

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

99-223

P10-99-223

Н.Д.Дикусар, Ч.Торок\*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ  
К СГЛАЖИВАНИЮ ПОВЕРХНОСТЕЙ

---

\*Технический университет, Кошице, Словакия

1999

Построена бикубическая модель для локального сглаживания функций с привязкой к опорным (реперным) точкам исследуемой поверхности. Такой подход позволяет более чем в два раза сократить размерность матрицы системы нормальных уравнений, что существенно повышает скорость и устойчивость вычислений. Построенные на основе предложенной модели алгоритмы могут быть использованы как в приложениях, так и при разработке глобальных методов сглаживания и аппроксимации поверхностей.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

#### Перевод авторов

Dikoussar N.D., Török Cs.

P10-99-223

On the One Approach to Surface Smoothing

A bicubic model for the local smoothing of functions related to pivot points (marks) of a searching surface is constructed. Such approach allows reducing the dimension of a matrix of normal equations more than twice. The model enables to raise essentially the speed and stability of calculations. The algorithms constructed using the offered model can be used both in applications and development of global methods of smoothing and approximation of surfaces.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

## Введение

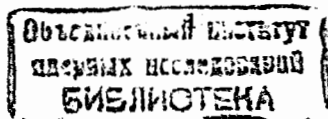
В работе предлагается новый подход к задаче полиномиального сглаживания поверхностей от двух переменных бикубической моделью с использованием опорных (реперных) точек поверхности. Рассматривается модель для регрессионной задачи о вычислении в заданной точке  $(x, y)$  оценки  $\hat{F}$  некоторой функции  $F(x, y)$  по ее измеренным значениям  $\{F_i\}$ . Алгоритмы, использующие реперные точки при аппроксимации и сглаживании одномерных функций, рассматривались в работах [3 - 7].

Как известно, сглаживание функций двух и более переменных характеризуется повышенной трудоемкостью и сложностью, в том числе из-за увеличения размерности матрицы системы нормальных уравнений. Это наглядно демонстрируется уже при интерполировании функций двух переменных, которое становится более громоздким по сравнению с интерполированием функции одной переменной.

При использовании полиномиальной модели число коэффициентов, подлежащих определению, заметно растет с увеличением порядка приближения. Известны также трудности, связанные с плохой обусловленностью полиномиальных моделей регрессии для полиномов степени шесть и выше, особенно при равномерном задании узлов, когда регрессионная матрица соответствующей модели становится плохо обусловленной [1, 2]. Для локального сглаживания поверхности мы предлагаем использовать кубическую по каждой переменной модель, в которой одна часть параметров (биквадратная) выбирается на поверхности в виде реперных точек, а другая часть (бикубическая) включает свободные параметры. Такая конструкция модели дает возможность более чем в два раза понизить размерность матрицы системы нормальных уравнений.

Базисные функции предлагаемой бикубической модели зависят от координат узлов 9-точечной прямоугольной реперной сетки и выражаются через одномерные весовые функции 3-точечного кубического сплайна, предложенного в работе [3]. В этом случае мы получаем неполную бикубическую полиномиальную модель (НБМ), в которой коэффициент при  $x^3y^3$  равен нулю. Реперная привязка НБМ к поверхности позволяет ослабить вычислительные трудности, связанные с плохой обусловленностью системы нормальных уравнений при увеличении порядка аппроксимирующего полинома [2], и почти в три раза повысить скорость вычислений. Эти качественные характеристики являются весьма актуальными при использовании модели для решения практических задач, особенно в системах, работающих в реальном времени.

Необходимость в алгоритмах аппроксимации и сглаживания поверхностей возникает в ряде научных и прикладных задач при замене сложной



функциональной зависимости более простой (полиномиальной) для сглаживания экспериментальных данных, в частности, при обработке изображений, исследовании поверхностей отклика [2], при анализе зависимостей магнитных структур и др.

## 1. Бикубические модели с реперной привязкой

### 1.1. НБМ - модель с девятью опорными точками

Рассмотрим представление поверхности, в котором прямоугольная область  $R: a \leq x \leq b; c \leq y \leq d$  делится на прямоугольники  $R_{ij}: x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j$  ( $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M$ ). На каждом таком прямоугольнике определяется поверхность  $F(x, y)$ , совпадающая вдоль каждой из его четырех сторон с одной из заданных кривых  $f_i(x), g_j(y)$ , определенных на отрезках, разбивающих  $R$  на  $R_{ij}$  (представление по Кунсу [1]).

Разделим  $R_{ij}$  на четыре части отрезками вдоль координатных осей и построим 9-точечную сетку (рис. 1а), на которой будем аппроксимировать поверхность  $F(x, y)$ , используя в качестве  $f_i(x)$  и  $g_j(y)$  кубические функции.

