

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

94-521

P10-94-521

В.М.Артемов, В.Н.Болотов*, А.Д.Волков, Е.Н.Гущин*,
Г.А.Емельяненко, Б.Ж.Залиханов, А.Ж.Кетикян**,
Е.В.Комиссаров, В.С.Курбатов, И.Н.Семенюк*,
В.З.Сердюк, В.В.Сидоркин, И.Н.Силин, С.В.Ященко

КАЛИБРОВКА СПЕКТРОМЕТРИЧЕСКОГО
МАГНИТА УСТАНОВКИ ИСТРА-М
НА ФИЗИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

*ИЯИ РАН, Троицк

**Ереванский физический институт, Армения

1 Установка ИСТРА-М

Установка ИСТРА была создана для изучения редких распадов π^- - и K^- -мезонов на пучке ускорителя У-70 в Протвино. На ней был получен ряд интересных результатов [1]. В конце 80х — начале 90х годов она подверглась существенной модернизации и далее мы ее называем ИСТРА-М. В 1992 году были проведены два сеанса — февральский (~ 80 магнитных лент) и апрельский (~ 280 магнитных лент). В настоящее время завершен первый этап обработки февральского сеанса — распознавание событий, и начат второй этап — выделение различных каналов распадов K^- -мезонов.

На рисунке 1 показана схема установки.

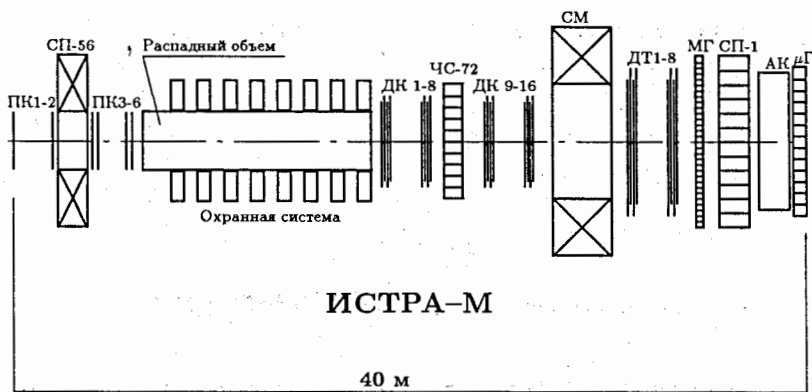


Рис. 1. Общий вид экспериментальной установки ИСТРА-М.

ПК — пропорциональные камеры; СП-56 — пучковый магнит; ДК — дрейфовые камеры; ЧС-72 — черенковский спектрометр; СМ — спектрометрический магнит; ДТ — дрейфовые трубки; МГ — матричный годоскоп; СП-1 — черенковский спектрометр; АК — адронный калориметр; $\mu\Gamma$ — мюонный годоскоп.

Пропорциональные камеры ПК 1-6 и магнит СП-56 предназначены для определения импульса и направления движения первичного K^- -мезона; распадный объем определяет область, в которой происходит поиск вершин распадов; черенковский спектрометр полного поглощения СП-1 служит для определения энергий и координат γ -квантов и идентификации вторичных заряженных частиц; охранная система и спектрометр ЧС-72 служат для регистрации γ -квантов, не попадающих в СП-1. Плоскости дрейфовых камер ДК 1-14 и дрейфовых трубок ДТ 1-8 предназначены для регистрации треков заряженных вторичных частиц и для нахождения их импульсов путем измерения отклонений треков в поле большого спектрометрического магнита СМ; матричный годоскоп МГ служит для пространственной идентификации X и Y проекций треков вторичных частиц; остальные детекторы (адронный калориметр АК, мюонный годоскоп $\mu\Gamma$) после магнита служат для идентификации типа частиц.

2 Мотивировка

2.1 Спектрометр импульсов заряженных частиц

Основной компонентой спектрометра импульсов заряженных частиц установки ИСТРА-М является магнит, конструкция которого описана в работе [2]. Индукция магнитного поля в центре рабочего объема — 9.5 кГс. На рис. 2 схематично показана геометрия расположения различных частей спектрометра.

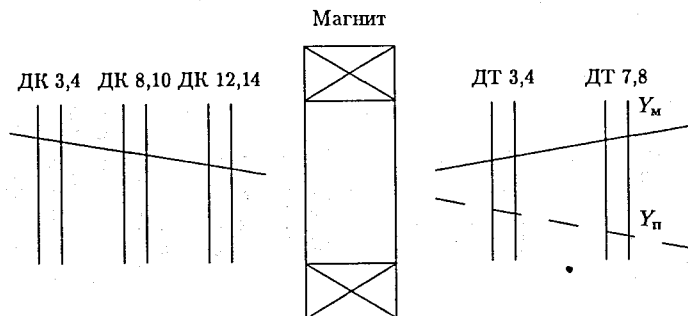


Рис. 2. Магнитный спектрометр установки ИСТРА-М.

Траектория частицы до магнита измеряется системой дрейфовых камер ДК. Далее предполагается магнит, а за ним — система дрейфовых трубок ДТ для измерения траектории после магнита. На рисунке изображены только Y-плоскости камер и трубок, которые служат для измерения отклонения частиц в поле магнита. Поясним, что мы будем понимать под передаточной функцией магнита. В работе [3] предложен простой метод вычисления импульса в магнитных спектрометрах. Основная идея метода — поиск оценки импульса с использованием соотношения

$$\Theta_{yz} = \lambda \cdot f(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \lambda), \quad (1)$$

где Θ_{yz} — угол отклонения частицы в плоскости, перпендикулярной „главной” компоненте магнитного поля (компонента, для которой $\int B_c(x, y, z) dz = \max$, где $c = x, y$ или z), λ — обратный импульс со знаком, f — непрерывно-дифференцируемая функция переменных в скобках, x_0, y_0, x'_0, y'_0 — x - и y -координаты и производные координат по z частицы до магнита при заданной z -координате.

Функция f может быть записана в виде разложения в ряд Тейлора по переменным $x_0, y_0, x'_0, y'_0, \lambda$. Количество удерживаемых членов и сами члены определяются эмпирически, судя по тому, как они влияют на точность оценки импульса.

Под передаточной функцией магнита здесь и далее будем понимать функцию f в представлении

$$Y_{\text{откл}} = Y_M - Y_P = \lambda \cdot f(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \lambda), \quad (2)$$

где Y_M — координата частицы на плоскости ДТ после магнита, Y_P — координата на той же плоскости в предположении отсутствия магнитного поля (см. рис. 2).

