СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р11 - 10339

С.Будням, С.Ваша

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

1976

P11 - 10339

С.Будням, С.Ваша

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Буднам С., Ваша С. Р11 - 10339

Численное исследование одной некорректно поставленной задачи

В данной работе предлагается численный метод решения для одной некорректно поставленной задачи. Приведены численные результаты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Budnjam S., Vasha S. P11 10339

Numerical Solution of One Improperly Posed Problem

The numerical method to solve one improperly posed problem and the numerical results are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

1. Реальные спектральные приборы не являются, как известно, идеальными гармоническими анализаторами излучения, т.е. распределение энергии по спектру, получаемое с помощью реального спектрального прибора, отличается от того "идеального" или "истинного" распределения, которое дает фурье-разложение исследуемого излучения.

Отличия наблюдаемого распределения от истинного вызываются многочисленными и весьма разнообразными причинами, в той или иной степени имеющими место в любом реальном приборе. В большинстве случаев эти искажения обусловлены тем, что даже при монохроматическом излучении спектральный прибор дает некоторое распределение энергии по спектрограмме, обладающее конечной шириной. Форма этого распределения и его ширина определяются различными причинами: дифракцией на диафрагмах оптической системы спектрального прибора, ее аберрациями, конечностью ширин щелей, инерционностью записывающего устройства, рассеянием в светочувствительном слое фотопластинки и др.

Математическая постановка задачи, обсуждаемой в данной работе, формулируется следующим образом.

Пусть истинное распределение энергии по спектру описывается функцией $\phi(x)$, а распределение, получаемое с помощью реального прибора при монохроматическом излучении, функцией $a(x)$, которую мы будем называть аппаратной функцией спектрального прибора. Наблюдаемое распределение можно построить по следующему принципу. Каждый монохроматический компонент $\phi(x)\,dx$ истинного распределения заменяется аппаратной функцией, вследствие чего в некоторой произвольной точке x' создается освещенность /или поток/ $a(x'-x)\,\phi(x)\,dx$ */рис. 1/.*

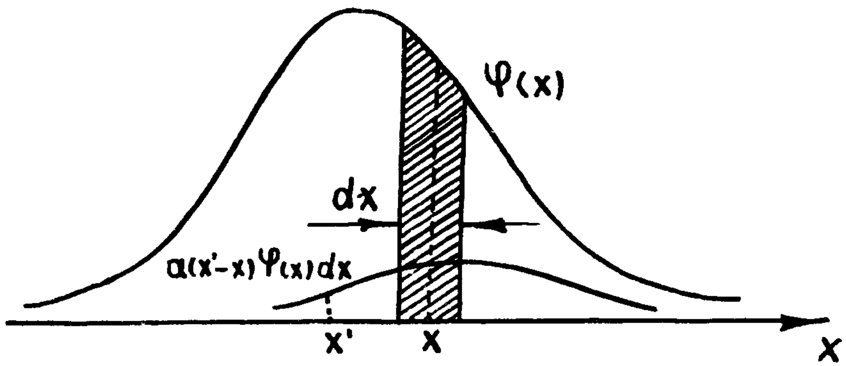

Рис. 1

Другие монохроматические компоненты истинного распределения также дадут соответствующий вклад в освещенность в точке x', в результате чего наблюдаемое распределение $f(x')$ будет выражаться интегралом

$$f(x') = \int_{-\infty}^{\infty} a(x'-x)\,\phi(x)\,dx\,. \qquad /1/$$

Функция $a(x)$ и, следовательно, формула /1/, учитывает искажения как в оптической, так и в регистрирующей частях прибора.

Следует иметь в виду, что для правомерного использования понятия истинного распределения энергии по спектру необходима вполне определенная нормировка аппаратной функции $a(x)$. Математически это означает, что аппаратная функция должна быть нормирована по площади, например, следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,dx = 1. \qquad /2/$$

Если принять /2/, то наличие аппаратной функции приводит только к перераспределению энергии в спектре, т.е. к изменению формы линий, полос и т.п. Это позволяет отделить вопрос об искажении формы распределения от вопросов, связанных с абсолютной величиной освещенности, светосилой прибора и т.п. Для этой цели достаточно нормировать функции $f(x)$ и $\phi(x)$ аналогично /2/:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1\,. \qquad /3/$$

Таким образом, задача исправления инструментальной ошибки сводится к решению уравнения /1/ с условиями /2/-3/[2]. В данной работе нас интересуют проблемы исправления инструментальных ошибок контуров солнечных линий, которые представляют практический интерес, например, в вопросах изучения неоднородности фотосферы солнца.

2. Рассмотрим интегральные уравнения вида

$$K\phi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} A(x-x')\,\phi(x')\,dx' = f(x)\,, \qquad /4/$$

для чего применим преобразование Фурье. Здесь

$$f(x) \in L_2(-\infty, \infty)\,,$$

$$A(x) \in L_1(-\infty, \infty)\,, \quad \phi(x') \in L_1(-\infty, \infty)\,.$$

Если правая часть уравнения /4/ известна приблизительно, т.е. $f(x) = f_t(x) + v(x)$, где $v(x)$ - помеха, то

$$\phi(w) = \frac{f(w)}{A(w)} = \frac{f_T(w)}{A(w)} + \frac{v(w)}{A(w)}\,.$$

Так как

$$f_T(w) = A(w)\,\phi_T(w)\,, \text{то} \quad \phi(w) = \phi_T(w) + \frac{v(w)}{A(w)}\,.$$

Эта формула дает нам преобразование Фурье точного решения /4/ с приближенной правой частью $f(x)$.

