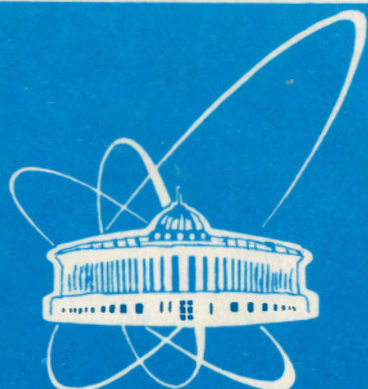


94-105



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

P10-94-105

И.В.Амирханов, Ю.Г.Дзюба<sup>1</sup>, Е.П.Жидков,  
А.Н.Ильина<sup>1</sup>, И.В.Ильин<sup>2</sup>, В.Д.Ильин<sup>1</sup>

О ДИНАМИКЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИХ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ  
ПРИ НАЛОЖЕНИИ  
ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ,  
Москва

<sup>2</sup> Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований,  
Московская область

## ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая задача связана с проблемой построения общей модели движения заряженных частиц в магнитных полях дипольного типа, являющихся наиболее простой конфигурацией в смысле аналитических возможностей.

Классическая теория движения заряженных частиц в дипольном поле имеет давнюю историю, начало которой положил Штермер [1]. Неослабевавший интерес к этой проблеме обусловлен несколькими причинами. Прежде всего это связано с недостаточностью существующей модели движения. Традиционная физическая картина движения заряженных частиц основана на теории возмущения, сформулированной Альвеном [2]. Она справедлива только в том случае, когда периоды финитных движений захваченной частицы по различным степеням свободы явно несоизмеримы. Соответствующая этому случаю теория движения заряженных частиц называется адиабатической [3].

При соизмеримости периодов колебаний необходимо учитывать резонансные процессы в нелинейной системе "частица - магнитное поле", которые могут переводить систему в хаотический (стохастический) режим движения. Такие процессы были исследованы Чириковым [4]. В общем плане рассматриваемая задача связана с проблемой динамического хаоса в гамильтоновых системах [5]. В этом случае происходит потеря информации и описание движения частицы может быть представлено в форме теории случайного процесса [4,5].

Хотя особенности динамики частиц в дипольном поле в настоящее время во многом известны, некоторые существенные детали нелинейных эффектов мультипериодного движения побуждают к дальнейшим численным и теоретическим исследованиям с целью создания достаточно простой (как адиабатическая модель) и в то же время общей модели движения захваченных частиц. В этом отношении вызывает оптимизм результаты работ [6,7], в которых исследуется модель движения для явно неадиабатических частиц.

В настоящей работе, с использованием идей и представлений, содержащихся в предыдущих работах [6,7], исследуется движение частиц в суммарном магнитном поле диполя и кольцевого тока, лежащего осесимметрично в плоскости экватора. Такое суммарное поле является упрощенной моделью геомагнитного поля во время магнитной бури [8]. Возникающие здесь задачи непосредственно связаны с проблемами космофизики, поскольку магнитные поля (магнитные ловушки) космических объектов (Земли, Юпитера, Сатурна и т.д.) имеют конфигурацию, близкую к дипольной [9-13]. Кроме того, сами эти ловушки представляют большую ценность в качестве объектов приложения исследований в области физики плазмы, электродинамики и нелинейной механики. Основной же частью теоретических исследований физических процессов в магнитосферной плазме указанных планет является динамика отдельной заряженной частицы. Дипольная ловушка относится к классу адиабатических ловушек, в которых потери плазмы являются преимущественно продольными (вдоль силовых линий). Эти потери в основном определяются конфигурацией области адиабатического удержания частиц в пространстве импульсов и скоростью изотропизации функции распределения. Особенность данной задачи состоит в том, что потери вызываются не взаимодействием со средой, а стохастической неустойчивостью движения частицы в вакуумном магнитном поле. Следует подчеркнуть, что явление стохастичности представляет интерес не только в качестве дополнительного механизма потерь. В широком смысле результаты, полученные с использованием этого эффекта, имеют фундаментальное значение, поскольку они в принципе могут определять условия захвата и уровень возможных потерь частиц.

В общем плане задача о движении частиц в магнитных ловушках в условиях динамического хаоса полностью определена (см., например, [4]). Однако, как показывают исследования в дипольном поле [45], реальное решение еще далеко от завершения. Не пройдена вся иерархическая цепочка "идея-модель-теория". В особенности это касается теории, обобщенной на

неадиабатическое поведение частиц. Для преодоления этого этапа необходимо оптимальное сочетание численных и аналитических методов с привлечением некоторых математических и физических упрощений.

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Использование различного рода моделей является вспомогательным приемом для решения сложных физических проблем. Существуют различные типы моделей, используемые в различных областях физики [14]. В современной теории физических моделей одним из важнейших направлений является асимптотический анализ [15,16]. Особую роль при создании теории играют простейшие предельные случаи, допускающие аналитическое решение. При асимптотическом подходе предполагается близость исходной системы к предельному (идеализируемому) случаю. Идеализированная система в таком случае представляется как невозмущенная задача, а исходная – возмущенная задача. Непосредственное исследование исходной системы, как правило, невозможно. Определение же поправок, учитывающих отклонение от предельного случая, — вполне решаемая задача.

Построение асимптотики обычно сводится к поиску явных несоизмерностей в отдельных элементах рассматриваемой системы. Если характеристики элементов сильно различаются (медленное – быстрое, длинное – короткое и т.п.), то можно ввести малые (большие) параметры  $\varepsilon_i$  (представляющие их отношения) и уменьшить число степеней свободы вплоть до единицы, т.е. осуществить редукцию размерности. Если точное решение возмущенной задачи, которое нам не известно, обозначить через  $u_\varepsilon(x)$ , то проблема сведется к построению асимптотического приближения  $U(x,\varepsilon)$  для решения  $u_\varepsilon(x)$ . Хотя точное решение  $u_\varepsilon(x)$  нам не известно, тем не менее существуют не только способы построения приближений  $U(x,\varepsilon)$ , но и способы оценки разности  $u_\varepsilon(x) - U(x,\varepsilon)$ . Относительно способов построения

асимптотического приближения  $U(x, \varepsilon)$ , называемых асимптотическими методами, методами возмущений (асимптотических разложений) по малым значениям параметра или просто методами малого параметра, см., например, [17,18] и приведенные там ссылки.

Таким образом, суть асимптотических методов состоит в том, чтобы в окрестности некоторого предельного состояния системы найти упрощенное решение задачи. Причем точность решения тем выше, чем меньше эта окрестность (пределы изменения параметров системы). Другими словами, частичная сумма ряда

$$U_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon) \quad (1)$$

является асимптотическим приближением для решения  $u_\varepsilon(x)$  с точностью

$$\Delta_n(x) = |u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)|. \quad (2)$$

Здесь  $n$  характеризует простоту задачи,  $x$  - локальность, т.е. длину интервала, на котором рассматривается разложение. Входящие в (2) величины  $\Delta, n, x$  попарно взаимосвязаны: при заданном  $x$  величина  $\Delta$  уменьшается (точность увеличивается) с ростом  $n$  (т.е. с увеличением сложности); при фиксированном  $n$  точность  $\Delta$  улучшается с уменьшением  $x$ ; заданная точность  $\Delta$  достигается при тем меньших  $n$ , чем меньше  $x$ , и наоборот с увеличением области  $x$  растет  $n$ , т.е. задача усложняется, и, начиная с некоторого  $x$ , заданной точности вообще достичь невозможно. Все это можно выразить на языке принципа дополнительности и соотношения неопределенности [15]. Величины  $n$  и  $\Delta$  связаны соотношением дополнительности, а мерой неопределенности является  $x$ . Для каждой пары величин имеет место соотношение неопределенности, в котором роль регулятора играет третья величина. Абсолютная точность при заданном  $x$  может быть достигнута в случае сходящихся рядов в результате абсолютного усложнения, когда  $n \rightarrow \infty$ . В нашем случае точность асимптотического разложения (неопределенность при заданной области) принципиально ограничена.

Обратим внимание на следующий существенный для нас момент. Разложение (1) сходится асимптотически, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n [u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)] = 0 \quad (3)$$

для любого фиксированного  $n$  и  $x$  (обычно  $n$  не велико). Ряд (1) в этом случае кратко называют асимптотикой функции  $u_\varepsilon(x)$ . Если положить  $u_\varepsilon(x) = \exp(-1/\varepsilon)$ , то  $U_n(x, \varepsilon) = 0$ , поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1/\varepsilon)^n e^{-1/\varepsilon} = 0$$

для всех  $n$ . Поэтому функции  $u_\varepsilon(x)$  и  $u_\varepsilon(x) + \exp(-\text{const}/\varepsilon)$  имеют одинаковые асимптотические представления. Следовательно, асимптотическое представление решения  $u_\varepsilon(x)$  в виде (1) не "улавливает" экспоненциально малых добавок.

Локальность получаемых решений является общим недостатком асимптотических методов. К недостаткам также относится и то, что первое приближение не всегда обеспечивает требуемую точность, а последующие приближения могут быть настолько громоздкими, что теряется практическая значимость. Кроме того, оценка точности асимптотических решений и пределов применимости может составить отдельную проблему. Следует еще отметить, что выбор метода асимптотического исследования и введение малых параметров не поддается формализации.