2.2 Проблемы восстановления импульса заряженных частиц

При восстановлении импульса заряженных частиц с использованием карты магнитного поля могут возникнуть различные трудности. Они связаны, во-первых, со сложностью геометрической привязки магнита к координатным детекторам установки. Углы поворота частиц небольшие (для частиц с импульсом 10 ГэВ около 1.5° при интеграле поля ~ 1 Тл/м), поэтому даже незначительная ошибка в привязке может привести к неожиданным результатам.

Во-вторых, необходим контроль за условиями эксперимента, в частности, за током магнита. На установке ИСТРА-М в 1991 году были проведены магнитные измерения, которые описаны в работе [4]. В февральском сеансе 1992 года ток магнита отличался от тока, установленного в процессе магнитных измерений, на 5%. Поэтому возникла необходимость провести калибровку магнита (найти его передаточную функцию) без использования карты магнитного поля, например, по калибровочному физическому процессу. В качестве калибровочного процесса для нахождения передаточной функции магнита был выбран распад $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$.

3 Метод

Идея метода состоит в следующем:

1. Из имеющегося экспериментального материала (февральский сеанс 1992 года) отобрать события распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$.
2. Провести кинематический фит (гипотеза распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$) без использования информации об абсолютном значении импульсов заряженных частиц.
3. Полученные в результате фита оценки импульса использовать для нахождения передаточной функции магнита.

3.1 Отбор событий распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$

Февральский сеанс 1992 года — это первый сеанс, в котором работали практически все детекторы установки ИСТРА-М. В февральском сеансе набор событий проводился в условиях так называемого „мягкого” триггера, когда практически все события регистрировались. Для регистрации события необходимым условием являлся только факт распада K^- -мезона, а также наличие хотя бы одного ливня в СП-1. При отборе распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ использовались следующие критерии:

- Строилось распределение эффективных масс двух γ -квантов. Для этого находились векторы направлений γ -квантов, началом которых является вершина распада, а концами — координаты γ -квантов в СП-1 (рис. 1). Вычислялось значение эффективной массы: $m_{\gamma\gamma}^2 = 2E_1 E_2 (1 - \vec{n}_1 \vec{n}_2)$, где E_1, E_2 — энергии γ -квантов, \vec{n}_1, \vec{n}_2 — их направляющие векторы. Типичное распределение по эффективной массе для событий с двумя γ -квантами показано на рис. 3а. Для кинематического анализа отбирались события в диапазоне эффективных масс $105 \text{ МэВ} < m_{\gamma\gamma} < 165 \text{ МэВ}$.
- Проводился отбор на компланарность. Как известно, в двухчастичном распаде векторы направлений участвующих частиц должны лежать в одной плоскости. По направлениям γ -квантов из законов сохранения находилось направление π^0 -мезона. Затем вычислялось векторное произведение направляющего вектора π^0 -мезона на направляющий вектор π^0 -мезона и строилось распределение величины проекции направления K^- -мезона на это векторное произведение A_{π} (см. рис. 3б). Для кинематического фита отбирались события, для которых величина проекции A_{π} лежала в пределах $-0.001 < A_{\pi} < 0.001$.

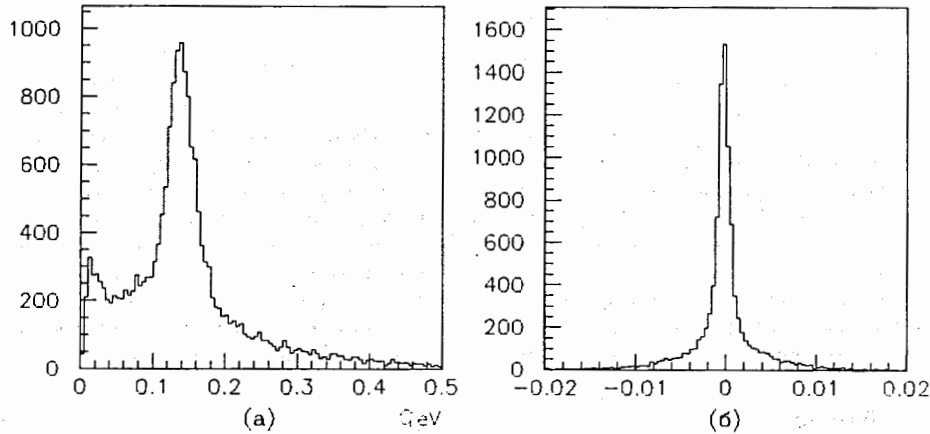


Рис. 3. Распределения: (а) — по эффективной массе 2-х γ -квантов, (б) — критерий компланарности.

- Проводился отбор по χ^2 после фита. На χ^2 накладывалось обрезание $P(\chi^2) > 1\%$.

Также проводилась идентификация вторичных частиц с использованием информации об энерговыделении в СП-1.

- Если имелся отклик в мюонном годоскопе, то такая вторичная заряженная частица идентифицировалась как мюон.
- В случае, если энерговыделение в СП-1 в пределах двух ошибок по энергии равнялось импульсу заряженной частицы, вычисленному по карте магнитного поля, то данная частица идентифицировалась как электрон.
- Если энерговыделение в СП-1 было меньше 1 ГэВ, то такая частица с большой вероятностью является мюоном, поэтому считалось, что данная частица не является π^- -мезоном.

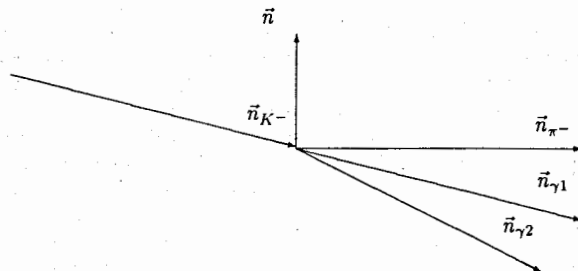


Рис. 4. Направления частиц в распаде $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$.

На модельных данных было исследовано влияние этих критериев на распад $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ и на каждый из наиболее вероятных фоновых распадов. Результаты исследований приведены в таблице 1.

