СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р10 - 9950

Ю.А.Будагов, Г.А.Емельяненко, В.Г.Одинцов,
А.И.Мачавариани

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЭФФЕКТИВНОЙ ОЦЕНКИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ МНОЖЕСТВЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1976

P10 - 9950

Ю.А.Будагов, Г.А.Емельяненко, В.Г.Одинцов,
А.И.Мачавариани

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЭФФЕКТИВНОЙ ОЦЕНКИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ МНОЖЕСТВЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Будагов Ю.А. и др. P10 - 9950

О некоторых вопросах эффективной оценки кинематических параметров заряженных частиц с учетом множественных случайных факторов в экспериментах по физике высоких энергий

Получено удобное факторизованное представление информационных матриц, позволяющее построить эффективный вычислительный процесс для поиска кинематических параметров заряженных частиц в экспериментах по физике высоких энергий.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Budagov Yu.A. et al. P10 - 9950

On Some Problems of Effective Evaluation of Charged Particle Kinematic Parameters with the Account of Multiple Random Factors in Experiments of High Energy Physics

A convenient factorized representation of information matrices has been obtained which allows one to construct the effective calculation process for a search for charged particle kinematic parameters in high energy physics experiments.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

Исследование оптимальных математических моделей обработки трековой информации, а также создание эффективных вычислительных процедур по-прежнему остается важной задачей обработки информации в экспериментах по физике высоких энергий.

В работе получено удобное факторизованное представление информационных матриц, обычно используемых в программах геометрической реконструкции кинематических параметров заряженных частиц. Полученное представление позволяет создать эффективный процесс поиска оценок параметров частиц с учетом множественных случайных факторов.

§1. Факторизованное представление матрицы ошибок многократного кулоновского рассеяния с учетом энергетических потерь

Хорошо известно, что эффективность численных расчетов на этапе геометрической обработки трековой информации в значительной мере обусловлена точностью математической модели следа заряженной частицы.

Наиболее полные из моделей /например, [1–3] / учитывают вид частицы, конфигурацию магнитного поля в объеме детектора, уравнение движения, потери энергии, многократное кулоновское рассеяние, измерительные погрешности, изломы.

Многие авторы при этом уделяют, естественно, особое внимание вопросам корректного построения и изучения свойств кулоновской матрицы и обратной к ней. Так, в [4] был получен общий вид коэффициентов матрицы ошибок с учетом энергетических потерь, в [5] дано обращение кулоновской матрицы при условии равномерного разбиения трека и отсутствия потерь на ионизацию, в [6] выведено факторизованное представление матрицы ошибок без учета потерь энергии, но при произвольном разбиении треков.

Ниже в рамках подхода к построению модели треков, развитого в [3], дается краткий вывод и приводится общий вид факторизованного представления кулоновской матрицы ошибок с учетом энергетических потерь и произвольного разбиения треков. Полученная факторизация позволяет применить эффективный способ вычисления параметров заряженных частиц по измерениям следов, а также значительно сократить объем оперативной памяти ЭВМ, необходимой для хранения как самой матрицы ошибок, так и обратной ей весовой матрицы.

В [7], с использованием [3], приведен общий вид распределения:

$$\Phi[(Y,\Delta)/0,\Sigma]=(2\pi)^{-N}|\Sigma|^{-1/2}\exp[-1/2(Y,\Delta)\Sigma^{-1}(Y,\Delta)^T],$$

где * :

$$\Sigma=\begin{bmatrix}E_\Delta & L_\Delta\\ 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma & 0\\ 0 & \Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}D_s^3 & \frac{1}{2}D_s^2\\ \frac{1}{2}D_s^2 & D_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma & 0\\ 0 & \Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_\Delta^T & 0\\ L_\Delta^T & E\end{bmatrix}$$

/1.1/

и матрицы E, D_s, Γ, E_Δ, L_Δ определены как

$$E=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix},\quad D_s=\begin{bmatrix}\Delta s_1 & & \\ & \Delta s_2 & 0\\ 0 & & \Delta s_N\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}\gamma_1 & & \\ & \gamma_2 & 0\\ 0 & & \gamma_N\end{bmatrix},$$

$$E_\Delta=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 1 & 1 & & 0\\ 1 & 1 & 1 & \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad L_\Delta=\begin{bmatrix}0 & & & \\ \Delta s_2 & 0 & & 0\\ \sum_{k=2}^{3}\Delta s_k & \Delta s_3 & & \\ \sum_{k=2}^{N}\Delta s_k & \sum_{k=3}^{N}\Delta s_k & \ldots\Delta s_N & 0\end{bmatrix},$$

---
* Здесь и всюду T - знак транспортирования.