2. В рассматриваемом нами случае объектом исследования является частица в неоднородном магнитном поле, совершающая финитное движение (или просто частица в магнитной ловушке). Математической моделью движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле  $B$  является система дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{R}^2}{dt^2} = [\vec{v}, \vec{\omega}], \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}, \quad \vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{mc}, \quad (4)$$

где  $\vec{v}$  - полная скорость частицы,  $\vec{R}$  - радиус-вектор ее положения,  $e, m$  - заряд и масса частицы,  $c$  - скорость света. Приведем схему асимптотического метода построения приближенного решения (4). Эта задача из области математической физики, в которой используются асимптотические методы для решения адиабатических задач [4, 19, 20].

Система (4) является консервативной гамильтоновой с несколькими степенями свободы, которой в цилиндрических

координатах соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} [p_z^2 + p_\rho^2 + (\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{e}{c} A_\varphi)^2] = \text{const.} \quad (5)$$

В аксиально-симметричном поле векторный потенциал  $A_\varphi$  не зависит от  $\varphi$ , что дает интеграл движения

$$p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{c} A_\varphi = \text{const.} \quad (6)$$

Отсюда получается

$$H = \frac{1}{2m} [p_z^2 + p_\rho^2] + V(\rho, z) = \text{const.}, \quad (7)$$

где  $V$  - потенциальная яма, в которой "качаются" захваченные частицы.

Как известно из классической механики (см. например [21]), для гамильтоновой системы существует инвариант движения

$$\oint \left( \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) = \text{const.}, \quad (8)$$

где  $p_i$  - обобщенный импульс,  $q_i$  - обобщенная координата. Интегрирование производится по любой замкнутой кривой в фазовом пространстве. Для постоянного  $H$  величина

$$J = \oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \text{const} \quad (9)$$

является интегралом движения. При медленно изменяющемся  $H$  величина (9) является адиабатическим инвариантом. В случае разделения переменных для каждого  $i$  имеет место

$$J_i = \oint p_i dq_i = \text{const.} \quad (10)$$

Интеграл (10) называется интегралом действия (или переменной действия). В дипольной ловушке существуют три степени свободы, связанные с ларморовским вращением, продольным движением между точками отражений и дрейфовым движением вокруг диполя. Для каждой из указанных степеней свободы существует интеграл движения (10) [3,22,23]. На этом задачу можно было бы считать решенной, поскольку найдены интегралы движения и выяснен их физический смысл.

В действительности движения по этим степеням свободы всегда нелинейно связаны между собой. Поэтому в общем случае можно говорить лишь о приближенном разделении движения по степеням свободы и соответственном сохранении величин  $J_i$ . По этой причине переменные действия (10) являются приближенными

интегралами движения (в отличие от энергии и  $p_\phi$ ) или, как их еще называют, адиабатическими инвариантами движения. Адиабатическим инвариантом называется величина, которая точно или приближенно сохраняет свое значение в течение длительного времени ( $\sim 1/\epsilon$ ). Кроме того, для мультипериодных систем имеется дополнительная проблема резонансной связи нелинейных колебаний с различными частотами, зависящая не только от параметров системы, но и от начальных условий движения [4]. Критерием возможности условного разделения движений является условие малости изменения магнитного поля на протяжении ларморовского радиуса  $\rho_L = v_\perp / \omega$ , т.е.  $\rho_L v_\perp B / V \equiv \chi \ll 1$ , где  $\chi$  называется параметром адиабатичности,  $v_\perp$  есть  $v$ , перпендикулярная  $R$ .

Разлагая поле  $B$  в уравнении (4) в ряд Тейлора в окрестности ведущего центра и усредняя по быстрому ларморовскому вращению, можно получить уравнения движения ведущего центра (дрейфовые уравнения) [3,21,23-27]. Смысл этой операции заключается в том, чтобы отделить "быстрое" движение частицы по ларморовской окружности и перейти к исследованию "медленного" (плавного) движения центра этой окружности. В итоге вместо (4) получаются уравнения движения ведущего центра, которые в первом приближении по параметру  $\epsilon$  можно представить в виде [3,23]

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{u}B] - \mu_0 v B, \quad (11)$$

где  $u$  - скорость ведущего центра,  $\mu_0 \equiv J_1 = \frac{mv^2}{2B}$  - орбитальный магнитный момент, связанный с ларморовским вращением. Величина  $\mu_0$  входит в уравнение (11) в качестве параметра. Но и приближенные уравнения (11) не всегда интегрируемы, что вызывает необходимость их дальнейшего усреднения по продольным колебаниям. Это приводит к уравнениям для усредненного дрейфового движения [3,23], где в качестве параметра входит продольный адиабатический инвариант

$$J \equiv J_2 = \oint m v_\parallel ds = \oint [2m(W - \mu_0 B)]^{0.5} ds = \text{const},$$

связанный с продольными осцилляциями частицы (здесь  $v_\parallel$  есть



$v \parallel B, W$  - энергия). Усреднение дрейфовых уравнений приводит к появлению третьего инварианта  $\Phi = J_3 = \int \vec{B} dS$ , где  $S$  - поверхность, натянутая на дрейфовую оболочку. В дипольном поле [22]

$$\Phi = 2\pi \int_{L_3}^{\infty} \frac{B_0}{L_3} R_e dR_e = - \frac{2\pi R_3^2 B_0}{L} = - \frac{2\pi M}{R_e},$$

где  $L = \frac{c}{R_3}$  - параметр, характеризующий дрейфовую оболочку,  $R_e$  - расстояние от центра диполя до ведущей силовой линии в экваториальной плоскости,  $R_3$  - радиус Земли. Параметр  $L$ , таким образом, является третьим адиабатическим инвариантом. Поточковый инвариант  $\Phi$  обусловлен периодичностью движения частицы поперек силовых линий. Такова грубая схема построения иерархии инвариантов (интегралов дрейфовых уравнений). Основные сведения об используемых здесь методах (метод фазового пространства, метод осреднения или разделения движения, их сходство и связь с теорией адиабатических инвариантов) содержатся в работах [5,21].

Обычно "самими" адиабатическими инвариантами называют члены наименьшего порядка в асимптотических рядах

$$J_i = J_{i0} + \varepsilon J_{i1} + \varepsilon^2 J_{i2} + \dots = \text{const.} \quad (12)$$

Выражения для  $\mu$  в первом порядке приведены в [3,28-30]. Поведение  $\mu_1$  на траектории частицы в дипольном поле рассматривалось в [6]. Формулы для продольного инварианта  $J_1$  приведены в [29,30]. Выражение для магнитного момента во втором порядке по  $\varepsilon$  для аксиально-симметричного поля получено в [31] (см. также [30]). Эта поправка весьма громоздка, ее физическая сущность трудно представима, поэтому ее практическая ценность сомнительна.

Существование иерархии адиабатических инвариантов полностью регламентирует поведение частиц в рамках адиабатической теории. В этом ее большое достоинство. Но вот вопрос, где эти рамки и как быть в том случае, когда движение частицы не соответствует адиабатическим предсказаниям. В этом случае необходимо учитывать внутриврезонансные механизмы, способные

приводить к изменению или разрушению инвариантов и вызывать неустойчивое (стохастическое) поведение частиц. Вопрос о том, что происходит с интегралами движения при переходе от систем с детерминированным поведением к стохастическим, обсуждается в [48]. Основную роль здесь играют нелинейные резонансы между ларморовским вращением и высшими гармониками продольных колебаний [4]. Необходимые сведения о нелинейных резонансах и их взаимодействии содержатся в книге [5] и обзоре [32]. Резонансный подход является следующим этапом в исследовании особенностей динамики частиц в магнитных ловушках [4,20].

3. Ниже речь будет идти о проблеме сохранения  $\mu$ , поскольку основной вопрос о времени удержания частиц в магнитных ловушках связан именно с этим инвариантом. Так как удержание частицы происходит за счет приближенного сохранения  $\mu$ , то естественно за "идеализированную" (невозмущенную) систему выбрать систему с искусственным условием  $\mu = \text{const}$ , которому соответствует невозмущенный гамильтониан [4]

$$H_0 = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu B. \quad (13)$$

Малые изменения  $\mu$  будем относить к возмущению. Исходя из точных уравнений движения (4), можно получить уравнения для  $\dot{\mu}$ . Для поля произвольной сложности оно приведено в [33]. В аксиально-симметричном поле величина  $\dot{\mu}$  имеет вид [34]

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{v_{\perp}}{BR_c} \left( v^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \cos\Phi - \frac{v_{\perp} v_{\parallel}^2}{2B^2} \frac{\partial B}{\partial s} \cos 2\Phi, \quad (14)$$

где фаза возмущения  $\Phi$  связана с ларморовской фазой  $\varphi$  соотношением  $\gamma \cos\Phi \approx r_c \cos\varphi$  [35],  $r_c$  - расстояние ларморовского центра от оси симметрии поля,  $R_c$  - радиус кривизны силовой линии.

