!\,\ell!}{(k+\ell+1)!}\, h_i^{k+\ell-6} .$$

Вопросы о существовании и единственности введенных сплайнов здесь не обсуждаются. Заметим также, что подобный подход можно применить для аппроксимации поверхностей, заданных конечным числом точек.

В заключение автор выражает большую благодарность Е.П.Жидкову за полезные обсуждения.

## Литература


1. Schoenberg I.J. Quart. Appl. Math., 4, 1946, 45-99, 112-141.
2. Holladay J.C. Math. Tables Aids Comput. 11, 1957, 233-243.
3. Fowler A.H., Wilson C.W. Union Carbide, Mathematics a d Computer Report, I-1400, 1962.
4. А.П.Норден. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, Москва, 1958.





5. Дж. Алберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш. Теория сплайнов и ее приложения, "Мир", Москва, 1972.
6. С.Б.Стечкин, Ю.Н.Субботин. Сплайны в вычислительной математике. "Наука", Москва, 1976.


Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1977 года