а случайные векторы: $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ и $\Delta=\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\}$ означали полные смещения вдоль оси OY, накопленные по прохождению частицей пути от начальной до i-точки на треке ($i=1,2,\ldots,N$), и, соответственно, угловые отклонения на каждом из элементарных участков - ΔS_i траектории. Отметим также, что в /1.1/

$$\gamma_i^2=\frac{(21.2)^2}{2}\cdot\frac{1}{^{(i)}X_{рад}}\cdot\frac{E_{i+1}\cdot E_i}{(P_{i+1}\cdot P_i)^2}. \qquad /1.2/$$

Здесь: $^{(i)}X_{рад}$ - радиационная длина i - элементарного рассеивателя, E_i, E_{i+1} и P_i, P_{i+1} - энергия и импульс частицы в начале и в конце i-элементарного участка траектории, соответственно, $s=\sum_{i=1}^{N}\Delta s_i$. Далее, воспользовавшись /1.1/, а также проделав выкладки, аналогичные [3], получаем следующий вид матрицы ошибок из-за многократного кулоновского рассеяния:

$$\Sigma_{кул}=(E_\Delta\cdot D_s E_\Delta)A(E_\Delta\cdot D_s\cdot E_\Delta), \qquad /1.3/$$

где

$$A=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2(\tilde\gamma_0^2+\tilde\gamma_1^2) & \tilde\gamma_1^2 & & & \\ \tilde\gamma_1^2 & 2(\tilde\gamma_1^2+\tilde\gamma_2^2) & \tilde\gamma_2^2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \tilde\gamma_{N-2}^2 & 2(\tilde\gamma_{N-2}^2+\tilde\gamma_{N-1}^2) & \tilde\gamma_{N-1}^2 & \\ & & \tilde\gamma_{N-1}^2 & 2(\tilde\gamma_{N-1}^2+\tilde\gamma_N^2)\end{bmatrix}. \qquad /1.4/$$

Здесь обозначили: $\tilde\gamma_i^2=\gamma_i^2\cdot\Delta s_i$, $\tilde\gamma_0^2=0$.

Итак, как видно из /1.3/, учет энергетических потерь не нарушает вид факторизованного представления, полученного в [6] для матрицы кулоновского рассеяния.

В дальнейшем будем учитывать, что D_s^{-1} есть диагональная матрица в соответствии с /1.1/. Всюду ниже для элементов симметричной трехдиагональной матрицы $A(1.3)$ будем использовать запись:

$$(A)_{ij} = \frac{1}{6}\begin{cases} 2(\tilde{\gamma}_{i-1}^2 + \tilde{\gamma}_i^2), & i=j, \quad i=1,2,\ldots,N \\ \tilde{\gamma}_i^2, & i=j+1, \quad j=1,2,\ldots,N-1 \\ \tilde{\gamma}_i^2, & j=i+1, \quad i=1,2,\ldots,N-1 \\ 0, & |i-j|>1, \quad i,j=1,2,\ldots,N \end{cases} \qquad /1.4'/$$

и для матрицы E_Δ^{-1} следующий вид:

$$E_\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad /1.5/$$

Если теперь воспользоваться результатами[8] для обращения трехдиагональных матриц, то становятся очевидными все преимущества численных расчетов, использующих представление /1.3/ при вычислениях кинематических параметров частиц. Эти вычисления, включающие обращение $\Sigma_{кул}$ /1.3/, фактически выполняются[8] с помощью двух последовательностей /размерности N каждая/ чисел. Последнее обстоятельство тем более важно, что обращение к любым из численных методов $\Sigma_{кул}$ на ЭВМ при больших N становится затруднительным.