Распад	Частоты распада	Геом. эф.	Эф. масса +компл.	χ^2 -крит.	Порог на СП-1	Отбор элек.	Сумм. отбор
$K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$	0.212	0.082	0.987	0.95	0.63	0.97	$1.0 \cdot 10^{-2}$
$K^- \rightarrow \mu^- \nu \pi^0$	0.032	0.083	0.218	0.42	0.01		$2.4 \cdot 10^{-6}$
$K^- \rightarrow e^- \nu \pi^0$	0.048	0.059	0.204	0.43		0.05	$1.2 \cdot 10^{-5}$
$K^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \pi^0$	0.017	0.107	0.118	0.02	0.63	0.97	$2.3 \cdot 10^{-6}$

3.2 Кинематический фит

При проведении кинематического фита использовался новый подход к системе обработки данных, предложенный в работах [5], [6]. Он состоит в следующем: на первой стадии проводится распознавание события, т. е. ассоциация измеренных координат в событие, а на второй производится кинематическая идентификация события с использованием непосредственно измеренных координат. В этом случае не происходит потери первичной информации. В таком подходе минимизируемый функционал имеет вид

$$M = \sum_{i,j} (C_i(\vec{X}) - C_i^m) G_{ij}^{-1} (C_j(\vec{X}) - C_j^m), \quad i, j = 1 \div nf, \quad (3)$$

$$f_\lambda(\vec{X}) = 0, \quad \lambda = 1 \div nc.$$

Здесь C_i^m — найденные на стадии распознавания координаты, G_{ij}^{-1} — их ковариационная матрица (весовая матрица), \vec{X} — вектор искомых параметров (углы, импульсы, координаты вершин...), $C_i(\vec{X})$ — „истинные“, т. е. искомые значения координат, которые являются известными функциями параметров, $f_\lambda(\vec{X})$ — уравнения связи, nf — количество координат, nc — число связей.

В работе [7] предложен новый, более устойчивый, алгоритм минимизации функционалов типа (3) со связями. В отличие от метода множителей Лагранжа, обычно используемого при минимизации таких функционалов, имеется возможность рассматривать связи не только типа равенств, но и типа неравенств.

В работе [8] предложен новый метод минимизации регулярных функций с ограничениями на область изменения параметров. Авторами написана новая программа минимизации FUMIVI (не путать с FUMILI). Эта программа использовалась в кинематическом фите.

В нашем случае проводился кинематический фит с учетом информации о координатах K^- -мезона (отсчеты на пропорциональных камерах (рис.1)), π^- -мезона (отсчеты на дрейфовых камерах), двух γ -квантов (координаты ливней в СП-1), об энергии γ -квантов. Информация о координатах π^0 -мезона после магнита (отсчеты на дрейфовых трубках) при кинематическом фите не использовалась. Из законов сохранения имеем 4 уравнения для распада K^- -мезона и 4 уравнения для распада π^0 -мезона на 2 γ -кванта. Неизмеряемыми параметрами являются абсолютная величина импульса K^- -мезона, π^- -мезона и, естественно, 3 направляющих вектора π^0 -мезона. Имеем $8 - 5 = 3$ уравнения связи, т. е. 3С фит.

3.3 Оценка разрешения трековых детекторов

На установке ИСТРА-М имеется несколько различных типов координатных детекторов: пропорциональные камеры, дрейфовые камеры и дрейфовые трубки, черенковский спектрометр полного поглощения СП-1.

3.3.1 Пропорциональные камеры

Пропорциональные камеры — дискретный прибор, поэтому координатное разрешение определяется расстоянием между проволочками. Расстояние между проволочками $d = 0.11$ см. Координатное разрешение пропорциональных камер:

$$\sigma_{\text{пк}} = d/\sqrt{12}.$$

Ввиду того, что иногда имела место кластерность регистрации координат, средняя ошибка была на $\sim 10 \div 20\%$ больше.

3.3.2 Черенковский спектрометр полного поглощения

В работе [9] описан черенковский спектрометр полного поглощения (СП-1) и приведены его точностные характеристики. Координатное разрешение СП-1:

$$\sigma_{\text{коор}} = 2 \div 3 \text{ мм.}$$

Энергетическое разрешение СП-1:

$$\sigma\left(\frac{\Delta E}{E}\right) = 0.045 + 0.08/\sqrt{E}.$$

3.3.3 Дрейфовые камеры и дрейфовые трубки

В работе [10] описан метод калибровки трековых детекторов в предположении равноточности каждой камеры. Легко обобщить этот метод на случай, когда каждый детектор имеет различное разрешение.

Пусть имеется n измерений прямолинейного трека.

$$x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m, \quad z_1^m, z_2^m, \dots, z_n^m.$$

Функционал для нахождения коэффициентов прямой линии:

$$\sum_{j=1}^n [(A + Bz_j) - x_j^m]^2 = \min. \quad (4)$$

Минимуму функционала (3) соответствуют следующие значения A и B :

$$A = \sum_{j=1}^n x_j^m \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{(\sum z_k^2) - z_j(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\}, \quad B = \sum_{j=1}^n x_j^m \left\{ \frac{z_j - \frac{1}{n}(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\}. \quad (5)$$

Каждая координата x_j^m может быть представлена в виде

$$x_j^m = x_j^c + \varepsilon_j,$$

где x_j^c — „истинная“ координата прямолинейного трека, а ε_j — случайное смещение. Мы предполагаем, что оно носит гауссовский характер со свойствами

$$\langle \varepsilon_j \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_j^2 \rangle = \sigma_j^2,$$

где σ_j — искомая точность трековой камеры. Измеряемый сигнал Δx_j для каждой камеры:

$$\Delta x_j = x_j^m - (A + Bz_j) = x_j^m - x_j^c, \quad x_j^c = A + Bz_j. \quad (6)$$

Формулы (5) представим в виде

$$A = \sum_{j=1}^n x_j^m \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{(\sum z_k^2) - z_j(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{(\sum z_k^2) - z_j(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\} = A^{\text{ист}} + \delta A, \quad (7)$$

$$\delta A = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{(\sum z_k^2) - z_j(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\}, \quad B = B^{\text{ист}} + \delta B, \quad \delta B = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left\{ \frac{z_j - \frac{1}{n}(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\}.$$

Тогда

$$x_j^c = (A^{\text{ист}} + \delta A) + (B^{\text{ист}} + \delta B)z_j = [A^{\text{ист}} + B^{\text{ист}}z_j] + \delta A + \delta Bz_j.$$

Выражение для сигнала Δx_j :

$$\Delta x_j = x_j^m - x_j^c = x_j^{\text{ист}} + \varepsilon_j - x_j^{\text{ист}} - \delta A - \delta Bz_j = \varepsilon_j - \delta A - \delta Bz_j = \quad (8)$$

$$= \varepsilon_j - \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{(\sum z_k^2) - z_l(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\} - z_j \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \left\{ \frac{z_l - \frac{1}{n}(\sum z_k)}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2} \right\} = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l A_{lj},$$

$$1 - \frac{\frac{1}{n}[(\sum z_k^2) - z_j(\sum z_k)] + z_j[z_j - \frac{1}{n}(\sum z_k)]}{\sum z_k^2 - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2}, \quad j = l,$$

$$A_{lj} =$$

$$-\frac{\frac{1}{n}[(\sum z_k^2) - z_l(\sum z_k)] + z_j[z_l - \frac{1}{n}(\sum z_k)]}{(\sum z_k^2) - \frac{1}{n}(\sum z_k)^2}, \quad j \neq l. \quad (9)$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений:

$$\Delta x_j = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l A_{lj}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Далее усредняем по совокупности событий, где повторяются одни и те же номера j :

$$E(\Delta x_j) = 0, \quad E(\Delta x_j^2) = \sum_{l=1}^n (\varepsilon_l^2) A_{lj}^2 = \sum_{l=1}^n \sigma_l^2 A_{lj}^2. \quad (11)$$