Основной задачей теперь является исследование эффекта возмущения, т.е. интегрирование возмущенного уравнения (14). Интегрирование с помощью асимптотических методов, о которых речь была выше и которые сводятся к построению решения уравнения (14) в виде асимптотического ряда (12), в любом

порядке по  $\epsilon$  дают поправки, являющиеся периодическими функциями фаз [4,36]. Это следует из того, что асимптотический подход сводится, грубо говоря, к интегрированию по частям, когда на каждом шаге интегрируется высокочастотный множитель в (14) и дифференцируется низкочастотный. Наиболее очевидным это становится, если уточненный адиабатический инвариант  $\mu$  записать в более простом виде [6,28]

$$\mu = \frac{e}{2c} \left\{ \frac{v_{\perp}^2}{\omega} - \frac{v_{\perp} (2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{\omega^2 B^2} (B_z \frac{\partial B}{\partial \rho} - B \frac{\partial B}{\rho \partial z}) \sin \phi + \right. \\ \left. + \frac{v_{\perp}^2 v_{\parallel}}{2\omega^2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{B}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{-e}{B} \right) \right] \sin 2\phi \right\}, \quad (15)$$

где использовались цилиндрические координаты ( $R^2 = \rho^2 + z^2$ ). При достаточно малом параметре адиабатичности  $\chi$  вариации  $\mu$  будут ограниченными и малыми и, самое главное, они не смогут накапливаться. В этом смысле "асимптотический" эффект возмущения является несущественным. От него можно избавиться, если перейти от дифференциальных уравнений движения к отображению Пуанкаре на полупериоде продольных колебаний.

Существенным является остаточный член разложения (12), связанный с неперодическими (резонансными) изменениями  $\mu$ , которые могут накапливаться. Поэтому следующая наиболее важная задача заключается в вычислении полного изменения  $\Delta\mu$  на полупериоде продольных колебаний. Другими словами, необходимо проинтегрировать (14) прямым (неасимптотическим) методом. Экспоненциально малое резонансное  $\Delta\mu$  было получено в ряде работ (см., например, [4,20,33,37,38] и приведенные там ссылки). В общем виде результат вычисления  $\Delta\mu$  можно представить следующим образом:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \xi \cos \phi; \quad \xi = a \exp\left(-\frac{b}{\chi}\right), \quad (16)$$

где  $a$  и  $b$  - некоторые величины, зависящие от параметров системы. Здесь важно подчеркнуть, что новый параметр  $\xi$  (16) улавливает основной неасимптотический эффект адиабатического возмущения и что именно  $\xi$ , а не  $\epsilon$  или  $\chi$  является истинным параметром малости рассматриваемой задачи. Теперь по новому

параметру  $\xi$  можно производить асимптотическое разложение и использовать эффективный метод усреднения, отбросив, например, малые поправки  $\varepsilon^n \mu_n$ , и вычислять изменения  $\varphi$  за полупериод продольных осцилляций. Это уже следующий этап на пути к общей физической картине движения частиц в неоднородных магнитных полях.

4. Основной вопрос теперь заключается в особенности поведения последовательных изменений  $\Delta\mu$ , дающих возможность делать долгосрочные прогнозы динамики частиц.

Как уже отмечалось, асимптотические поправки к  $\mu$  в любом порядке по  $\varepsilon$ , согласно [36], являются квазипериодическими. Хотя величина квазипериодических колебаний  $\delta\mu$  обычно значительно больше  $\Delta\mu$ , она не играет никакой роли, если описывать состояние частицы через полупериод продольных осцилляций. Это один путь решения вопроса о накоплении изменений  $\Delta\mu$  через так называемое отображение Пуанкаре

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \xi \mu_n \sin \theta_n, \quad (17)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta\theta(\mu_{n+1}),$$

которое подробно описано в [4,20,35] (см. также [39]). Здесь  $\mu_n$  и  $\theta_n$  ( $\theta = \varphi - \pi/2$ ) — динамические переменные при  $n$ -м пересечении медианной плоскости ловушки,  $\Delta\theta$  — набег фазы за полупериод продольного колебания частицы. При достаточно малом значении  $\chi$  выражение (17) путем линеаризации функции  $\Delta\theta$  вблизи резонансного значения  $\mu_r$  ( $\Delta\theta(\mu_r) = 2\pi r$ ,  $r$  — любое целое число) сводится к так называемому стандартному отображению (отображению Чирикова [4,35])

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \quad (18)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}.$$

где  $I \equiv \left( \frac{d\Delta\theta}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_r} (\mu - \mu_r)$ ;  $K = (\mu \xi (\Delta\theta)_{\mu}^{\prime})_{\mu=\mu_r}$ ;  $K$  — параметр устойчивости — единственный параметр, отражающий специфику исследуемой системы и определяющий условия адиабатичности исходной модели [4,5,20,35].

Существует другой способ исследования этой проблемы,

основанный на гамильтоновом формализме [40]. Посредством канонических преобразований гамильтониан приводят к виду  $H = H_0 + V$ ,  $|V| \ll H_0$ , где  $H_0$  - невозмущенный гамильтониан (13). Операцией, аналогичной определению  $\Delta\mu$  первым способом, является выделение резонансных фурье-гармоник в возмущении  $V$ . Итак, имеются два взаимодополняющих способа описания динамики частиц - непрерывное (4) и дискретное (17). В соответствии с этим определяются исходные уравнения. В начале рассмотрим непрерывную модель движения (4).

### ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве основного уравнения для численных расчетов траекторий и всех необходимых величин на траектории частицы использовалось уравнение движения (4) в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & B'_z - B'_y \\ -B'_z & 0 & B'_x \\ B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$B'_x = B_x = -3xz \frac{M}{R^5}, \quad B'_y = B_y = -3yz \frac{M}{R^5}, \quad B'_z = (R^2 - 3z^2) \frac{M}{R^5} - h,$$

где  $M \approx 8.1 \cdot 10^{25}$  Гс·см<sup>3</sup> - магнитный момент диполя Земли,  $m$  - масса протона, штрих означает, что соответствующие величины относятся к суммарному магнитному полю,  $h$  - амплитуда возмущения (амплитуда так называемой  $D_{st}$ -вариации в ее классической форме [41]).  $D_{st}$ -вариация является одной из важнейших характеристик геомагнитного возмущения и связана с радиусом кольцевого тока  $R_k$  эмпирическим соотношением [46]

$$R_k = \frac{16.8}{h^{1/3}}, \quad 0 \leq h \leq 600\gamma,$$

где амплитуда  $D_{st} \equiv h$  измеряется в гаммах ( $1\gamma = 10^{-5}$  Гс),  $R_k$  - в радиусах Земли. Относительно классификации форм  $D_{st}$ -вариаций см. [47]. Согласно расчетам самосогласованных значений полей кольцевого тока для радиационных поясов Земли [41] поле  $h$  практически не зависит от экваториального радиуса  $R_e$  внутри кольца, т.е.  $h(R_e \leq R_k) \approx \text{const}$ . Поэтому ради упрощения задачи

будем считать, что  $h_x = h_y = 0$ ,  $h_z = h = \text{const}$  во всей области траекторного счета. Подобная модель поля  $h$  использовалась в работах [8,42]. Полезные сведения об аксиально-симметричных токовых системах в магнитосфере Земли и их влиянии на космические лучи содержатся в [43]. Для исследования движения частицы в каждой точке  $R$  строились три взаимно ортогональных единичных вектора

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{R} \vec{B}']}{|[\vec{R} \vec{B}']|}, \quad \vec{e}_2 = [\vec{e}_3 \vec{e}_1], \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{B}'}{B'}$$

по которым определялись компоненты скорости

$$\vec{v} = (v_{e_3})\vec{e}_3 + (v_{e_1})\vec{e}_1 + (v_{e_2})\vec{e}_2. \quad (20)$$

Если ввести продольную и поперечную составляющие скорости  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  по отношению к  $B'$ , а также фазу  $\varphi$  вращения частицы в плоскости, перпендикулярной силовой линии, то вместо (20) можно записать

$$\vec{v} = v_{\parallel} \vec{e}_3 + v_{\perp} (\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi),$$

$$v_{\parallel} = (\vec{e}_3 \vec{v}) = v_0 \cos\alpha, \quad v_{\perp} = |\vec{v} - v_{\parallel} \vec{e}_3| = v_0 \sin\alpha, \quad (21)$$

$$\varphi = \arctg \frac{(\vec{v} \vec{e}_1)}{(\vec{v} \vec{e}_2)},$$

где  $\alpha$  - питч-угол - угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}'$ ,  $v_0$  - модуль вектора скорости. Преобразование системы координат  $Oxuz$  в подвижную систему  $Oe_3e_2e_1$  осуществляется с помощью ортогональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} l_1 &= -\cos\theta \sin\zeta, & l_2 &= \cos\theta \cos\zeta, & l_3 &= -\sin\theta, \\ m_1 &= -\sin\theta \sin\zeta, & m_2 &= \sin\theta \cos\zeta, & m_3 &= \cos\theta, \\ n_1 &= \cos\zeta, & n_2 &= \sin\zeta, & n_3 &= 0, \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\sin\zeta = \sin\lambda \sin\sigma + \cos\lambda \cos\sigma,$$

$$\operatorname{tg}\sigma = R' / \left( \frac{dR'}{d\lambda} \right),$$

$\vartheta$  - долгота,  $\lambda$  - широта,  $\zeta$  - угол между экваториальной плоскостью и перпендикуляром к силовой линии,  $R' = R'(R_e, \lambda, b)$  - силовая линия (см. (24)). При  $b=0$

$$\sin\zeta = \frac{3}{2} \frac{\sin 2\lambda}{(1+3\sin^2\lambda)^{1/2}}.$$

Отсюда следует, что в движущейся системе координат уравнение движения (19) можно записать в виде

$$A' \frac{d}{dt} A \begin{pmatrix} v_{\parallel} \\ v_{\perp} \cos\varphi \\ v_{\perp} \sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \\ 0 & -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\parallel} \\ v_{\perp} \cos\varphi \\ v_{\perp} \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $A'$  - матрица, транспонированная с  $A$ .