Построим модель поверхности, локально аппроксимирующую функцию двух переменных  $F(x, y)$  на 9-точечной сетке  $\Delta_{\mathcal{L}} = \Delta_{\mathcal{L}_u} \times \Delta_{\mathcal{L}_v}$  прямоугольника

$$R_{\mathcal{L}}: \lambda_u \leq u \leq L_u, \lambda_v \leq v \leq L_v, \quad (1)$$

где  $\Delta_{\mathcal{L}_u}: \lambda_u = x_{i_0} - x_0 < x_0 < x_{L_u} - x_0 = L_u$ ,  $\Delta_{\mathcal{L}_v}: \lambda_v = x_{j_0} - x_0 < x_0 < x_{L_v} - x_0 = L_v$ , а  $u = x - x_0, v = y - y_0$ . Пусть в узлах сетки  $\Delta_{\mathcal{L}}$  заданы значения функции  $F_{ij} = F(x_i, y_j), i, j = 1, 2, 3$ . Для упрощения формул перенесем начало координат в точку  $F(x_0, y_0)$ :

$$\phi = F(x - x_0, y - y_0) - F(x_0, y_0) = \phi(u, v).$$

Набор значений функции в узловых точках обозначим через  $\{\phi_{ij}\}$  (рис. 1б), параметры сетки - через  $\Lambda_{uv}: \{\Lambda_u; \Lambda_v\}$ , ( $\Lambda_u = [\lambda_u, L_u], \Lambda_v = [\lambda_v, L_v]$ ), а полный набор координат опорных точек - через  $\mathfrak{R}$  (репер).

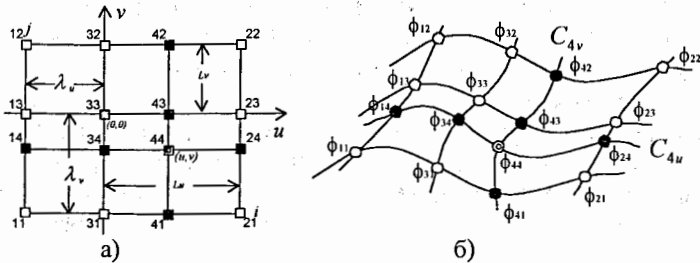


Рис. 1. Выбор узлов и параметров сетки  $\Delta_{\mathcal{L}}$  (а) и схема построения аппроксиманты на поверхности  $z = \phi(u, v)$  (б)

Следуя [3], на опорных точках  $\{\lambda_r, 0, L_r\}$  ( $\tau = u, v$ ) каждой линии сетки можно построить локальный одномерный 3-точечный кубический сплайн (TPS) по переменной  $\tau$ :

$$S_3(\tau; \Lambda_r) = \sum_{i=1}^3 f_i d_i(\tau; \Lambda_r) + \alpha Q(\tau; \Lambda_r), \quad (2)$$

где  $\{f_i\}$  - значения функции в опорных точках,  $\alpha$  - свободный параметр, а  $d_i(\tau; \Lambda_r)$  и  $Q(\tau; \Lambda_r)$  - базисные функции. С учетом параметров сетки  $\Delta_{\mathcal{L}}$  эти функции принимают следующий вид:

$$d_1(\tau; \Lambda_r) = -(\lambda_r H_r)^{-1} \tau(\tau - L_r), \quad d_2(\tau; \lambda_r, L_r) = (L_r H_r)^{-1} \tau(\tau - \lambda_r), \\ d_3(\tau; \lambda_r, L_r) = (\lambda_r L_r)^{-1} (\tau - \lambda_r)(\tau - L_r) \quad \text{и} \quad Q(\tau; \lambda_r, L_r) = \tau(\tau - \lambda_r)(\tau - L_r), \quad (3)$$

где  $H_r = L_r - \lambda_r$  ( $\tau = u, v; i = 1, 2, 3$ ). На рис. 1 приведены основные параметры опорного прямоугольника (а), по которым определяются функции  $d_i(\tau; \Lambda_r)$  и  $Q(\tau; \Lambda_r)$ , а также реперные точки поверхности  $\{\phi_{ij}\}$ , соответствующие узлам  $\Delta_{\mathcal{L}}$  (рис. 1б). Используя (2) и (3), запишем для каждой линии сетки  $\Delta_{\mathcal{L}}$  шесть кубических парабол, проходящих через тройки точек из набора  $\{\phi_{ij}\}$ , в виде

$$C_j(u; \mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^3 \phi_{ij} d_i(u; \Lambda_u) + \alpha_{uj} Q(u; \Lambda_u), \\ C_i(v; \mathfrak{R}) = \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} d_j(v; \Lambda_v) + \alpha_{vi} Q(v; \Lambda_v), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

В этих уравнениях величины  $\{\phi_{ij}\}$  являются фиксированными, а свободные коэффициенты  $\alpha_{uj}$  и  $\alpha_{vi}$  не известны. Формулы (4) можно использовать для вычисления  $\phi(u, v)$  в произвольной точке  $(u, v)$  из области  $R_{\mathcal{L}}$ . Для этого возьмем на каждой кривой из (4) по одной (четвертой) точке  $\phi_{14}, \phi_{34}, \phi_{24}, \phi_{41}, \phi_{43}, \phi_{42}$  (рис. 1б) и, следуя (2), запишем уравнения кубических парабол  $C_{4u}$  и  $C_{4v}$ , проходящих через соответствующие три точки и текущую точку  $(u, v)$ :

$$C_{4u} = \sum_{i=1}^3 C_i(v; \mathfrak{R}) d_i(u; \Lambda_u) + \alpha_{u4} Q(u; \Lambda_u) = \\ = \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} d_j(v; \Lambda_v) + \alpha_{vi} Q(v; \Lambda_v) \right] d_i(u; \Lambda_u) + \alpha_{u4} Q(u; \Lambda_u) = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}) + \sum_{k=1}^3 \alpha_{uk} \omega_k(u, v; \Lambda_{uv}) + \alpha_{u4} Q(u; \Lambda_u) = \\ = S_q(u, v; \mathfrak{R}) + \sum_{k=1}^4 \alpha_{uk} \omega_k(u, v; \Lambda_{uv}),$$