Следующий этап — суммирование по разным номерам j , то есть просто суммирование соответствующих членов уравнений. В результате мы приходим к системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum \Delta x_1^2 &= \sum_{l=1}^n \sigma_l^2 (\sum A_{l1}^2), \\ \sum \Delta x_2^2 &= \sum_{l=1}^n \sigma_l^2 (\sum A_{l2}^2), \\ &\vdots \\ \sum \Delta x_n^2 &= \sum_{l=1}^n \sigma_l^2 (\sum A_{ln}^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Смысл выражений в (12): $\sum A_{lj}^2$ — это суммирование от всех событий, где сработала j -я камера.

3.4 Учет многократного кулоновского рассеяния

3.4.1 Построение кулоновской и полной ковариационной матрицы многократного рассеяния для электронных экспериментов

Поиск кинематических параметров заряженных частиц осуществляется на основе измеренных координат точек вдоль треков событий в пространстве установки. Это, как правило, связано с минимизацией функции правдоподобия, вид которой определяется гипотезой о параметрах частиц, а также математической моделью, связывающей измеренные координаты с указанными параметрами на основе учета всей совокупности априорной информации о движении частиц в физической установке. Наиболее полно, как известно, вопрос о построении функции правдоподобия с учетом множественных случайных факторов, например, многократного кулоновского рассеяния, был изучен для детекторов типа пузырьковых камер. В частности, в работах [11], [12] была построена функция правдоподобия для пузырьковых камер. Воспользуемся следующим видом функции правдоподобия [13], [14]:

$$L = (2\pi)^{-N/2} |C|^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \Delta Y \cdot C^{-1} \cdot \Delta Y^T\right], \quad (13)$$

$$\text{где } \Delta Y = Y - \langle Y \rangle \quad (14)$$

вектор случайных отклонений измеренных координат точек на треке, $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$, $\langle Y \rangle$ — вектор средних значений для Y ,

$$C = \Sigma_{\text{кул}} + \Sigma_{\text{изм}}, \quad C^{-1} = (\Sigma_{\text{кул}} + \Sigma_{\text{изм}})^{-1}, \quad (15)$$

где $\Sigma_{\text{кул}} + \Sigma_{\text{изм}}$ — полная ковариационная матрица, $\Sigma_{\text{кул}}$ — ковариационная матрица кулоновского рассеяния, $\Sigma_{\text{изм}}$ — матрица аппаратных погрешностей.

$$\Sigma_{\text{кул}} + \Sigma_{\text{изм}} = G(A + G^{-1} \cdot \Sigma_{\text{изм}} \cdot G^{-T})G^T. \quad (16)$$

Здесь

$$\Sigma_{\text{кул}} = G \cdot A \cdot G^T, \quad (17)$$

$G = (E_{\Delta} \cdot D_s \cdot E_{\Delta})$, $G^{-1} = (E_{\Delta} \cdot D_s \cdot E_{\Delta})^{-1}$, $D_s = \text{diag}(\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_N)$, $\Sigma_{\text{изм}} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2)$, E_{Δ} — нижняя треугольная матрица:

$$E_{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

A — трехдиагональная матрица:

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2(\tilde{\gamma}_0^2 + \tilde{\gamma}_1^2) & \gamma_1^2 & & & & & \\ \tilde{\gamma}_1^2 & 2(\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2) & \tilde{\gamma}_2^2 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & \tilde{\gamma}_{N-2}^2 & 2(\tilde{\gamma}_{N-2}^2 + \tilde{\gamma}_{N-1}^2) & \tilde{\gamma}_{N-1}^2 & & \\ & & & \tilde{\gamma}_{N-1}^2 & 2(\tilde{\gamma}_{N-1}^2 + \tilde{\gamma}_N^2) & & \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\text{где } \tilde{\gamma}_i^2 = \gamma_i^2 \Delta s_i, \quad \tilde{\gamma}_0^2 = 0, \quad \gamma_i^2 = \frac{(21.2)^2}{2} \cdot \frac{1}{X_{\text{рад}}^{(i)}} \cdot \frac{E_{i+1} E_i}{(P_{i+1} P_i)^2}, \quad (20)$$

$X_{\text{рад}}^{(i)}$ — радиационная длина i -го элементарного рассеивателя, E_i, E_{i+1} и P_i, P_{i+1} — энергия и импульс частицы в начале и в конце i -го элементарного участка соответственно, Δs_i — длина участка.

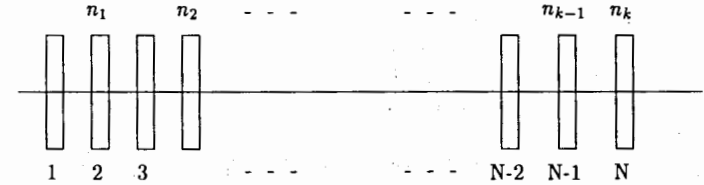


Рис. 5. Разбиение пространства установки на элементарные рассеиватели.

Для построения полной ковариационной матрицы многократного кулоновского рассеяния для электронных установок типа ИСТРА-М воспользуемся результатами работ [11], [15]. В этих работах пространство установки разбивалось на элементарные рассеиватели, каждый из которых может характеризоваться своей радиационной длиной. Типичные рассеиватели — это воздух в пространстве установки, входные окна пропорциональных и дрейфовых камер, газовые смеси в камерах, сигнальные и потенциальные проволоки, различные детекторы на пути частицы и т.д. В каждом из элементарных рассеивателей, представляющем собой однородную среду, кулоновское рассеяние может быть описано распределением Ферми. В работе [16] было получено факторизованное представление матрицы кулоновского рассеяния (оно имеет вид (17)) в фермиевском приближении в предположении, что в каждом из элементарных рассеивателей имелись реальные измерения. Другими словами, частица как бы проходит через N элементарных рассеивателей (как показано на рис. 5).

Однако в реальном эксперименте измерения имеются не во всех N элементарных рассеивателях, а только в некоторых из них. Обозначим, например, n_1, n_2, \dots, n_k — номера элементарных рассеивателей, на которых имеются измерения (рис. 5).