Дополнительно использовались аналитические выражения для силовой линии, параметра адиабатичности, конуса потерь и обобщенного момента импульса.

Силовая линия. Компоненты суммарного поля  $B'$  (см. (19)) в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} B_{\theta} + h_{\theta} &= -\frac{M \sin\theta}{R^3} + h \sin\theta, & B_{\varphi} + h_{\varphi} &= -\frac{2M \cos\theta}{R^3} - h \cos\theta, \\ B_{\varphi} + h_{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда дифференциальные уравнения силовой линии

$$\frac{R' d\theta}{B_{\theta} + h_{\theta}} = \frac{dR'}{B_{\varphi} + h_{\varphi}}, \quad d\varphi = 0,$$

дают после их интегрирования

$$R' = R_e \cos^2\lambda \left( 1 + \frac{R'^3 b_0}{2} \right), \quad (23)$$

где  $R'$  и  $R_e$  - в радиусах Земли,  $b_0 = h/B_0$ ,  $B_0 = 0.312$  Гс - поле на экваторе ( $M = B_0 R_e^3$ ),  $\lambda = \pi/2 - \theta$  - широта. Окончательно из уравнения (23) получается следующая формула для силовой линии в суммарном поле

$$R' = R_e \cos^2\lambda \left[ 1 + \left( \frac{2}{27} \right)^{1/2} \frac{(\sqrt{3} \sin \frac{\Lambda}{3} - \cos \frac{\Lambda}{3})^3}{b^{1/2} \cos^3 \lambda} \right], \quad (24)$$

где  $\Lambda = \arccos \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} b \cos^3 \lambda \right]$ ,  $b = b_0 (R_e/R_s)^3 = b_0 L^3$ ,  $L \leq 3.0$ ,  $b_0 \leq 0.01$ . Решение (23) удобно представить с помощью метода

итераций в приближенном виде

$$R' = R_c \cos^2 \lambda \left( 1 + \frac{b}{2} \cos^2 \lambda + \frac{3}{4} b^2 \cos^4 \lambda + \dots \right) . \quad (25)$$

При  $b=0$  это выражение переходит в уравнение силовой линии для диполя. Соответственно для параметра  $L'$  имеем

$$L' = L \left( 1 + \frac{b}{2} + \frac{3}{4} b^2 + \dots \right) \quad (25a)$$

Из (24) и (25) видно, что магнитные оболочки с  $h$  увеличиваются.

Параметр адиабатичности. Особенности динамики частиц зависят от энергии и поля  $V'(R)$ . Удобным параметром, объединяющим в себе эти характеристики системы "частица-поле", является так называемый параметр адиабатичности  $\chi$ . Точнее называть его параметром неадиабатичности, поскольку он характеризует степень отличия реального движения от предсказаний адиабатической теории движения заряженных частиц. В суммарном поле его можно по аналогии с дипольным полем [6] представить как

$$\chi = \rho_L' / R_c' = \frac{pc}{eV_e' V_e'} \frac{|v_{\perp} B_e'|}{V_e'} = \frac{pc}{e} \frac{3V_e'(R_c')}{R_e' [V_e'(R_e') - h]^2} = \chi \left( \frac{L'}{L} \right)^2 \frac{1}{(1 - b_0 L'^3)^2} ; \quad \chi = 5.04 \cdot 10^{-5} pcL^2 ; \quad (26)$$

где  $\rho_L'$  - полный ларморовский радиус на экваторе при  $\alpha = \pi/2$ ,  $R_c'$  - радиус кривизны силовой линии при  $\lambda=0$ ,  $p$  - импульс частицы, измеряемый в МэВ/с, индекс "e" означает принадлежность соответствующей величины к экватору ( $\lambda=0$ ). При выводе формулы (26) учтено, что на экваторе (см. (22))

$$v_{\perp} B' = \frac{\partial V'}{\partial R'} = \frac{\partial V(R')}{\partial R'} = - \frac{3V(R')}{R'}$$

Экваториальный конус потерь. Ранее было показано [6,44,45], что граничные условия для неадиабатических частиц в дипольном поле определяются как и для адиабатических, если форму стока частиц рассматривать не относительно касательной к  $\vec{B}$ , а относительно оси, направленной по касательной к ЦТ. В этом случае сохраняется известная в адиабатической теории связь между точкой отражения  $R_m$  и экваториальным значением питч-угла  $\alpha$ . Только вместо  $\alpha$  следует подставить значение квази-питч-угла



$\alpha^*$  (угла между вектором скорости и касательной к ЦТ). В итоге при  $R_m = R_g$  получается

$$\sin \alpha_c^* = [(4L-3)L^2]^{-1/4}, \quad (27)$$

где  $\alpha_c^*$  - критическое (предельное) значение  $\alpha^*$ , определяющее конус потерь, не зависящий от фазы и энергии частицы [6,44]. Другими словами, соотношение (27) следует из установленного численными экспериментами факта сохранения квазиadiaбатического инварианта  $\mu^* = mv^2 \sin^2 \alpha^* / 2B$  на траектории частицы между точкой отражения и экватором [6].

В данном случае это означает  $\sin^2 \alpha'^* / B' = \text{const}$  или

$$\frac{\sin^2 \alpha'^*}{B'_e} = \frac{1}{B'_m}, \quad (28)$$

где  $B'_m$  - значение поля в точке отражения  $R_m$ . Отсюда следует

$$\sin \alpha_c'^* = \left( \frac{B'_e}{B'_m} \right)^{1/2}.$$

Учитывая, что согласно (22) суммарное поле равно

$$B' = \frac{M}{R'^3} [1 - 2l'^3 b_0 + l'^6 b_0^2 + 3(1 + 2l'^3 b_0) \sin^2 \lambda]^{1/2}, \quad (29)$$

$$B'_e = \frac{M}{R'^3} - h = B_e \left( \frac{L}{L'} \right)^3 - h, \quad l' = R'/R_g, \quad l'(\lambda=0) = L',$$

и что в точке отражения  $R_m = R_g$  имеет место соотношение (см. (23))

$$\cos^2 \lambda'_m = \frac{1}{L(1 + \frac{b_0}{2})},$$

окончательно получим

$$\sin \alpha_c'^* = \{ (\frac{L}{L'} - b) \}^{1/2} \{ L^3 [(4L-3) + b_0(4L-4.5) + b_0^2 L] \}^{-1/4}. \quad (30)$$

Выражение для конуса потерь в обычных переменных  $\alpha$  и  $\phi$  имеет вид, аналогичный [6,44]

$$\begin{aligned} \cos \alpha_c' &= \cos \alpha_c'^* \cos \tilde{\alpha}'_0 - \sin \alpha_c'^* \sin \tilde{\alpha}'_0 \cos \phi, \\ \sin(\phi'_c - \tilde{\phi}'_0) &= \frac{\sin \alpha_c'^* \sin \phi}{\sin \alpha_c'} \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (31)$$

где параметры  $\tilde{\phi}'_0(b)$  и  $\tilde{\alpha}'_0(b)$  характеризуют ЦТ на экваторе и

которые предстоит еще вычислить,  $\sin \alpha_c^*$  определяется формулой (30). В дальнейшем штрих опускается, если это не вызывает затруднений.

Интегралы уравнений движения. В нашем случае из шести интегралов движения, представляющих собой общее решение уравнений (4), два являются точными и связаны с постоянством и аксиальной симметрией  $B'$ . Это энергия ( $mv^2 = \text{const}$ ) и момент количества движения (6) [23,27]. Для поля (22), описываемое лишь одной компонентой векторного потенциала  $A'_\varphi$ , выражение (6) принимает вид

$$\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{e\varphi}{mc} A'_\varphi = \rho^2 \frac{d\varphi}{ds} + \frac{eMc \cos^2 \lambda}{pcR} + \frac{ehR^2 \cos^2 \lambda}{2pc} = \text{const}, \quad (32)$$

где  $A'_\varphi = \frac{M \cos \lambda}{R'^2} + \frac{hR' \cos \lambda}{2}$ ,  $ds = v dt$ ,  $\rho = R \cos \lambda$ ,  $\varphi$  — полярная координата, которую следует отличать от ларморовской фазы с тем же обозначением. Используя соотношение

$$\rho' \frac{d\varphi}{ds} = \frac{v}{v'} \varphi' = \cos \beta,$$

где  $\beta$  — угол между элементом траектории и направлением  $\vec{e}_1$ , можно вместо (32) записать

$$2\gamma' = R_\perp \cos \lambda \cos \beta + \frac{\cos^2 \lambda}{R_\perp} + R_\perp^2 a \cos^2 \lambda. \quad (33)$$

Здесь  $\gamma'$  — константа аналогичная постоянной Штермера в дипольном поле [6,43],  $R_\perp = R/C_{\text{st}}$ ,  $C_{\text{st}}^2 = eM/mvc$  — штермеровская длина,  $a = ehC_{\text{st}}/2pc$ . Из (33) следует, что величина

$$\frac{2\gamma'}{R_\perp \cos \lambda} - \frac{\cos \lambda}{R_\perp^2} - R_\perp a \cos \lambda = \cos \beta \quad (34)$$

определяет условие для разделения всего пространства на разрешенные ( $|\cos \beta| \leq 1$ ) и запрещенные области ( $|\cos \beta| > 1$ ). Значение  $\beta$  определяется через питч-угол  $\alpha$  и фазу вращения частицы  $\varphi$  по формуле  $\cos \beta = \sin \alpha \sin \varphi$ .