где

$$S_q(u, v; \mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv})$$

представляет биквадратную составляющую  $C_{4u}$  с базисными функциями

$$w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}) = d_i(u; \Lambda_u) d_j(v; \Lambda_v), \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

а бикубическая часть представлена сверткой коэффициентов  $\alpha_{uk}$  с базисными функциями  $\omega_k(u, v; \Lambda_{uv})$ . Аналогичное выражение можно получить и для кривой  $C_{4v}$  по переменной  $v$ . Тогда в качестве приближения для  $\phi(u, v)$  в точке (44) возьмем среднее этих функций. Получим

$$\phi_{44} \cong C(u, v; \mathfrak{R}) = [C_{4u} + C_{4v}] / 2 = S_q(u, v; \mathfrak{R}) + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} (\alpha_{uk} + \alpha_{vk}) \omega_k(u, v; \Lambda_{uv}),$$

где базисные функции  $\omega_k(u, v; \Lambda_{uv})$  выражаются через произведения  $d_i(u; \Lambda_u) Q(v; \Lambda_v)$ ,  $d_i(v; \Lambda_v) Q(u; \Lambda_u)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и функции  $Q(u; \Lambda_u)$ ,  $Q(v; \Lambda_v)$ .

С учетом условий нормировки функций  $d_i$  и  $d_j$  ( $d_3 = 1 - d_1 - d_2$ ), после раскрытия скобок и приведения подобных выражение для  $C(u, v; \mathfrak{R})$  примет вид

$$C(u, v) = \sum_{i,j=1}^3 \phi_{ij} w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}) + \sum_{m=1}^6 \theta_m \omega_m(u, v; \Lambda_{uv}) = S_q(u, v; \mathfrak{R}) + S_c(u, v; \Lambda_{uv}), \quad (5)$$

где  $\theta_m$  - приведенные свободные коэффициенты. Функции  $S_q(u, v; \mathfrak{R})$  и  $S_c(u, v; \Lambda_{uv})$  представляют соответственно биквадратную и бикубическую составляющие аппроксиманты  $C(u, v; \mathfrak{R})$ . Легко видеть, что поверхность (5) является локальным бикубическим сплайном на  $\Delta_{uv}$ , так как в узлах сетки является непрерывной не только функция, но и ее производные.

Рассмотрим особенности базисных функций  $w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv})$  и  $\omega_m(u, v; \Lambda_{uv})$ . Функции  $w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv})$  обладают следующими свойствами:

$$w_{ij}(i', j') = \delta_{ii'} \delta_{jj'} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i' \text{ и } j = j', \\ 0, & \text{если } i \neq i' \text{ и } j \neq j', \end{cases} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}) = 1. \quad (7)$$

Действительно, так как  $\sum_{i=1}^3 d_i(\tau; \Lambda_\tau) = 1$  ( $\tau = u, v$ ), то

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}) = \sum_{i=1}^3 d_i \left( \sum_{j=1}^3 d_j \right) = 1 \sum_{i=1}^3 d_i = 1 \cdot 1 = 1.$$

В силу (6) для  $(i', j')$  одной из девяти точек сетки  $\Delta_{uv}$  справедливо равенство

$$S_q(i', j') = \sum_{i,j} w_{ij}(i', j') \phi_{ij} = \sum_{i,j} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \phi_{ij} = \phi_{i'j'},$$

то есть  $S_q(u, v; \mathfrak{R})$  совпадает с  $\phi(u, v)$  в каждой опорной точке.

Как отмечалось выше, базисные функции  $\omega_m(u, v; \Lambda_{uv})$  определяются через  $d_i(u; \Lambda_u) Q(v; \Lambda_v)$ ,  $d_j(v; \Lambda_v) Q(u; \Lambda_u)$  ( $i, j = 1, 2$ ), функции  $Q(u; \Lambda_u)$ ,  $Q(v; \Lambda_v)$  и

обращаются в нуль в узлах сетки  $\Delta_{uv}$ , т.е.  $\omega_m(u, v_j) = 0$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ). Примеры графиков двух базисных функций приведены на рис. 2.

Так как в базисе  $C(u, v; \mathfrak{R})$  отсутствует член с произведением  $u^3 v^3$ , то (5) представляет *неполную бикубическую модель* (НБМ) поверхности, т.е. она соответствует классической модели полинома двух переменных с 15 коэффициентами и базисом

$$\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, x^3, y^3, xy^3, x^2y^2, x^3y, x^2y^3, x^3y^2\}. \quad (8)$$

Особенность конструкции НБМ состоит в том, что ее 9 параметров (коэффициенты при  $w_{ij}$ ) совпадают со значениями  $\{\phi_{ij}\}$  исследуемой поверхности, а остальные параметры ( $\theta_m$ ) являются *свободными*.