§2. *Факторизованное представление полной матрицы ошибок*

Учитывая, что системы обработки фильмовой информации в крупных ядерных центрах нередко включают в себя геометрические программы, в которые в качестве составного компонента входят подпрограммы вычисления как дисперсионных* матриц $(\Sigma_{кул} + \Sigma_{изм})$, так и обратных им весовых - $(\Sigma_{кул} + \Sigma_{изм})^{-1}$, приведем ниже удобное разложение этих матриц, которое позволяет сохранить все перечисленные выше преимущества при использовании представления /1.3/ кулоновской матрицы.

$$\Sigma_{кул.} + \Sigma_{изм.} = [(E_\Delta D_s E_\Delta)\cdot A\cdot(E_\Delta \cdot D_s \cdot E_\Delta)^T + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & \ddots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}]. \qquad /2.1/$$

Сведем матрицу /2.1/ к факторизованному представлению с симметричной пятидиагональной матрицей:

$$\Sigma_{кул} + \Sigma_{изм} = G(A + G^{-1}\Sigma_{изм} G^{-T})G^T, \qquad /2.1'/$$

где использованы /1.1/ и введены замены

$$G = (E_\Lambda \cdot D_s \cdot E_\Delta); \quad G^{-1} = (E_\Delta \cdot D_s \cdot E_\Lambda)^{-1}. \qquad /2.2/$$

Воспользовавшись /2.2/ и /1.5/, нетрудно получить, что $G^{-1}\Sigma_{изм} G^{-T}$ в /2.1'/ есть симметричная пятидиагональная матрица

$$G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_1^{-1} & & 0 \\ & \Delta s_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \Delta s_N^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta s_N^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad /2.3/$$

---

* Здесь $\Sigma_{кул.}$ есть матрица /1.3/, а $\Sigma_{изм.}$ матрица аппаратурных погрешностей /чаще всего диагональная/.

Итак, в соответствии с /1.4/ и /2.3/, матрица $(A+G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T})$ в /2.1′/ является симметричной пятидиагональной. Если теперь проделать все перемножения в /2.3/ и сложить $G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T}$ с A, то получим следующий вид элементов пятидиагональной матрицы $A+G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T}$:

$$(A+G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T})_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{3}(\tilde\gamma^2_{i-1}+\tilde\gamma^2_i)+\rho_i, & i=j,\ i=1,2,\ldots,N\\ \frac{1}{6}\tilde\gamma^2_j-q_j, & i=j+1,\ j=1,2,\ldots,N-1\\ \frac{1}{6}\tilde\gamma^2_i-q_i, & j=i+1,\ i=1,2,\ldots,N-1\\ \eta_{j+1}, & i=j+2,\ j=1,2,\ldots,N-2\\ \eta_{i+1}, & j=i+2,\ i=1,2,\ldots,N-2\\ 0, & |i-j|>2,\end{cases}\qquad /2.4/$$

где для величин $\tilde\gamma_i^2$ использованы /1.2/, /1.4/ и введены обозначения:

$$\rho_i=\phi_{i-1}\left(1+\frac{\Delta s_{i-1}}{\Delta s_i}\right)+\frac{\sigma_i^2}{\Delta s_i^2}+\left(\frac{\sigma^2_{i-2}}{\Delta s^2_{i-2}}\right)\left(\frac{\Delta s_{i-2}}{\Delta s_{i-1}}\right)^2,\ i=1,2,\ldots,N$$

$$q_i=\phi_{i-1}\left(\frac{\Delta s_{i-1}}{\Delta s_i}\right)+\phi_i,\ i=0,1,2,\ldots,N-1\qquad /2.5/$$

$$\eta_i=\frac{\sigma^2_{i-1}}{\Delta s^2_{i-1}}\left(\frac{\Delta s_{i-1}}{\Delta s_i}\right)=\phi_{i-1}-\frac{\sigma^2_{i-1}}{\Delta s^2_{i-1}},\ i=1,2,\ldots,N-2.$$

Здесь:

$$\phi_{i-1}=\frac{\sigma^2_{i-1}}{\Delta s^2_{i-1}}\left(1+\frac{\Delta s_{i-1}}{\Delta s_i}\right),\qquad i=0,1,2,\ldots,N$$

$$\sigma^2_{-1}=\sigma^2_0=0,\quad \Delta s_{-1}=1,\quad \Delta s_0=\Delta s_1\qquad /2.6/$$

$$\eta_0=\eta_1=1\qquad \eta_N=\eta_{N+1}=1;\quad q_N=\frac{1}{6}\tilde\gamma^2_N.$$