Ведущий центр. При описании движения ведущего центра частицы вводился радиус-вектор  $R_{\text{л}}$  центра ларморовской окружности

$$\vec{R}_{\text{л}} = \vec{R} + \frac{1}{\omega} \{ [\vec{v} \vec{e}_s] - v_{\text{др}}' \}, \quad (35)$$

где

$$v'_{dr} = u_{\perp} = \frac{mc}{2eB'} (w^2 + 2v_{\parallel}^2) \frac{v_{\perp} B'}{B'}, \quad (36)$$

$v'_{dr}$  - поперечная дрейфовая скорость ведущего центра [22,23],  $w$  - скорость ларморовского вращения ( $\vec{v} = u + w$ ),  $u_{\parallel}$  - компонент  $u$  в  $B'$ . Величину  $(\text{grad} B')_{\perp}$  с учетом (22) и (23) можно представить в виде

$$v_{\perp} B' = \frac{\partial B'}{\partial R} \sin \eta + \frac{1}{R} \frac{\partial B'}{\partial \lambda} \cos \eta = \quad (37)$$

$$- \frac{3}{R} [B' + \frac{B_o^2 b_o}{B'} (1 - 3 \sin^2 \lambda - R^3 b_o)] \sin \eta + \frac{3 B_o^2 (1 + 2 R^2 b_o)}{2 B' R^2} \sin 2\lambda \cos \eta,$$

где  $R$  - в радиусах Земли,  $\eta$  - угол между силовой линией и радиусом-вектором! связан с  $\lambda$  соотношением

$$\text{tg} \eta = \frac{1}{2} \text{ctg} \lambda \left( \frac{1 - b_o R^3}{1 - 0.5 b_o R^3} \right). \quad (38)$$

Если  $v_{\perp} \approx w$ ,  $v_{\parallel} = u_{\parallel}$ , то

$$v'_{dr} = \frac{v^2}{2\omega'} (1 + \cos^2 \alpha) \frac{v_{\perp} B'}{B'} = \frac{v \chi'(\lambda)}{2} (1 + \cos^2 \alpha). \quad (39)$$

В дипольном поле ( $b_o = 0$ ) при достаточно малом  $\chi$

$$v'_{dr} = \frac{3v^2}{2\omega R} (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\cos \lambda (1 + \sin^2 \lambda)}{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{3/2}} =$$

$$\frac{v \lambda}{2} \left( \frac{R}{R_e} \right)^2 \frac{\cos \lambda (1 + \sin^2 \lambda)}{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^2} (1 + \cos^2 \alpha) \approx \quad (40)$$

$$\frac{v \lambda}{2} (1 + \cos^2 \alpha) f(\lambda) \left[ 1 - \frac{2}{3} \chi_i (\sin \alpha_e \sin \varphi_e - \sin \alpha \sin \varphi \cos^3 \lambda) \right],$$

$$f(\lambda) = \frac{\cos^3 \lambda (1 + \sin^2 \lambda)}{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^2}, \quad (R_e, \alpha_e, \varphi_e) = (R, \alpha, \varphi)_{\lambda=0}.$$

Здесь использовалось аналитическое выражение для  $R$  в виде (см. (34))

$$R = \frac{2 \gamma R_{e_i} \cos^2 \lambda}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \sin \alpha \sin \varphi \cos^3 \lambda}} \approx R_{e_i} \cos^2 \lambda \left( 1 + \frac{\sin \alpha \sin \varphi \cos^3 \lambda}{4 \gamma^2} \right), \quad (41)$$

$$R_{ei} = \frac{C_{ei}}{2\gamma}, \quad 2\gamma = (3/\chi_i)^{1/2},$$

где индекс "i" означает инжекцию.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Численное интегрирование (4) проводилось методом Рунге-Кутты 4-го порядка аналогично [6,44]. Основной целью численных расчетов является определение центральной траектории и ее свойств в суммарном поле  $V'$ . Прежде всего это касается вычисления параметров  $\tilde{\varphi}'_0(\chi, b)$  и  $\tilde{\alpha}'_0(\chi, b)$ . Точка инжекции выбиралась на заданной силовой линии с  $R'_i = 0.3R_e$  (см. (23)). Соответственно широта точки инжекции задавалась формулой

$$\cos^2 \lambda_i = \frac{0.3}{R_{ei}(1+0.0135b_o)} \quad (42)$$

а текущая координата  $\lambda$  определялась из соотношения (см. (29))

$$\sin^2 \lambda = \frac{\left(\frac{B'R^3}{B_o} - (1-R^3b_o)\right)^2}{3(1+2R^3b_o)} \quad (43)$$

где  $R_{ei}$  и радиус-вектор  $R$  частицы - в единицах  $R_e$ . Инжекция частицы для нахождения ЦТ осуществлялась вдоль  $V'$ , т.е. с питч-углом  $\alpha_i = 0(\pi)$ .

На рис. 1 и 2 показаны значения питч-угла  $\tilde{\alpha}'_0$  и фазы  $\tilde{\varphi}'_0$ , с которыми частица, стартуя вдоль поля при разных  $R_{ei}$  и  $b_o$ , приходит на экватор. Из рис.1 видно, что при малых  $\chi'_i$  величина  $\tilde{\alpha}'_0$  практически не зависит от  $b_o$  и  $R_e$ . Особенность движения состоит в том, что частица практически не вращается. С увеличением  $b_o$  значения  $\tilde{\alpha}'_0$  и  $\tilde{\varphi}'_0$  уменьшаются. Характер изменения  $\tilde{\alpha}'$  и  $\tilde{\varphi}'$  на центральной траектории от точки инжекции до экватора показан на рис.3. Функция  $\tilde{\varphi}'(\chi_i)$  (рис.2) более чувствительна к  $b_o$  и  $R_e$ . При  $b_o = 0$  зависимость  $\tilde{\alpha}(\chi_i)$  и  $\tilde{\varphi}(\chi_i)$  от  $R_e$  исчезает.

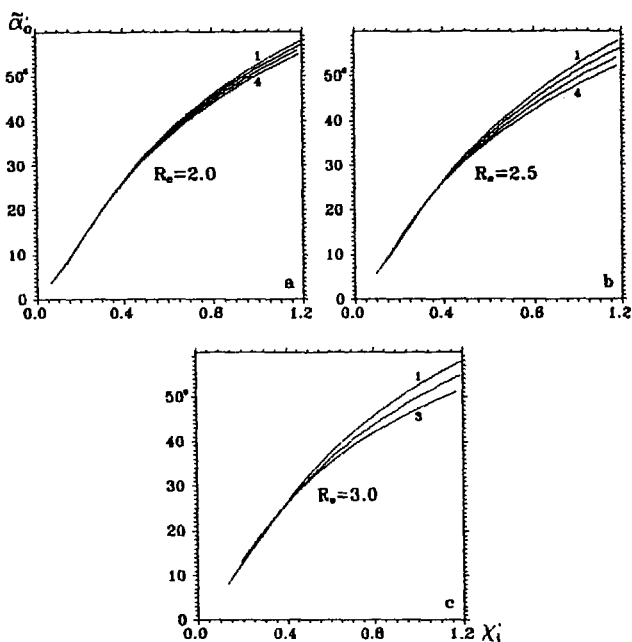


Рис.1. Зависимость  $\alpha_0'$  от  $\chi_1'$ ,  $R_e$  и  $b_0$ . Для а, б, с кривые 1 соответствуют  $b_0=0$ ; 2 -  $b_0=0.003$ ; 3 -  $b_0=0.006$ ; 4 -  $b_0=0.009$

Экваториальные значения радиуса-вектора  $\tilde{R}_0'$  и  $\chi_e'=\chi'(R=\tilde{R}_0')$  для ЦТ представлены на рис 4 и 5. Согласно рис.5 функция  $\chi_e'(\chi_1', R_e) \approx \chi_e'(\chi_1')$  при  $\chi_1' \leq 0.6$  и  $b_0 \leq 0.006$ . Заметим, что  $b_0 \geq 0.006$  соответствует большой магнитной буре ( $h \geq 1.9 \cdot 10^{-3}$  Э) [41]. Величины  $\varphi_0'$  и  $\alpha_0'$  можно с точностью  $\leq 3\%$  аппроксимировать функциями

$$\cos \tilde{\varphi}_0' = (1.367 - 1.12b) \chi_1'^{-0.117 + 0.50b} \exp\left(\frac{-0.677 + 1.29b}{\chi_1'}\right), \quad 0.06 \leq \chi_1' \leq 1.2$$

$$\sin \tilde{\alpha}_0' = (1.275 - 0.95b) \chi_1'^{1.1 - 0.78b} \exp\left(\frac{0.002 - 0.1b}{\chi_1'}\right), \quad 0.06 \leq \chi_1' \leq 0.32$$

$$\sin \tilde{\alpha}_0' = (1.085 - 0.83b) \chi_1'^{0.112} \exp\left(\frac{-0.313 + 0.26b}{\chi_1'}\right), \quad 0.32 \leq \chi_1' \leq 1.2.$$