Чтобы перейти от функции правдоподобия (13) в пространство измеренных точек, нужно произвести свертку по тем элементарным слоям, где измерения отсутствовали. Для этого перейдем к распределению величин $\Delta \hat{Y} = (\Delta \hat{Y}_1, \Delta \hat{Y}_2, \dots, \Delta \hat{Y}_k)$, где $\Delta \hat{Y}_i$ — отклонение на n_i -слое:

$$\Delta \hat{Y} = \tilde{E} \cdot \Delta Y, \quad (21)$$

где ΔY есть (14), а матрица \tilde{E} имеет вид

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

\tilde{E} , очевидно, — прямоугольная матрица, число строк которой равно количеству измеренных точек k , а число столбцов — количеству элементарных слоев N . Естественно, $k < N$. Элементы i строки и n_i столбца — единицы, остальные — нули. Легко показать, что матрица \tilde{E} есть матрица полного ранга (ранг матрицы равен k). Следовательно, на основании известной теоремы (2.4.4 [17]) из статистической теории распределение случайных величин $\Delta \hat{Y}$ является нормальным с нулевым средним и дисперсионной матрицей:

$$\hat{\Sigma}_{\text{кул}} = \tilde{E} \cdot \Sigma_{\text{кул}} \cdot \tilde{E}^T = (\tilde{E} \cdot E_{\Delta} \cdot D_s \cdot E_{\Delta}) A (\tilde{E} \cdot E_{\Delta} \cdot D_s \cdot E_{\Delta})^T. \quad (23)$$

Перемножив указанные матрицы, можно получить явный вид матрицы $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ для вектора $\Delta \hat{Y}$ (21).

3.4.2 Факторизованное представление кулоновской и полной ковариационной матрицы

В представлении $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ (23) входят, как видим, прямоугольные и квадратные матрицы. Выполнив формально все перемножения матриц в (23), получим квадратную матрицу размера $[k \times k]$. Дальнейшая работа с $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ возможна, очевидно, только в численном виде. Однако в силу полуположительности определенности матрицы $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ использование ее в численных расчетах может приводить к численной неустойчивости [18]. Чтобы избежать накопления излишних вычислительных погрешностей при промежуточных вычислениях и обеспечить тем самым численную устойчивость результатов, ниже в этом разделе будет показано, как аналитически выполнить переход от представления $\Sigma_{\text{кул}}$ (17) к представлению $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ вида (23). Будем искать представление матрицы $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ в виде

$$\hat{\Sigma}_{\text{кул}} = (\hat{E}_{\Delta} \cdot \hat{D}_s \cdot \hat{E}_{\Delta}) \hat{A} (\hat{E}_{\Delta} \cdot \hat{D}_s \cdot \hat{E}_{\Delta})^T, \quad (24)$$

где все матрицы, входящие в (24), являются уже квадратными. При этом \hat{E}_{Δ} имеет вид (18), $\hat{D}_s = \text{diag}(\sum_{i=1}^{n_1} \Delta s_1, \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \Delta s_2, \dots, \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \Delta s_N)$, \hat{A} должна иметь трехдиагональную форму типа (19).

Для этого запишем матрицу $\hat{\Sigma}$ с учетом (17) в виде:

$$\hat{\Sigma} = \hat{G}(\hat{G}^{-1}(\hat{E} \cdot E_{\Delta} \cdot D_s \cdot E_{\Delta})A(\hat{E} \cdot E_{\Delta} \cdot D_s \cdot E_{\Delta})^T \hat{G}^{-T})\hat{G}^T = \hat{G} \cdot \hat{A} \cdot \hat{G}^T, \quad \text{где } \hat{G} = \hat{E}_{\Delta} \cdot \hat{D}_s \cdot \hat{E}_{\Delta}. \quad (25)$$

Перемножив матрицы в квадратных скобках, получим явный вид матрицы \hat{A} :

$$\begin{aligned} \hat{A}(k, k) &= 2 \left\{ \frac{1}{S_{k-1}^2} \sum_{i=n_{k-2}+1}^{n_{k-1}} \gamma_i \left((S_{k-1} - \sum_{j=i}^{n_{k-1}} \Delta s_j)^2 + (S_{k-1} - \sum_{j=i}^{n_{k-1}} \Delta s_j)(S_{k-1} - \sum_{j=i+1}^{n_{k-1}} \Delta s_j) + \right. \right. \\ &\left. \left. (S_{k-1} - \sum_{j=i+1}^{n_{k-1}} \Delta s_j)^2 \right) + \frac{1}{S_k^2} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \gamma_i \left((\sum_{j=i}^{n_k} \Delta s_j)^2 + (\sum_{j=i}^{n_k} \Delta s_j)(\sum_{j=i+1}^{n_k} \Delta s_j) + (\sum_{j=i+1}^{n_k} \Delta s_j)^2 \right) \right\}, \\ \hat{A}(k, k-1) &= \frac{1}{S_{k-1}^2} \sum_{i=n_{k-2}+1}^{n_{k-1}} \gamma_i \left(2(S_{k-1} - \sum_{j=i}^{n_{k-1}} \Delta s_j)(\sum_{j=i}^{n_{k-1}} \Delta s_j) + (S_{k-1} - \sum_{j=i+1}^{n_{k-1}} \Delta s_j)(\sum_{j=i}^{n_{k-1}} \Delta s_j) \right. \\ &\left. + (S_{k-1} - \sum_{j=i}^{n_{k-1}} \Delta s_j)(\sum_{j=i+1}^{n_{k-1}} \Delta s_j) + 2(S_{k-1} - \sum_{j=i+1}^{n_{k-1}} \Delta s_j)(\sum_{j=i+1}^{n_{k-1}} \Delta s_j) \right), \\ \hat{A}(k-1, k) &= \hat{A}(k, k-1), \quad S_k = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \Delta s_i. \quad (26) \end{aligned}$$

Итак, как нетрудно убедиться численно и аналитически, $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ (24) совпадает с $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ (23). При этом факторизация $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ (24) совпадает с факторизацией $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ (17).

С учетом $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ (24) полную ковариационную матрицу $\hat{C} = \hat{\Sigma}_{\text{кул}} + \hat{\Sigma}_{\text{изм}}$ по аналогии с (15) можно записать в виде

$$\hat{\Sigma}_{\text{кул}} + \hat{\Sigma}_{\text{изм}} = \hat{G}(\hat{A} + \hat{G}^{-1} \cdot \hat{\Sigma}_{\text{изм}} \cdot \hat{G}^{-T})\hat{G}^T. \quad (27)$$

Весовая же матрица \hat{C}^{-1} , обратная к \hat{C} , имеет вид

$$\hat{C}^{-1} = \hat{G}^{-T}(\hat{A} + \hat{G}^{-1} \cdot \hat{\Sigma}_{\text{изм}} \cdot \hat{G}^{-T})^{-1}\hat{G}^{-1}. \quad (28)$$

Матрица \hat{G} — произведение простых матриц $(\hat{E}_{\Delta} \cdot \hat{D}_s \cdot \hat{E}_{\Delta})$, обращение которых легко найти аналитически. Матрица $(\hat{A} + \hat{G}^{-1} \cdot \hat{\Sigma}_{\text{изм}} \cdot \hat{G}^{-T})$ — блочно-трехдиагональная.