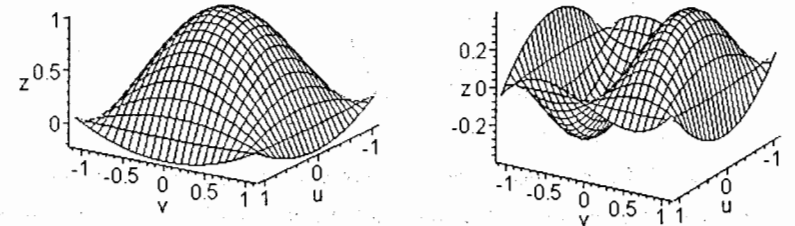


Рис.2. Базисные функции  $w_{33}(u, v; \Lambda_{uv})$  и  $w_4(u, v; \Lambda_{uv})$  для  $\Lambda_{uv} : \{-1, 1; -1, 1\}$ .

Если значения опорных координат заданы без ошибок, то число неизвестных параметров в модели (5) будет почти в два с половиной раза меньше, чем в классической модели бикубического интерполяционного сплайна (КБМ) или *просто дважды кубического сплайна* относительно сетки  $\Delta_{uv} = \Delta_x \times \Delta_y$  [1]:

$$s(x, y) = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j. \quad (9)$$

Полином  $s(x, y)$  интерполирует поверхность в  $ij$ -й ячейке сетки  $\Delta_{uv}$  и зависит от 16 свободных коэффициентов  $a_{\alpha\beta}$ . Использование модели (5) для локального приближения функции  $F(x, y)$  имеет преимущество перед  $s(x, y)$  тогда, когда  $\{\phi_{ij}\}$  заданы с повышенной точностью, а сами опорные точки располагаются в узлах *прямоугольной сетки*  $\Delta_{uv}$ . На практике эти ограничения не слишком жесткие. Они сводятся к выбору узлов реперного прямоугольника и более тщательному измерению опорных точек по сравнению с остальными, чего можно добиться, например, повторными измерениями. Эти требования являются основными ограничениями при работе с НБМ. Следует отметить, что благодаря этим ограничениям, существенно возрастает эффективность процедуры сглаживания, так как размерность матрицы системы нормальных уравнений сокращается более чем в два раза. Это улучшает обусловленность системы, повышает устойчивость и увеличивает скорость вычислений. При решении задачи полиномиальной аппроксимации  $F(x, y)$ , заданной аналитически в прямоугольнике  $R_{uv}$ , модель  $C(u, v; \mathfrak{R})$  может служить удобной

бикубической аппроксимантой, в которой более половины коэффициентов (реперные точки) могут быть вычислены заранее с очень хорошей точностью по значениям  $F(x, y)$  в узлах сетки.

### 1.2. Полная бикубическая модель (БМ)

На прямоугольной сетке с 16 узлами (все точки на рис. 1а) построим полную бикубическую модель (БМ), эквивалентную модели (9), с базисом, отличным от (8) и параметризованную 16 опорными координатами исследуемой поверхности  $z = F(x, y)$ . Обозначим сетку через  $\Delta_{\lambda\mu\nu}$  и выберем в ее узлах опорные точки  $\{\phi_{ij}\}$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ). Геометрический смысл параметров сетки показан на схеме рис. 3.

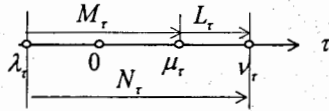


Рис. 3. Параметры сетки  $\Delta_{\lambda\mu\nu}$  для  $m_i(\tau; \Lambda_\tau)$  вдоль одной оси

Используя кубические интерполяционные многочлены Лагранжа, введем параметры  $\lambda_\tau, \mu_\tau, \nu_\tau$  и построим четыре функции в виде

$$\begin{aligned} m_1(\tau; \Lambda_\tau) &= (\lambda_\tau N_\tau M_\tau)^{-1} \tau(\tau - \mu_\tau)(\tau - \nu_\tau), \\ m_2(\tau; \Lambda_\tau) &= -(\mu_\tau M_\tau L_\tau)^{-1} \tau(\tau - \lambda_\tau)(\tau - \nu_\tau), \\ m_3(\tau; \Lambda_\tau) &= (\nu_\tau L_\tau N_\tau)^{-1} \tau(\tau - \lambda_\tau)(\tau - \mu_\tau), \\ m_4(\tau; \Lambda_\tau) &= -(\lambda_\tau \mu_\tau \nu_\tau)^{-1} (\tau - \lambda_\tau)(\tau - \nu_\tau)(\tau - \mu_\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $L_\tau = \nu_\tau - \mu_\tau$ ,  $M_\tau = \mu_\tau - \lambda_\tau$ ,  $N_\tau = \nu_\tau - \lambda_\tau$ , ( $\tau = u, v$ ), а через  $\Lambda_\tau$  обозначен набор чисел  $\Lambda_\tau \equiv \{\lambda_\tau, \mu_\tau, \nu_\tau, L_\tau, M_\tau, N_\tau\}$ .