(43а)

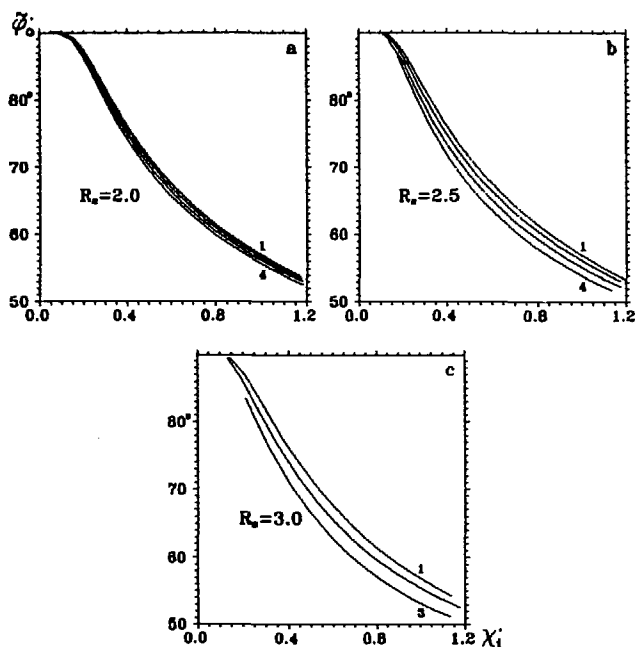


Рис.2. Зависимость  $\varphi_0'$  от  $\chi_1'$  при разных  $R_e$  и  $b_0$ . Обозначения те же, что и на рис.1.

Основным элементом рассматриваемой модели является ЦТ, смысл введения которой состоит в том, что именно на нее накручиваются частицы, а не на силовую линию. Наиболее отчетливо спиральное вращение произвольной захваченной частицы вокруг соответствующей ЦТ проявляется при относительно больших значениях параметра  $\chi$ . Иллюстрацией этого беспорогового эффекта "привязывания" частицы к ЦТ являются рис.6 и 7, на которых показаны силовые линии поля  $B'$ , ЦТ и траектории частицы, имеющей точки отражения (т.е.  $\alpha = \pi/2$ ) на  $R = 0.3R_s$  и  $R = R_s$  для разных  $R_e$ ,  $b_0$  и энергий  $W$ . На рис.6 ЦТ состоит из двух траекторий - верхней ЦТ<sub>1</sub> и нижней ЦТ<sub>2</sub>, которая построена следующим образом. Инжектированная в верхнем полушарии частица

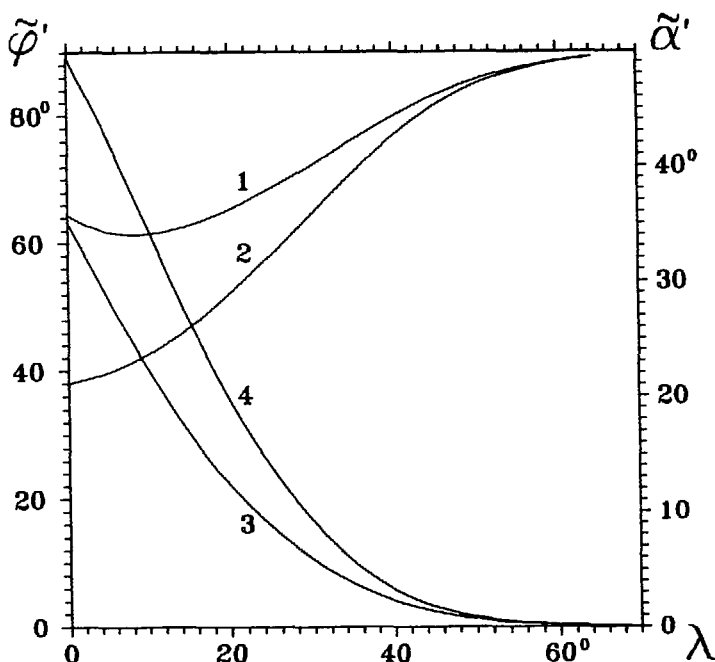


Рис.3. Изменение  $\tilde{\varphi}'$  и  $\tilde{\alpha}'$  с широтой  $\lambda$  для частицы с  $W=600$  МэВ при  $R_e=3.0$  и двух значениях  $b_0$ : 1- $\tilde{\varphi}'(\lambda)$  при  $b_0=0$  ( $\chi_1 \approx 0.14$ ); 2- $\tilde{\varphi}'(\lambda)$  при  $b_0=0.006$  ( $\chi_1 \approx 1.1$ ); 3- $\tilde{\alpha}'(\lambda)$  при  $b_0=0$ ; 4- $\tilde{\alpha}'(\lambda)$  при  $b_0=0.006$ .

"останавливается" на экваторе в точке  $\tilde{R}'_0$ , куда она приходит с питч-углом  $\tilde{\alpha}'_0$  и фазой  $\tilde{\varphi}'_0$ , затем ее фаза прокручивается до величины  $\pi - \tilde{\varphi}'_0$ , и "отпускается" дальше. В этом случае она пойдет по симметричной траектории так, что  $\tilde{R}'_1(\lambda) = \tilde{R}'_2(-\lambda)$ ,  $\tilde{\alpha}'_1(\lambda) = \tilde{\alpha}'_2(-\lambda)$ , и  $\tilde{\varphi}'_1(\lambda) + \tilde{\varphi}'_2(-\lambda) = \pi$ . Если этого не сделать, то данная частица после экватора закрутится и в зависимости от  $W$  отразится при  $R_m > R_l$  или  $R_m < R_l$ .

Прокручивание фазы на экваторе ( $\tilde{\varphi}'_{01} > \pi - \tilde{\varphi}'_{01} = \tilde{\varphi}'_{02}$ ) равносильно изменению компонент скорости по формуле

$$\begin{aligned} v_{x_2} &= -v_{\perp} \cos(\varphi'_{01} - \Phi), \\ v_{y_2} &= -v_{\perp} \sin(\varphi'_{01} - \Phi), \end{aligned} \quad (44)$$

$v_{z_2} \equiv v_{z_1}$ ,  
 где  $\Phi = \arctg|\frac{v_y}{v_x}|$ ,  $v_{\perp}^2 = v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2$ ,  $x, y$ - компоненты  $\tilde{R}'_0$ .  
 $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$  и  $v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}$  - соответственно компоненты скорости частицы, пришедшей в точку  $\tilde{R}'_0$  и ушедшей из нее с той же скоростью  $|v|$ .

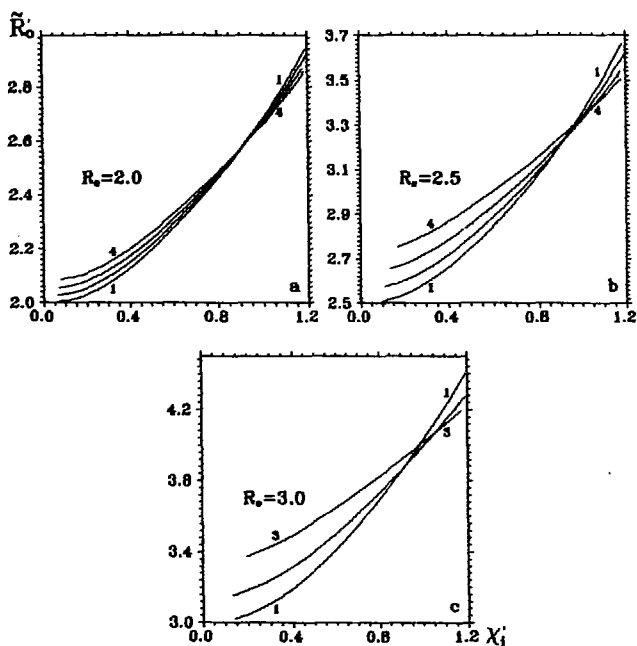


Рис.4. Зависимость  $\tilde{R}'_0$  от  $\chi'_i$  при тех же значениях  $R_e$  и  $b_0$ , что и на рис.1.