В работах [18], [19] были изучены свойства блочно-трехдиагональных и им обратных матриц и разработаны устойчивые процедуры их обращения. Поэтому обращение матрицы $(\hat{A} + \hat{G}^{-1} \cdot \hat{\Sigma}_{\text{изм}} \cdot \hat{G}^{-T})$ не представляет особого труда.

3.4.3 Моделирование многократного кулоновского рассеяния

Задача моделирования многомерных случайных гауссовских векторов ξ , имеющих ковариационную матрицу Σ , может быть решена различными способами. Самый простой и красивый способ — найти матрицу B перехода к вектору

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N) \quad (29)$$

— совокупности независимых стандартно-нормальных случайных величин. Для нахождения этой матрицы используют методы разложения матрицы Σ , например метод Холецкого (см. [20]). При моделировании векторов, ковариационные матрицы которых имеют особенности (к таким относятся кулоновские матрицы), могут возникнуть различные трудности. Одна особенность кулоновской матрицы — ее плохая обусловленность. Другая особенность кулоновской матрицы — положительность коэффициентов корреляции. Для моделирования векторов с такими матрицами разработаны [20] более сложные методы, например, метод повторения. В нашем случае удалось применить значительно более простой способ, связанный с видом факторизованного представления кулоновской матрицы (24):

$$\hat{\Sigma}_{\text{кул}} = \hat{G} \cdot \hat{A} \cdot \hat{G}^T,$$

где \hat{A} — трехдиагональная матрица (26). Для матрицы \hat{A} существует [18], [19] устойчивая процедура разложения $\hat{A} = L \cdot \Lambda \cdot L^T$, при которой не происходит потери точности и не нарушается положительность коэффициентов корреляции в $\hat{\Sigma}_{\text{кул}}$ (24). Имеем:

$$\hat{\Sigma}_{\text{кул}} = (\hat{G} \cdot L \cdot \sqrt{\Lambda})(\hat{G} \cdot L \cdot \sqrt{\Lambda})^T.$$

Матрица B имеет вид $B = (\hat{G} \cdot L \cdot \sqrt{\Lambda})$. Вектор отклонений за счет кулоновского рассеяния ΔY примет вид

$$\Delta Y = B \cdot \eta,$$

где η — вектор (29).

Отклонения за счет измерительных ошибок разыгрываются независимо для каждого измерения.

3.5 Исследование метода на модельных данных

Для доказательства корректности использования оценок импульса, полученных в результате фита, для нахождения передаточной функции магнита проводилось исследование свойств этих оценок на модельных данных. Был сгенерирован файл событий распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ по фазовому объему с учетом точной геометрии установки ИСТРА-М, эффективности и разрешения всех ее детекторов. Монте-Карло программа позволяет моделировать все существующие распады K^- -мезона с одной заряженной вторичной частицей. Распадная точка разыгрывалась равномерно вдоль длины трубы. В файл записывались координаты K^- -мезона, π^- -мезона, двух γ -квантов, 4-импульсы участвующих частиц, координаты вершины распада. При моделировании координат π^- -мезона после магнита использовалась передаточная функция, полученная с использованием карты магнитного поля. Моделирование проводилось с учетом многократного кулоновского рассеяния. Для дальнейшего анализа было смоделировано 2500 событий распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$. Для смоделированных данных проводился кинематический 3С фит. Полученные оценки параметров K^- и π^- - мезонов сравнивались с истинными значениями, заложенными в моделирование. Например, весь исследуемый диапазон импульсов π^- -мезона разбивался на интервалы величиной 1 ГэВ. В каждом интервале проводилось сравнение оценок импульса, полученных из фита, с импульсами, заложенными в моделирование. Полученные оценки оказались состоятельными и несмещенными, то есть в каждом интервале

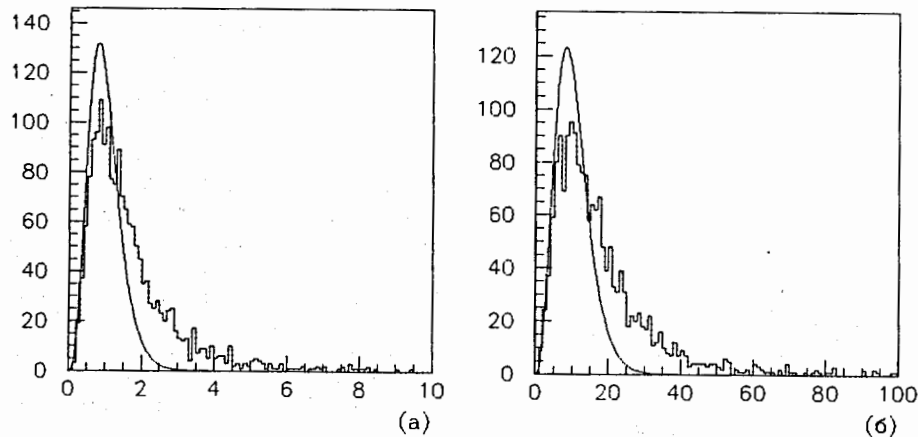


Рис. 6. Распределения по χ^2 после 3С фита (а) — χ^2 , (б) — χ^2 на степень свободы).

импульсов среднее значение величины $\frac{\Delta p}{p} = (p_{\text{фит}} - p_{\text{ист}})/p_{\text{ист}}$, равное $\sum_{i=1}^N \frac{\Delta p_i}{p_i} / N$, не превышает значения $\sqrt{\sum_{i=1}^N (\frac{\Delta p_i}{p_i})^2 - (\sum_{i=1}^N \frac{\Delta p_i}{p_i})^2 / N}$. Наблюдается асимптотическая сходимость оценок к истинным значениям. Это дает возможность пользоваться этими оценками для нахождения передаточной функции магнита. Значения ошибок оценок импульса на индивидуальном событии для π^- -мезона и для K^- -мезона соответственно:

$$\sigma_{\pi} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) = 0.0220, \quad \sigma_K \left(\frac{\Delta p}{p} \right) = 0.0152. \quad (30)$$

Эти значения характеризуют точность метода.