Как известно, /3/ не всегда является приближенным решением функции, полученной с помощью обратного преобразования Фурье. Отсюда следует, что задача /1/-/3/ некорректно поставлена в смысле корректности по Тихонову /1/.

3. Мы хотим строить приближенные решения уравнения /4/ по методу, предложенному в работе /3/. Согласно этому методу, устойчивые решения /4/ ищутся в следующем виде:

$$R_{T\alpha}(f,\alpha) = \mathcal{F}^{-1}\,[\,\Psi(f(w),\, w)\, T(w,\alpha)\,]\,, \qquad /5/$$

где $\mathcal{F}^{-1}$ - преобразование, обратное преобразованию $\mathcal{F}$, а $T(w,\alpha)$ - некоторая заданная функция, определенная для всех неотрицательных значений параметра α и любых w, по которым берется оператор $\mathcal{F}^{-1}$. Если функцию $T(w,\alpha)$ подчинить соответствующим условиям, то оператор $R_T(f,\alpha)$ будет регуляризующим для уравнения /4/. Конкретно в нашем случае в качестве $\mathcal{F}$ будем брать преобразование Фурье. Тогда /5/ имеет вид

$$R_T(f,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(w,\alpha)}{A(w)}\, f(w)\exp(iwt)\,dw\,. \qquad /6/$$

В работе /1/ доказано, что при удовлетворении определенных требований на $T(w,\alpha)$ оператор /6/ определяет регуляризованное решение $\phi_\alpha(x)$, которое минимизирует функционал

$$M^\alpha[\phi, f] = \int_{-\infty}^{\infty} (K\phi - f)^2\,dt + \alpha\,\Omega[\phi]$$

со стабилизирующим функционалом вида

$$\Omega[\phi[= \int_{-\infty}^{\infty} M(w)\,|\,\phi(w)\,|^2\,dw\,.$$

В качестве $M(w)$ можно брать функцию, имеющую любой порядок роста при $w \to \infty$.

4. Изложенный алгоритм был применен для нахождения следующей методической задачи:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\frac{x-x^1}{12}}\,\phi(x^1)\,dx^1 = b e^{-\frac{x^2}{4250}}$$

$$a = b = 1\,,$$

В качестве исходных данных взяты контуры солнечных линий мультиплетов ионизованного железа, записанные на двойном монохроматоре Главной астрофизической обсерватории АН УССР.

Приближенное решение находилось в случае $(w,)=e^{-\;{}^2w^2}$. Численные результаты представлены графиком /*рис. 2*/. При этом $\alpha = 1000 \div 0{,}5$. Истинный контур восстанавливается с точностью 10^{-2}.

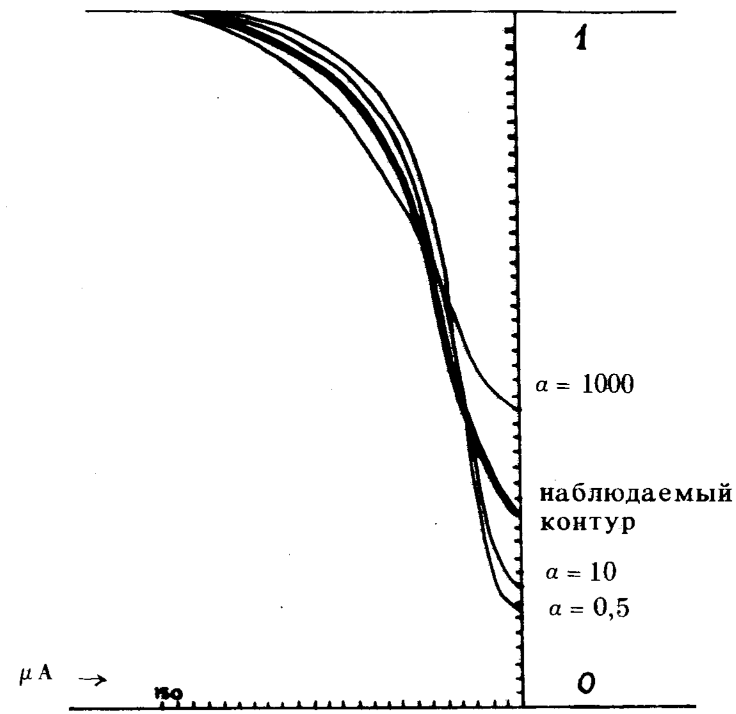

Рис. 2

Литература

1. *Тихонов А.Н. ДАН СССР, 1963, №151.*
2. *Раутиан С.Г. УФН 1958, №6.*
3. *Арсенин В.Я., Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1974.*

Рукопись поступила в издательский отдел 29 декабря 1976 года.