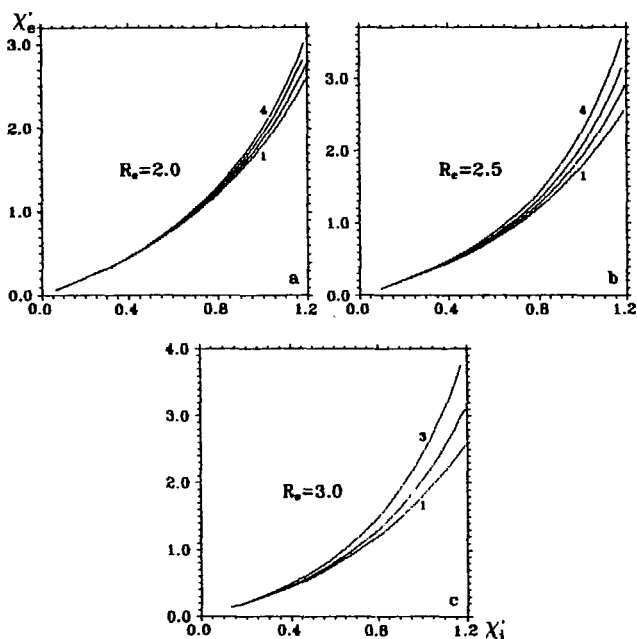


Рис.5. Функция  $\chi_e'(\chi_i')$  для ЦТ (обозначения см. на рис.1.).

Таким образом, ЦТ за счет переменной  $\tilde{\varphi}'(\lambda)$  испытывает на экваторе излом, характеризуемый угловым расстоянием между точками  $\tilde{\alpha}'_0, \tilde{\varphi}'_{01}$  и  $\tilde{\alpha}'_0, \tilde{\varphi}'_{02}$ , имеющим величину

$$\nu' = 2 \arcsin(\sin \tilde{\alpha}'_0 \sin \delta'), \quad \delta' = \pi/2 - \tilde{\varphi}'_{01} = \tilde{\varphi}'_{02} - \pi/2. \quad (45)$$

С величиной излома (45) связано скачкообразное изменение квазиadiaбатического инварианта  $\mu^*$  и соответственно  $\alpha^*$ , которое по аналогии с дипольным полем [6,7,45] имеет вид

$$\Delta \alpha^{*'} \approx \nu' \cos \varphi \approx \frac{1}{2} \operatorname{tga}' \left( \frac{\Delta \mu'}{\mu'} \right). \quad (46)$$

Что касается общих сведений о свойствах ЦТ, то они сравнительно легко получаются теоретическим путем.

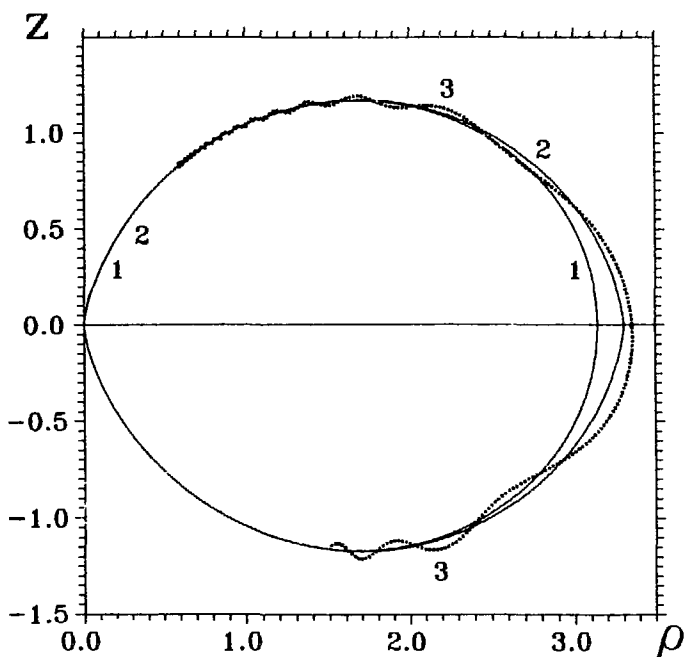


Рис.6. Силовая линия и орбиты двух частиц в меридиональной плоскости магнитного диполя при  $b_0=0.003$  и  $R_e=3.0$ . 1-силовая линия суммарного поля; 2-ЦТ ( $R_1=0.3R_3$ ,  $\alpha_1=0$ ,  $W=200$  МэВ ( $\chi_1 \approx 0.388$ )); 3(пунктир)- траектория частицы с той же энергией между двумя точками отражения ( $R_1(Z>0) \approx 1.0$ ,  $\alpha_1 = \pi/2$ ).

Уравнение ЦТ. Приближенное аналитическое выражение для ЦТ может быть получено из следующих простых соображений. Из-за кривизны магнитных линий всегда после инжекции с  $\alpha_1=0$  должна возникать компонента скорости  $v_{\perp} = v \sin \alpha(\lambda)$  и дрейф, определяемый формулой (39). При этом в силу выбранной нами системы координат (21) на начальном этапе фаза частицы  $\varphi \approx \pi/2$ . Далее, исходя из определения ЦТ, естественно предположить, что на ней частица не вращается, т.е. ее

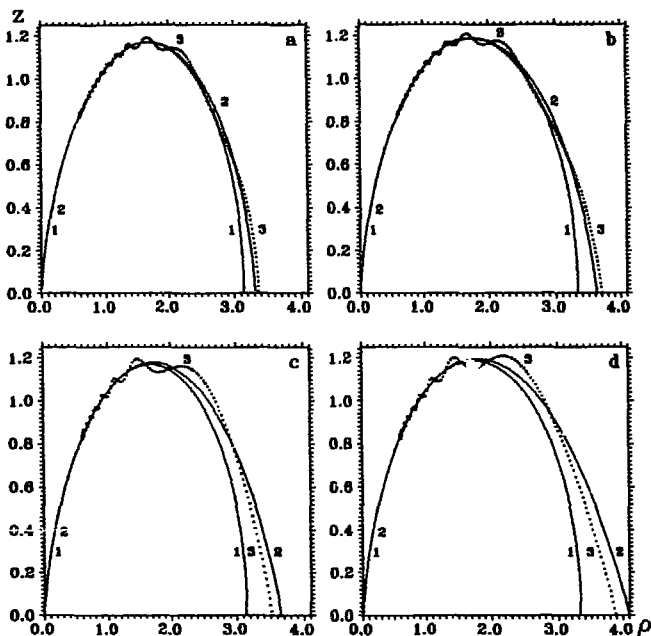


Рис.7. Взаимное расположение силовой линии (кривая 1), ЦТ (кривая 2) и траектории частицы с  $R_i \approx 1.0$  и  $\alpha_i = \pi/2$  (пунктирная кривая 3) при двух значениях  $W$  и  $b_0$  для  $R_e = 3.0$  а -  $W=200$  МэВ,  $b_0=0.003$  ( $\chi'_i \approx 0.388$ ); б-  $W=200$  МэВ,  $b_0=0.006$  ( $\chi'_i \approx 0.576$ ); в-  $W=600$  МэВ,  $b_0=0.003$  ( $\chi'_i \approx 0.734$ ); д-  $W=600$  МэВ,  $b_0=0.006$  ( $\chi'_i \approx 1.1$ ).

магнитный момент в лабораторной системе координат

$$\mu = \frac{m}{2B'} |\vec{v}_\perp - \vec{v}'_{dr}|^2 \sim [\sin \tilde{\alpha}' - \frac{\chi'(\lambda)}{2}(1 + \cos^2 \tilde{\alpha}')] = 0. \quad (47)$$

Отсюда в первом приближении следует

$$\sin \tilde{\alpha}' = \frac{[1 + 2\chi'^2(\lambda)]^{1/2} - 1}{\chi'(\lambda)} \approx \chi'(\lambda). \quad (48)$$

Для определения  $R'(\lambda)$  запишем (33) в виде

$$R'_s = \frac{R_s'^2}{2\gamma'} \cos \beta \cos \lambda + \frac{\cos^2 \lambda}{2\gamma'} + \frac{R_s'^3}{2\gamma'} \text{ а } \cos^2 \lambda. \quad (49)$$

Из (49) в первом приближении по  $b_0$  будем иметь

$$R' \approx R + R^3 \frac{b_0}{2} R_{ei} \cos^2 \lambda, \quad (50)$$

где радиус-вектор  $R$  (в радиусах Земли) определяется выражением (41). Учитывая, что  $\sin \alpha' \sin \varphi' \approx \sin \alpha' \approx \chi'(\lambda)$ , вместо (50) получим

$$\begin{aligned} \tilde{R}' &\approx R_{ei} \cos^2 \lambda \left[ 1 + \frac{\chi_i \chi'}{3} \cos^3 \lambda + \frac{b}{2} \cos^6 \lambda (1 + \chi_i \chi' \cos^3 \lambda) \right] \approx \\ &\approx R_{ei} \cos^2 \lambda \left[ 1 + \frac{\chi_i^2}{3} \int \cos^3 \lambda + \frac{b}{2} \cos^6 \lambda (1 + \chi_i^2 \int \cos^3 \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

При  $\chi_i \ll 1$  на экваторе имеем

$$\tilde{R}'_0 \approx R_{ei} \left[ 1 + \frac{\chi_i^2}{3} + \frac{b}{2} (1 + \chi_i^2) \right]. \quad (52)$$

Выражение для ЦП (51) переходит в уравнение силовой линии (24) при  $\chi_i = 0$  ( $v = 0$ ), т.е. когда движение отсутствует, подтверждая этим тот в общем очевидный факт, что силовая линия не может быть траекторией частицы.

Теперь обратимся к дискретной модели движения за полупериод продольных колебаний, сводящейся к построению соответствующего отображения. В данном случае задача несколько упрощается, поскольку известна исходная модель в "эталонном" виде (см. (17,18)).