По аналогии с НБМ определим базисные функции  $w_{ij}$  в виде произведений  $w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}) = m_i(u; \Lambda_u) m_j(v; \Lambda_v)$ . Тогда полная бикубическая модель (БМ) запишется в виде

$$C_{BM} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \phi_{ij} w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv}), \quad (11)$$

где  $\Lambda_{uv} = \{\Lambda_u, \Lambda_v\}$  - параметры сетки  $\Delta_{\lambda\mu\nu}$ .

Как и в случае 9-точечной сетки, легко убедиться, что базисные функции  $w_{ij}(u, v; \Lambda_{uv})$  обладают свойствами (6) и (7).

При точном задании  $\{\phi_{ij}\}$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ) модель (11) является интерполянтном полинома (9). Использование БМ для сглаживания фрагмента поверхности по измеренным точкам  $\{\tilde{F}_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  ( $N \gg 16$ ) при неизвестном репере  $\{\tilde{\phi}_{ij}\}$  более устойчиво по сравнению с классической моделью (9), так как

определитель матрицы системы нормальных уравнений "улучшается" на несколько порядков и вычисление оценок  $\{\hat{\phi}_{ij}\}$  становится более устойчивым.

## 2. Бикубическое сглаживание поверхности

В этом разделе на основе НБМ рассматривается МНК-процедура для локального сглаживания (аппроксимации) поверхностей бикубическими полиномами в области, ограниченной прямоугольником  $R_{\mathcal{L}}$ . На основе численных расчетов сделаны сравнения результатов обработки одних и тех же выборок с использованием моделей  $C(u, v; \mathfrak{R})$  и  $s(x, y)$ , когда  $a_{33} = 0$ .

### 2.1. Регрессионная процедура для НБМ

Рассмотрим задачу сглаживания измеренных на поверхности  $z = F(x, y)$  точек  $\{F_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ( $n \gg 15$ ) с использованием модели (5). Для этого выборка  $\{F_k\}$  должна включать измерения и девяти опорных точек  $\{F_{ij} = F_{ij} + e_{ij}\}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), расположенных вокруг базисной точки  $(0, 0, F_0)$ , в узлах прямоугольной сетки  $\Delta_{\mathcal{L}}$  (1), и искаженных ошибками  $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$ . На основе параметров  $\Lambda_{xy}$  определим  $w_{ij}(x, y; \Lambda_{xy})$ ,  $\omega_m(x, y; \Lambda_{xy})$  и построим "реперную поверхность"  $S_q(x, y; \mathfrak{R})$  в виде

$$S_q(x, y; \mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} w_{ij}(x, y; \Lambda_{xy}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (F_{ij} + e_{ij}) w_{ij}(x, y; \Lambda_{xy}). \quad (12)$$

Отсюда видно, что при сглаживании разности  $Z = F - S_q$  суммой вида

$\sum_{m=1}^6 \theta_m \omega_m(x, y; \Lambda_{xy})$ ,  $x, y \in R_{\mathcal{L}}$  необходимо в эту сумму добавить параметр сдвига  $\theta_0$ , чтобы учесть смещение, вызываемое влиянием ошибок опорных точек ( $e_{ij}$ ) на величину  $S_{qk}$ , которое в  $k$ -й точке, как следует из (12), будет равно

$$e_{\mathfrak{R}k} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{ij} w_{ij}(x_k, y_k; \Lambda_{xy}), \quad x, y \in R_{\mathcal{L}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Следует также отметить, что параметр смещения  $\theta_0$  необходимо учитывать и при отсутствии ошибок в реперных точках, так как модель  $S_c$  может оказаться неадекватной для  $Z = F - S_q$  из-за неудачного выбора параметров сетки.

Пусть  $\mathbf{Z}^T = [F_1 - S_{q1}, \dots, F_n - S_{qn}]$  - вектор, полученный вычитанием из наблюдений  $F_1, F_2, \dots, F_n$  значений  $S_{qk}$ , вычисленных по формуле (12) с репером  $\{F_{ij}\}$  и значениями  $\{w_{ijk}\}$ . Тогда  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z} + \mathbf{e}_{\mathfrak{R}} + \mathbf{e}_F$ , где  $\mathbf{e}_F$  - вектор ошибок выборки  $\{F_k\}$ , а вектор  $\mathbf{e}_{\mathfrak{R}}^T = [e_{r1}, e_{r2}, \dots, e_{rn}]$  порожден сверткой ошибок

реперных точек  $\{e_{ij}\}$  и значений базисных функций  $\{w_{ijk} = w_{ij}(x_k, y_k)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Рассмотрим более подробно поведение ошибок  $e_{ijk}$ . Так как  $\sum_y w_{ijy} = 1$ , то  $|e_{ijk}| \leq e_{r, \max}$  ( $e_{r, \max} = \max_{ij} \{|e_{ij}\}|$ ). Кроме того, при симметричном выборе параметров  $\Lambda_{xy}$  относительно базисной точки  $(x_0, y_0)$ , для  $x, y \in R_{\Delta}$  выполняется условие  $0.4 \leq \sum_{ijk} w_{ijk}^2 \leq 1$ . Поэтому дисперсия для  $e_{ijk}$  не будет превышать  $\sigma_e^2$  (экспериментальная оценка составляет  $\sigma_{ijk}^2 \approx \frac{1}{2} \sigma_e^2$ ).