Симметричная пятидиагональная матрица $(A+G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T})$ /2.4/ является, очевидно, также неособенной симметричной квазитрехдиагональной:

$$(A+G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T})=\begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2^T & b_2 & a_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & a^T_{m-1} & b_{m-1} & a_m\\ & & & a_m^T & b_m\end{bmatrix}\equiv B,\qquad /2.7/$$

где введены обозначения:
B – для пятидиагональной матрицы, а также $\{b_i\}^m_{i=1}$, $\{a_i\}^m_{i=1}$ - для матриц размерности [2,2], имеющих вид:

$$b_\ell=\begin{bmatrix}1/3(\tilde\gamma^2_\mu+\gamma^2_{\mu+1})+\rho_{\mu+1} & 1/6\,\tilde\gamma^2_{\mu+1}-q_{\mu+1}\\ 1/6\,\tilde\gamma^2_{\mu+1}-q_{\mu+1} & 1/3\,(\tilde\gamma^2_{\mu+1}+\tilde\gamma^2_{\mu+2})+\rho_{\mu+2}\end{bmatrix}$$

$$a_\ell=\begin{bmatrix}\eta_\mu & 0\\ 1/6\,\tilde\gamma^2_\mu-q_\mu & \eta_{\mu+1}\end{bmatrix}\qquad /2.8/$$

для всех $\ell=1,2,\ldots,m$ и $\mu=2(\ell-1)$. Пользуясь тем, что a_ℓ есть неособенная нижнетреугольная матрица [2,2], можно получить a^{-1}_ℓ

$$a^{-1}_\ell=\begin{bmatrix}\eta^{-1}_\mu & 0\\ -(\eta_\mu\eta_{\mu+1})^{-1}\left(\frac{1}{6}\tilde\gamma^2_\mu-q_\mu\right) & \eta^{-1}_{\mu+1}\end{bmatrix}.\qquad /2.9/$$

Легко видеть, что условия /2.6/ подобраны таким образом, что $a_1=a_{m+1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. Будем также для удобства рассуждений* считать всюду далее, что $N=2m$, т.е. N кратно 2. Отметим в заключение, что все вычисления с матрицей $(A+G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T})$ организуются, согласно /2.5/, /2.6/, только с помощью величин

$$\left\{\frac{\Delta s_{i-1}}{\Delta s_i}\right\}_{i=0}^{N},\quad \left\{\frac{\sigma_i^2}{\Delta s_i^2}\right\}_{i=0}^{N},\quad \{\tilde{\gamma}_i^2\}_{i=0}$$

и общее количество мультипликативных операций не превосходит $15\cdot N$, что заведомо меньше, чем $M\frac{N(N+1)}{2}$ - число мультипликативных операций, обычно затрачиваемых[1] на заполнение матрицы ошибок.

§3. *Факторизованное представление полной весовой матрицы*

Обычно при вычислении весовой матрицы $(\Sigma_{кул}+\Sigma_{изм})^{-1}$ пользуются одной из стандартных программ на ЭВМ для обращения матриц. Мы же будем пользоваться представлением /2.1/ дисперсионной матрицы, а также формулами /2.7/ /2.9/. Поскольку G в /2.1/ имеет вид /2.3/, то остается лишь найти матрицу, обратную $(A+G^{-1}\Sigma_{изм}G^{-T})$ /2.7/. Для этой цели воспользуемся результатами[9], где показано, что:

$$(B^{-1})_{k\ell}=\begin{cases} V_k W_\ell, & k\le \ell, \quad \ell=1,2,\dots,m\\ W_k^T V_\ell, & \ell\le k, \quad k=1,2,\dots,m \end{cases} \qquad /3.1/$$

Здесь:

$$V=[V_1, V_2, \dots, V_m],\quad W=[W_1, W_2, \dots, W_m], \qquad /3.2/$$

т.е. V и W - матрицы размерности $[2,N]$, каждая из которых состоит из m матриц $\{V_k\}_{k=1}^m$ и $\{W_k\}_{k=1}^m$ размерности $[2,2]$.

В[9] также получены простые рекурсивные выражения для вычисления V и W через матрицы $\{a_k\}_{k=1}^m$ и $\{b_k\}_{k=1}^m$ /2.8/, /2.9/.