3.6 Нахождение передаточной функции магнита

Из реальных данных февральского сеанса 1992 года отбирались события распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ (критерии отбора рассмотрены в п. 3.1). Для отобранных событий проводился кинематический 3С фит. Распределение по χ^2 после фита показано на рис. 6 (6а — χ^2 -распределение, 6б — распределение χ^2 на степень свободы).

Как видно из рис. 6, экспериментальное и теоретическое χ^2 распределение несколько отличаются друг от друга, что говорит о неточности знания ошибок. Мы оцениваем такую неточность в $\sim 10\%$.

Для нахождения передаточной функции f в представлении (1) в качестве начальных параметров трека x_0, y_0, x'_0, y'_0 были взяты координаты вершины распада и направление π^- -мезона, полученные после 3С фита, $\lambda = 1/p_{\text{фит}}$ — обратный импульс π^- -мезона после фита со знаком (знак „-“ для отрицательно заряженных частиц), Y_M — координаты π^- -мезона на детекторах ДТ после магнита (см. рис. 1). Фитирование коэффициентов передаточной функции проводилось программой FUMILI [21].

Для каждой из плоскостей дрейфовых трубок была найдена передаточная функция. Точность нахождения передаточной функции определялась путем сравнения импульса, вычисленного по передаточной функции $p_{\text{вмч}}$, с импульсом после фита $p_{\text{фит}}$. Строилось распределение $\frac{\Delta p}{p} = (p_{\text{вмч}} - p_{\text{фит}})/p_{\text{фит}}$ для каждой Y-плоскости дрейфовых трубок ДК после магнита (см. рис. 2). Полученные значения $\langle \frac{\Delta p}{p} \rangle$ и $\sigma_{\Phi} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)$ приведены в таблице 2.

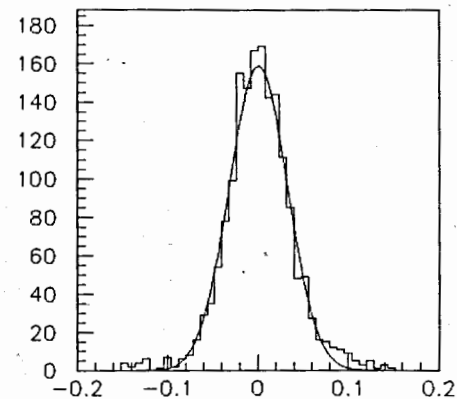


Рис. 7. Распределение $\frac{\Delta p}{p}$ для группы сработавших детекторов.

Таблица 2

Величина	ДТ-3	ДТ-4	ДТ-7	ДТ-8
$\langle \frac{\Delta p}{p} \rangle$	0.007	0.001	0.004	0.003
$\sigma_{\Phi} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)$	0.064	0.063	0.035	0.035
$\sigma_{\tau} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)$	0.060	0.059	0.030	0.031

Вычитая квадратично из полученных значений σ_{Φ} величину σ_{π} (см. п. 3.5), связанную с неточностью метода, получим величину σ_{τ} , которую будем называть точностью восстановления импульса для каждой плоскости ДТ (см. последнюю графу таблицы 2).

Для нахождения точности восстановления импульса по группе сработавших детекторов проводилось усреднение по импульсам, вычисленным с помощью передаточных функций для каждой из плоскостей дрейфовых трубок, с весом, соответствующим точности восстановления импульса по передаточной функции для данной плоскости дрейфовых трубок (см. таблицу 2). Получено распределение $\frac{\Delta p}{p} = (p_{\text{гр}} - p_{\text{фит}})/p_{\text{фит}}$ (рис. 7), где $p_{\text{гр}}$ — импульс, вычисленный по группе (две и более) ДТ, $p_{\text{фит}}$ — импульс после 3С фита. Характеристики распределения:

$$\langle \frac{\Delta p}{p} \rangle = 0.001, \quad \sigma_{\text{гр}} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) = 0.030.$$

Вычитая квадратично из полученного значения $\sigma_{\text{гр}}$ величину σ_{π} , связанную с неточностью метода (см. п. 3.5), получим точность восстановления импульса для двух и более сработавших плоскостей дрейфовых трубок:

$$\sigma = 0.023. \quad (31)$$

При этом не учитывался случай, когда сработали только 3 и 4 ДТ.

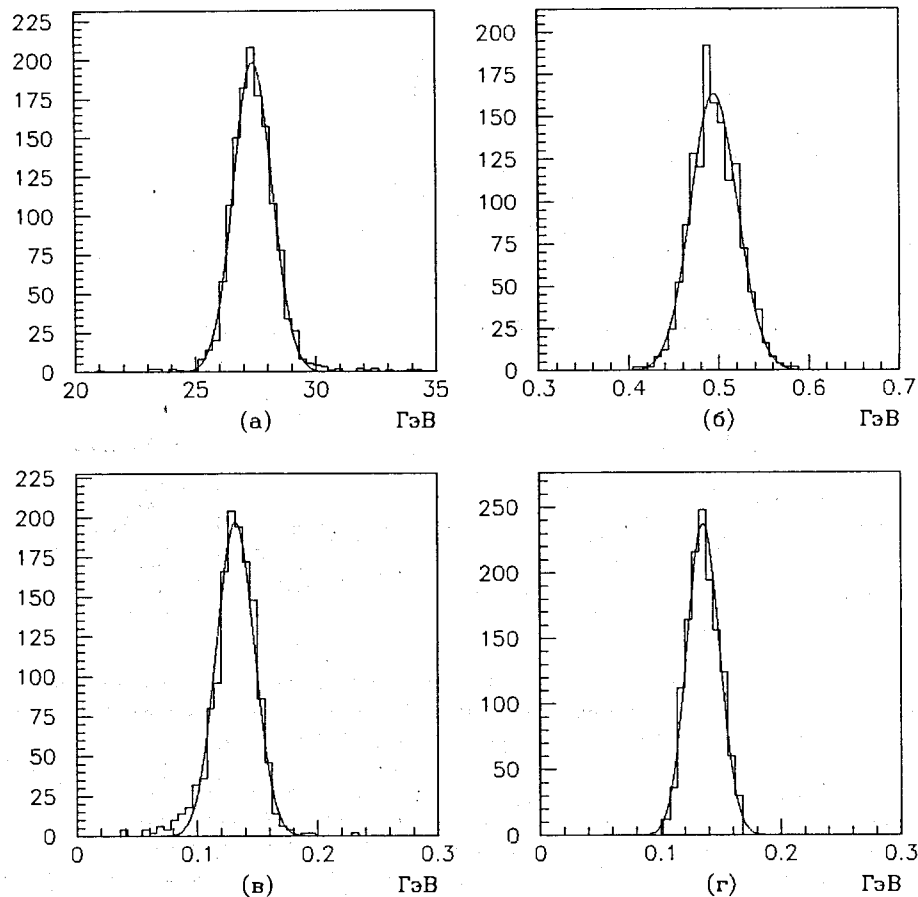


Рис. 8. Распределения (для распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$):
 (а) — по импульсу K^- -мезона, (б) — по массе K^- -мезона,
 (в) — по недостающей массе, (г) — по эффективной массе 2-х γ -квантов.