Рассмотрим процедуру сглаживания выборки  $\{F_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , используя модель (5), в виде

$$Z \equiv F - S_q = (\Theta, \mathbf{B}) + e, \quad (13)$$

где  $\Theta^T = [\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_6]$  - вектор неизвестных параметров,  $\mathbf{B}^T = [1, \omega_1, \dots, \omega_6]$  - базисный вектор, а  $e$  - ошибка.

По измерениям  $n$  ( $n \gg 15$ ) точек на поверхности в прямоугольнике  $R_{\Delta}$ , получим вектор  $\mathbf{Z}$ , вычислим в каждой измеренной точке базисные функции  $\omega_{mk} = \omega_m(x_k, y_k; \Lambda_{xy})$ , построим векторы  $[1, \omega_{m1}, \omega_{m2}, \dots, \omega_{mn}]^T$  и сформируем регрессионную матрицу  $\Omega_{n \times n_p}$  с элементами  $\omega_{mk}$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $m = 1, 2, \dots, n_p - 1$ . Ранг этой матрицы равен  $n_p$  ( $n_p = 7$ , в силу линейной независимости  $\omega_m$ ,  $m = 0, \dots, 6$ ). Получим систему  $n$  уравнений

$$\mathbf{Z} = \Omega \Theta + e$$

и воспользуемся критерием МНК для нахождения оптимальной оценки  $\hat{\Theta}$

$$\sum_{k=1}^n e_k^2 \rightarrow \min_{\Theta}$$

который позволяет записать решение в виде

$$\hat{\Theta} = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T \mathbf{Z}. \quad (14)$$

## 2.2. Пример 1

Для получения рабочих характеристик процедуры сглаживания с использованием НБМ в виде (13) и их сравнения с рабочими характеристиками классической модели (КБМ) (9) мы выбрали фрагмент поверхности, заданной функцией Франке, взятой из пакета Matlab (v5.2.1) (см. рис. 4):

$$\Phi(x, y) = 0.75e^{-(9x-2)^2 - (9y-2)^2 / 4} + 0.75e^{-(9x+1)^2 / 49 - (9y+1)^2 / 10} + 0.5e^{-(9x-7)^2 - (9y-3)^2 / 4} - 0.2e^{-(9x-4)^2 - (9y-7)^2}. \quad (15)$$

В прямоугольнике  $R_{\Delta}$  с параметрами  $x_0 = 0.62, y_0 = 0.2; \lambda_x = -0.15, L_x = 0.25; \lambda_y = -0.25, L_y = 0.25$  генерировалась выборка  $\{F_k = F(x_k, y_k) + e_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

( $n = 100, \sigma_e^2 = .01$ ), и по параметрам сетки формировались координаты репера  $\{F_{ij} = F_{ij} + e_{ij}\}$ , в которых варьировались ошибки  $e_{ij}$ .

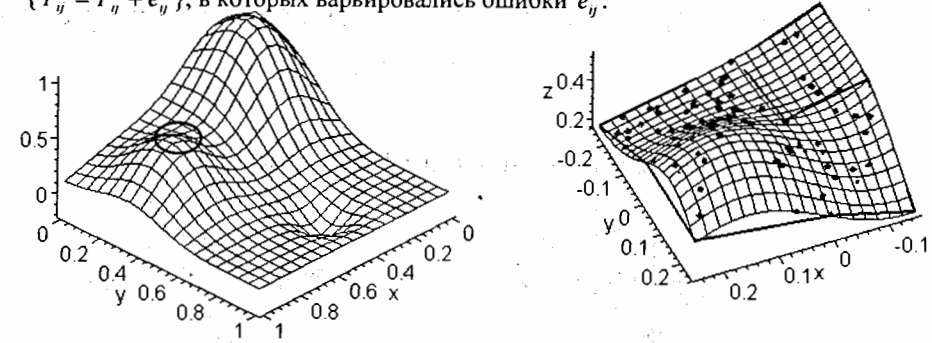


Рис. 4. Поверхность  $\Phi(x, y)$  и ее фрагмент на сетке  $\Delta_{\Delta}$  с точками  $\{F_k\}$

Результаты сглаживания, полученные для НБМ, сравнивались с результатами обработки одних и тех же выборок на основе классической регрессионной модели (КБМ) (9) с 15 параметрами. Для каждой модели вычислялись:

- максимальное отклонение  $r_{\max} = \max_{x, y \in R_{\Delta}} |F - \hat{F}|$ ;
- значение определителя матрицы нормальных уравнений  $\det = \det(\Omega^T \Omega)$ ;
- глобальная относительная ошибка  $r_e$

$$r_e = \sqrt{\sum_{k=1}^n (F_k - \hat{F}_k)^2} / \sqrt{\sum_{k=1}^n F_k^2};$$

- время  $t_R$  (с), затраченное на вычисление  $\hat{\Theta}$  и  $\{\hat{F}_k\}$ ;
- распределение остатков  $r_k$

$$r_k = F_k - (S_{qk} + S_{ck}), \text{ где } S_{ck} = \sum_{m=1}^7 \hat{\theta}_m \omega_m(x_k, y_k).$$

Результаты расчетов приведены на графиках и в таблице Т1.