Однако ниже мы приведем без доказательства более эффективные, чем в[9], рекурсивные формулы, полученные на основании рекурсий[9]:

$$W_{\ell-1}=-(W_\ell\cdot b_\ell+W_{\ell+1}\cdot a_{\ell+1}^T)a_\ell^{-1},\quad \ell=m,m-1,\dots,2,1$$
$$V_{k+1}=-a_{k+1}^{-1}(b_kV_k+a_k^TV_{k-1}),\quad k=1,2,\dots,m-1, \qquad /3.3/$$

где: $a_1=a_{m+1}=E$ (единичная матрица, как условились выше, /2.9/) и приняли: $V_0=W_{m+1}=0$ - нулевая матрица, а также $W_m=(-E)^m$, $V_1=-W_0^{-1}$. /3.4/

Как следует из определения рекурсивного вычислительного процесса /3.3/, /3.4/, сначала вычисляем матрицы $\{W_\ell\}_{\ell=m-1}^0$, используя матрицы W_{m+1} и W_m /3.4/, а также $\{a_\ell\}_{m+1}^1$ и $\{b_\ell\}_{\ell=m}^1$ /2.8/, /2.9/. Затем находится матрица $V_1=-W_0^{-1}$ (размерности $[2,2]$) и, используя $V_0=0$ и $\{a_k\}_{k=1}^{m+1}$, $\{b_k\}_{k=1}^m$ /2.8/, /2.9/, вычисляют $\{V_k\}_{k=2}^m$. В результате, пользуясь правилами умножения матриц, получаем:

$$(W_{\ell-1})_{ij}=-\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{\eta=1}^{2}(W_\ell)_{i\eta}(b_\ell)_{\eta k}+(W_{\ell+1})_{i\eta}(a_{\ell+1}^T)_{\eta k}\right)(a_\ell^{-1})_{kj} \qquad /3.5/$$

для всех $\ell=m,m-1,\dots,2,1$

$$(V_{\ell+1})_{ij}=-\sum_{k=1}^{2}(a_{\ell+1}^{-1})_{ik}\sum_{\eta=1}^{2}(b_\ell)_{k\eta}(V_\ell)_{\eta j}+(a_\ell^T)_{k\eta}(V_{\ell-1})_{\eta j}$$

для всех $\ell=1,2,\dots,m$.

Итак, в заключение отметим, что общее количество мультипликативных операций, необходимых для заполнения полной факторизованной матрицы ошибок, а также вычисление весовой матрицы составляет не более

$15\cdot N+50\cdot N\le 70N$, что много меньше, чем $M\frac{N(N+1)}{2}+N^3$, обычно используемых в любой из существующих программ.

---

* В случае, если число элементарных длин Δs_i нечетно, т.е. N - не кратно 2, рассуждения также верны. Однако формулы §3 несколько изменятся в соответствии с[9].

Использование факторизованного представления весовой матрицы позволяет хранить ее "упакованной" в $4 \cdot N$ ячейках ЭВМ, что много меньше $\frac{N(N+1)}{2}$, обычно используемых в программах. Теперь легко воспользоваться приведенными выше результатами для получения оценок кинематических параметров по результатам измерений треков частиц.

Литература

1. *В.И.Мороз. Автореферат диссеертации, 10-4112, Дубна, 1968.*
2. *Л.Н.Гердюков, Б.А.Манюков, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ, Р10-4579, Дубна, 1969.*
3. *Г.А.Емельяненко. Автореферат диссертации, 11-6076, Дубна, 1971.*
4. B.A.Manyukov, P.V.Shlyapnikov. Multiple Scattering Matrix with Energy Loss. JINR preprint, E10-4447, Dubna, 1969.
5. F.Rohrbach and P.Rosselet. Momentum Estimate from Simultaneous Utilization of Magnetic Deflection and Multiple Coulomb Scattering, Helv. Phys. Acta 34, 493 (1961).
6. *Г.А.Емельяненко. Сообщение ОИЯИ, Р10-5687, Дубна, 1971.*
7. *С.Ф.Бережнев, Г.А.Емельяненко, О.А.Займидорога. Препринт ОИЯИ, Р10-8167, Дубна, 1974.*
8. *Б.Бухбергер, Г.А.Емельяненко. Методы обращения трехдиагональных матриц. ЖВМ и МФ, 1973, 13, №3, 546-554; 48, №2, 1974, с. 382.*
9. *Г.А.Емельяненко. Сообщение ОИЯИ, Р11-6933, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июля 1976 года.