4 Точностные характеристики установки ИСТРА-М

На рисунке 8 показаны распределения, характеризующие точностные характеристики установки ИСТРА-М. При вычислении импульса заряженных частиц использовалась передаточная функция магнита, полученная на калибровочном процессе.

1. Импульс K^- -мезона после ЗС фита (рис. 8а).

Характеристики распределения:

$$\langle p_K \rangle = 27.40 \text{ ГэВ}, \quad \sigma(p_K - \langle p_K \rangle) = 0.79 \text{ ГэВ}.$$

2. Масса K^- -мезона (рис. 8б):

$$M_K^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2.$$

Характеристики распределения:

$$\langle M_K \rangle = 0.495 \text{ ГэВ}, \quad \sigma(M_K - \langle M_K \rangle) = 0.025 \text{ ГэВ}.$$

3. Недостающая масса (рис. 8в):

$$M_m^2 = (E_K - E_\pi)^2 - (\vec{p}_K - \vec{p}_\pi)^2.$$

Характеристики распределения:

$$\langle M_m \rangle = 0.132 \text{ ГэВ}, \quad \sigma(M_m - \langle M_m \rangle) = 0.015 \text{ ГэВ}.$$

4. Эффективная масса 2-х γ -квантов (рис. 8г):

$$M_{\gamma\gamma}^2 = 2E_{\gamma 1} E_{\gamma 2} (1 - \vec{n}_{\gamma 1} \vec{n}_{\gamma 2}).$$

Характеристики распределения:

$$\langle M_{\gamma\gamma} \rangle = 0.136 \text{ ГэВ}, \quad \sigma(M_{\gamma\gamma} - \langle M_{\gamma\gamma} \rangle) = 0.013 \text{ ГэВ}.$$

Литература

- [1] Physical Review D, S1-S584, 1992.
- [2] А. И. Григорьев и др.: Материалы VIII Рабочего совещания по пейтришному детектору ИФВЭ - ОИЯИ. Дубна, Д1, 2, 13-88-90, 1988.
- [3] A. D. Volkov, A. V. Voskanian, O. G. Voskerchian, B. J. Zalikhanov, G. Kalmar, A. J. Ketikian, E. V. Komissarov, V. S. Kurbatov, V. S. Serdyuk and V. V. Sidorkin: Method for the calculation of charged particle momentum in magnetic spectrometer. Nucl. Instr. and Meth. A306 (1991) 278.
- [4] А. Д. Волков, А. В. Восканян, Б. Ж. Залиханов, А. И. Иваненко, А. Ж. Кетикян, Е. В. Комиссаров, В. С. Курбатов, С. И. Мисютин, В. З. Сердюк, В. В. Сидоркин, В. И. Снятков, Ю. Р. Тер-Акопов: Измерение магнитного поля спектрометрического электромагнита установки ИСТРА-М. Дубна, Р-1-92-180, 1994.
- [5] A. J. Ketikian, E. V. Komissarov, V. S. Kurbatov, I. N. Silin: Generalised kinematical fit in event reconstruction. Nucl. Instr. and Meth. A314 (1992) 572.

- [6] A. J. Ketikian, E. V. Komissarov, V. S. Kurbatov, I. N. Silin: *New algorithm for minimizing χ^2 functionals with constraints*. Nucl. Instr. and Meth. **A314** (1992) 578.
- [7] A. J. Ketikian, V. S. Kurbatov, I. N. Silin: *New minimization algorithm with constraints*. Proceeding of CHEP-92, CERN 92-07, 1992, p. 833.
- [8] V. S. Kurbatov, I. N. Silin: *New method for minimizing regular functions with constraints on parameter region*. Nucl. Instr. and Meth. **A345** (1994) 345.
- [9] В. Н. Болотов и др.: *Годоскопический черенковский спектрометр полного поглощения*. ПО4-28, Москва, 1985
- [10] Н. Н. Говорун, И. М. Иващенко, А. С. Чвыров: *Определение параметров искровых камер*. ОИЯИ, Дубна, P5-5397
- [11] Г. А. Емельяненко. Автореферат кандидатской диссертации. ОИЯИ, Дубна, 1971.
- [12] Г. А. Емельяненко: *Обращение кулоновской матрицы при обработке камерных снимков*. ОИЯИ, P-10-5687, Дубна, 1971.
- [13] Г. А. Емельяненко, В. Г. Одинцов. ОИЯИ, P10-11127, Дубна, 1977.
- [14] Г. А. Емельяненко, В. Г. Одинцов, Т. Т. Рахмонов. ОИЯИ, P10-89-682, Дубна, 1989.
- [15] С. Ф. Бережнев, Г. А. Емельяненко, О. А. Займидорога. ОИЯИ, P10-8167, Дубна, 1974.
- [16] Ю. А. Будагов, Г. А. Емельяненко, В. Г. Одинцов, А. И. Мачавариани. ОИЯИ, P10-9950, Дубна, 1976.
- [17] Т. Андерсон: *Введение в многомерный статистический анализ*. Москва, Физматгиз, 1963.
- [18] Г. А. Емельяненко. Автореферат докторской диссертации: *Блочно-трехдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач*. ОИЯИ, 11-92-4, Дубна. 1992.
- [19] T.T.Rakhmonov. *Kandidat dissert. referat*. Comp. Math. Inst., Acad. of Sciences, Georgia, Tbilisi, 1990.
- [20] Г. А. Михайлов: *Оптимизация весовых методов Монте-Карло*. Москва, Наука, 1987.
- [21] В. Илье, Д. Драйард, Ф. Джеймс, М. Рус, Б. Садуле : *Статистические методы в экспериментальной физике*. Москва, Атомиздат, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1994 года.

Артемов В.М. и др. P10-94-521
Калибровка спектрометрического магнита установки ИСТРА-М
на физическом процессе

Описывается метод оценки импульса заряженных частиц в спектрометрическом магните установки ИСТРА-М, основанный на использовании распада $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ в качестве калибровочного. Приводятся точностные характеристики установки.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Artemov V.M. et al. P10-94-521
Calibration of the Spectrometric Magnet of the ISTRA-M Setup
on the Physical Process

The method for estimation of the momentum of a charged particle in the spectrometric magnet of the ISTRA-M setup is described. The method is based on the $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ decay as a calibration process. Precision characteristics of the setup are reported.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994