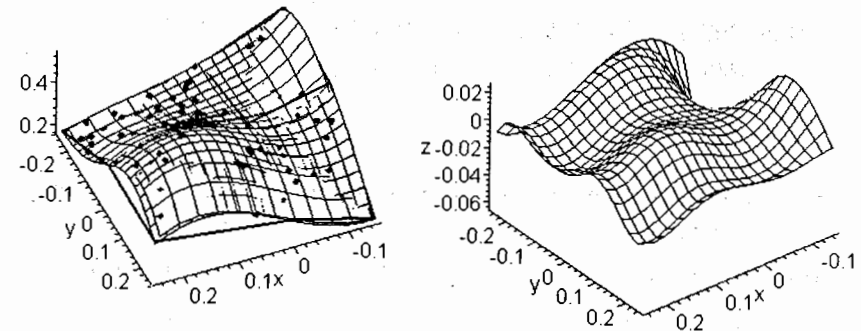


Рис.5. Сглаженный и истинный фрагменты поверхности (слева) и их разность  $F(x, y) - \hat{F}(x, y)$ ,  $x, y \in R_{\Delta}$ .

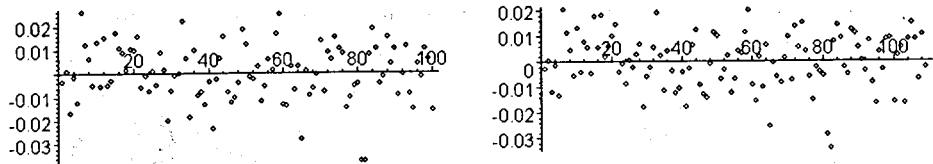


Рис. 6. Графики остатков  $r_k$  для НБМ (слева) и для КБМ

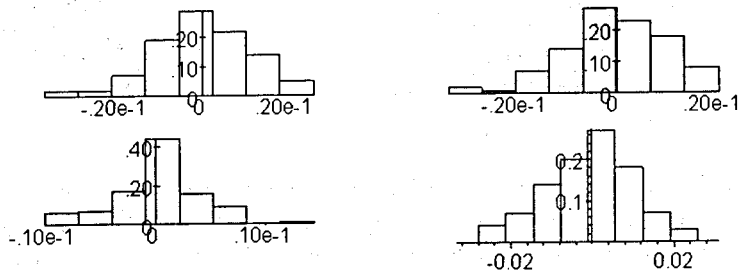


Рис. 7. Гистограммы для остатков  $r_k$  (вверху) и их разность (слева внизу)  
Справа внизу приведена гистограмма входных ошибок  $\{e_k\}$

Таблица Т1

$P_{model}$	$C(u, v; \mathcal{R})$	$s(x, y)$	$p_s / p_c$
$r_{max}$	.027634635	.065944316	<b>2.386</b>
$r_e$	.032342485	.030555841	<b>.94476</b>
$t_R$	1.999	6.046	<b>3.024</b>
$det$	.1124 $10^{-20}$	.2741 $10^{-45}$	<b>2.4 <math>10^{-25}</math></b>

Полиномиальная оценка  $\Phi(x, y)$  в прямоугольнике  $R_{\mathcal{U}}$  равна

$$F(x, y) = .4175140769x + .3960975192y + 153.7570490x^3y^2 + 201.5982904x^2y^3 - 15.47776507x^2y - 2.357156253xy^2 - 21.61381719x^3 - 7.664238316y^3 - 31.29530791x^2y^2 + 7.819547029xy - 18.19242050x^3y - 68.64178532xy^3 + 3.374577403x^2 - 1.424124687y^2 + .3811368802. \quad (16)$$

## 2.2. Пример 2

В таблице Т2 и на рис. 8 - 11 приведены результаты сглаживания полусферы

$$F(x, y) = \sqrt{4 - (x-1)^2 - (y-1)^2}, \quad x, y \in [-1, 1], [-1, 1]$$

с параметрами сетки  $x_0 = 1, y_0 = 1; \lambda_x = -1, L_x = 1; \lambda_y = -1, L_y = 1$  для НБМ и КБМ ( $n = 150, \sigma_e^2 = .03$ ).

Таблица Т2

$P_{model}$	$C(u, v; \mathcal{R})$	$s(x, y)$	$p_s / p_c$
$r_{max}$	.03377820628	.042366500	<b>1.254255470</b>
$r_e$	.01662175319	.016726239	<b>1.006286103</b>
$t_R$	3.180	9.205	<b>2.89465</b>
$det$	.76193 $10^4$	.11439 $10^{13}$	<b>.1501319 <math>10^9</math></b>

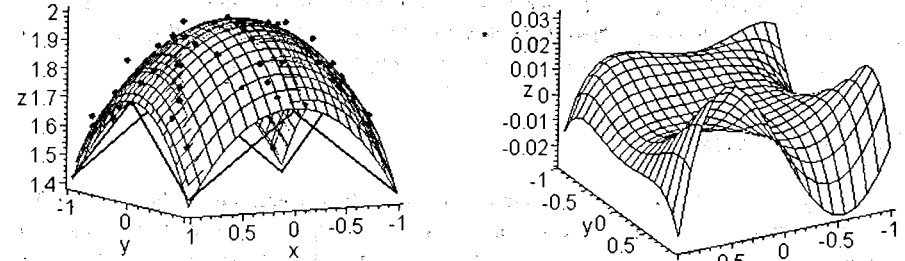


Рис. 8. Наложение истинного и сглаженного фрагментов поверхности сферы (слева) и их разность  $F(x, y) - \hat{F}(x, y), x, y \in R_{\mathcal{U}}$  (для НБМ)

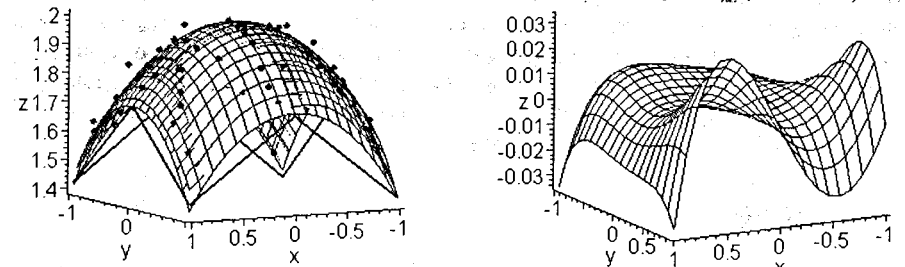


Рис. 9. Наложение истинного и сглаженного фрагментов поверхности сферы (слева) и их разность в  $R_{\mathcal{U}}$  (для КБМ)

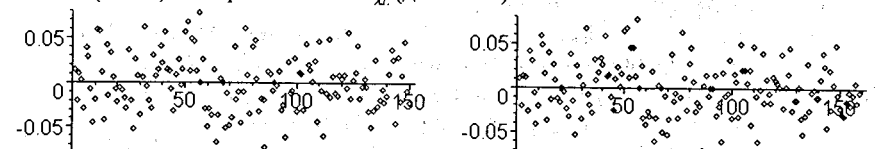


Рис. 10. Графики остатков  $r_k$  для НБМ (слева) и для КБМ

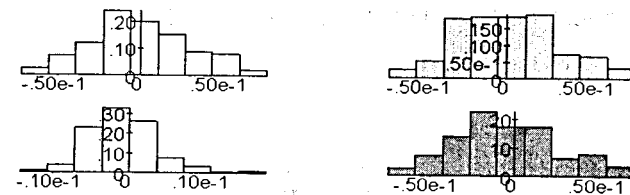


Рис. 11. Гистограммы остатков  $r_k$  для НБМ и КБМ (вверху)



Оценка сглаживающего полинома выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned} F(x, y) = & -0.03073090818 xy^3 - 0.009867930550 xy + 0.03826875230 x^2 y^3 - \\ & 0.03152597740 x^2 y - 0.001729060898 x^3 + 0.003677417398 x + 0.03811583823 x^3 y + \\ & 0.06483166127 x^3 y^2 - 0.05410740427 xy^2 - 0.003670835986 y^3 + 0.006565254986 y + \\ & 2.000586591 - 2.724256710 y^2 - 0.04084875440 x^2 y^2 - 2.603127485 x^2. \end{aligned} \quad (17)$$

По характеру поведения остатков и их гистограммам (рис. 7, 8, 10, 11, слева) можно заключить, что полученные полиномиальные оценки (16) и (17) являются адекватными выбранным фрагментам поверхностей и они могут быть использованы для приближения соответствующих поверхностей в  $R_{\mu}$ .

### 3. Заключение

Полученные выше результаты показали, что предложенный в данной работе подход к построению бикубической модели для сглаживания поверхности с привязкой к ее опорным точкам позволяет существенно повысить скорость и устойчивость вычислений и более чем в два раза сократить размерность матрицы системы нормальных уравнений. Эти качественные характеристики модели являются весьма актуальными и могут быть использованы для разработки алгоритмов глобальной аппроксимации и сглаживания поверхностей. Как и в одномерном случае [7], конструкция предложенной бикубической модели может быть использована также для разработки алгоритмов с режимом адаптации в локальной зоне поверхности.

### Литература

- [1] Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш, Теория сплайнов и ее приложения, Мир, М., 1972. (J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, AP, NY, 1967.)
- [2] G.A.F. Seber, Linear Regression Analysis, John Wiley and Sons, N.Y., 1977. (Дж. Себер, Линейный регрессионный анализ, Мир, М., 1980.)
- [3] N.D. Dikoussar, Comput. Phys. Commun., 99 (1997) 235-254.
- [4] N.D. Dikoussar, Comput. Phys. Commun., 79 (1994) 39-51.
- [5] Cs. Török, N.D. Dikoussar, Comput. & Math. with applications (in print).
- [6] Cs. Török, E5-97-254, Dubna, 1997.
- [7] Н.Д. Дикусар, Сообщение ОИЯИ, P10-99-168, Дубна, 1999.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 августа 1999 года.