## ОТОБРАЖЕНИЕ

Как уже отмечалось, отыскание адиабатических инвариантов с последующим построением отображения представляет собой одно из средств для того, чтобы пробиться через аналитические трудности в нелинейных задачах и обрести не только качественное, но зачастую количественное понимание исследуемого явления. В частности, с помощью отображения легко различаются режимы движения нелинейной системы. Имеется в виду не тот метод сечения Пуанкаре, который получается путем численного интегрирования уравнений Гамильтона, а прямая итерация отображения, заданного на характерном периоде движения. Для физики нелинейных явлений свойственно стремление к модельным

представлениям, начиная от модели эволюции простой системы "частица-поле" и кончая синергетической концепцией саморазвития мира [50].

В нашем случае упрощение достигается переходом от дифференциальных уравнений (19) к дискретному отображению (17) или его стандартному виду (18), подробно описанному в [35] (см. также [5,56] и приведенные там ссылки). Отображение (18) является достаточно универсальным, особенно его первое уравнение. К нему сводятся, кроме задач нелинейной динамики частиц в магнитных ловушках различных типов [4,7,51], также задачи о движении частиц в волновых полях [52], динамическом хаосе в небесной механике [53,54], стохастическом ускорении космических лучей (ускорение Ферми) [55] и т.п.

Однако в нашем случае область применимости этой модели в таком виде ограничена малыми значениями  $\chi'$ . Уже при  $\chi' \geq 0.1$  следует "привязывать" частицы не к силовым линиям, а к ЦТ. На уровне алгебраических формул (17) это выражается в появлении зависимости "набега" фазы  $\Delta\theta(\mu_{n+1})$  от фазы  $\theta_n$ , что является следствием существования взаимосвязи между  $\alpha', \alpha^{*'}, \phi$  и  $\varphi = \theta - \pi/2$  (см. (31)). В частности, из (31) следует, что

$$\cos \alpha^{*'} = \cos \alpha' \cos \tilde{\alpha}'_0 + \sin \alpha' \sin \tilde{\alpha}'_0 \cos(\varphi' - \tilde{\varphi}'_0). \quad (53)$$

Поэтому, прежде чем вычислить  $\Delta\theta$ , нужно найти  $\Delta\phi$ . Величину набега фазы с учетом (28) можно представить в виде [7,57]

$$\Delta\phi = \frac{\pi\bar{\omega}'}{\Omega'} = \frac{6F(\alpha^{*'}, b)}{\chi'}, \quad F(\alpha^{*'}, b) = \int_0^{\lambda_m} f(\alpha^{*'}, b) d\lambda,$$

$$f(\alpha^{*'}, b) = \frac{B'}{B_e R_e} \left[ \frac{R'^2 + \frac{(dR')^2}{d\lambda}}{1 - \frac{B'}{B_e} \sin^2 \alpha^{*'}} \right]^{1/2}. \quad (54)$$

Значения  $F(\alpha^{*'}, b)$  с точностью  $\leq 4\%$  при  $b_0 < 0.01$  аппроксимируются функцией

$$F(\alpha^{*'}, b) = (-1.91b \cos^2 \alpha) \sin^{-1.948} \alpha - 0.255 - 2.62b + 1.62b^2. \quad (55)$$

В итоге после объединения формул (31), (53) и (54) вместо (16) и (17) будем иметь

$$\mu'_{n+1} = \mu'_n + [\Delta\mu'(\alpha'_n)]_m \sin\theta'_n,$$

$$\theta'_{n+1} = \theta'_n + \Delta\theta(\mu'_{n+1}) \quad , \quad (56)$$

где

$$[\Delta\mu']_m = \xi' \mu' =$$

$$= 0.74(1+2b) \frac{14 - \sin^2 \alpha'}{\sin 2\alpha'} \exp\left[-\frac{3\psi(\alpha')}{\chi'}(1-1.5b)\right], \quad (57)$$

$$\psi(\alpha') = \frac{1}{3\sqrt{2}\sin^2 \alpha'} \left\{ \frac{1 + \sin^2 \alpha'}{\sin \alpha'} \ln \frac{1 + \sin \alpha'}{\cos \alpha'} - 1 \right\},$$

$$\Delta\theta = \arcsin\left(\sin\phi_{n+1} \frac{\sin \alpha'^*_{n+1}}{\sin \alpha'_{n+1}}\right) - \arcsin\left(\sin\phi_n \frac{\sin \alpha'^*_n}{\sin \alpha'_n}\right),$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \tilde{\phi}_0 + \frac{6F(\alpha'^*_{n+1}, b)}{\chi'}, \quad (58)$$

$$\sin\phi_n = \sin \alpha'_n \cos(\theta_n - \tilde{\phi}_0') / \sin \alpha'^*_n,$$

$$\sin \tilde{\phi}_0 = \sin \tilde{\phi}'_0 / \cos \frac{\nu'}{2},$$

$$\cos \alpha'^*_n = \cos \alpha'_n \cos \tilde{\alpha}'_0 - \sin \alpha'_n \sin \tilde{\alpha}'_0 \sin(\theta_n - \tilde{\phi}'_0) \quad ,$$

$$\cos \alpha'^*_{n+1} = \cos \alpha'_{n+1} \cos \tilde{\alpha}'_0 - \sin \alpha'_{n+1} \sin \tilde{\alpha}'_0 \sin(\theta_n - \tilde{\phi}'_0).$$

Граничное условие (конус потерь) задается выражением (30). Вывод формулы (57) приведен в [8].

Качественную картину влияния поля  $b$  на характер движения можно представить с помощью отображения типа (18). В ослабленном поле  $\vec{B}'$  параметр стохастичности увеличивается [8]:

$$K' = (1+2b) K(\chi') \exp\left(\frac{4-5\psi b}{\chi'}\right), \quad (59)$$

в результате чего частицы могут в зависимости от начальных условий "перескочить" из адиабатического режима движения в стохастический. Эту ситуацию иллюстрирует рис.8, являющийся компьютерной визуализацией 250 итераций отображения (18) с учетом (59). Введение поля  $\vec{b}$  сказывается также на размере конуса потерь (см. (30)).

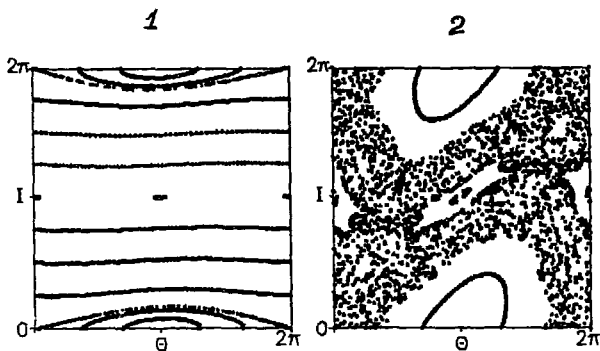


Рис.8. Фазовые портреты для  $L=3.0$ ,  $W=30$  МэВ,  $\alpha=30^\circ$ .  
 1- случай с невозмущением ( $b=0$ ,  $\chi=0.108$ ,  $K=0.07$ )  
 2- с учетом возмущения ( $b_0=0.003$ ,  $b=0.081$ ,  $\chi'=0.14$ ,  $K'=1.7$ )  
 в обоих случаях инжектировались 13 частиц, для каждой проводилось 250 итераций.

Детальное исследование этого эффекта с помощью численных экспериментов с отображением (56) будет проведено отдельно.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развиваемый здесь подход исследования движения частиц в стационарных магнитных полях дипольного типа расширяет возможности существующих моделей и позволяет достаточно просто описывать эволюцию неадиабатических частиц. Отображение (56)–(58) можно рассматривать в качестве исходной математической модели физической системы "частица – геомагнитное поле". Сюда относится и нестационарный вариант задачи, когда магнитное возмущение  $b$  зависит от времени.

Полученные результаты могут быть полезны при исследовании динамики частиц в магнитных полях различной конфигурации.

## Литература

1. Stormer C.- The Polar Aurora, Oxford: Clarendon Press, 1955.
2. Альвен Г., Фельдхаммар К.-Г. - Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.
3. Нортроп Т. - Адиабатическая теория движения заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967.
4. Чириков Б.В.- Вопросы теории плазмы. Вып.13 М.: Энергоатомиздат, 1984, с.3 - Proc.R.Soc.Lond.1987, v.413, p.145
5. Лихтенберг А.,Либерман М. - Регулярная и стохастическая динамика. М.:Мир, 1984.
6. Амирханов И.В.,Ильина А.Н.,Ильин В.Д.,Юшков Б.Ю.- Космические исследования,1991, т.29, N2, с.282.
7. Ильин В.Д.,Ильин И.В.,Кузнецов С.Н.,Юшков Б.Ю.- Письма в ЖЭТФ, 1992, т.55, N11, с.621.
8. Ильин В.Д.,Ильин И.В.,Кузнецов С.Н.-Космические исследования , 1988, т.26, N3, с.420.
9. Долгинов Ш.Ш.- Космические исследования, 1991, т.29, N5, с.754.
10. Smith E.J. et al.- J.Geophys.Res.,1974, v.79, N25, p.3501.
11. Acuna M.H.,Ness N.F.- Nature, 1975, v.253, N5490, p.327.
12. Smith E.J. et al.- Science, 1980, v.207, N4429, p.407.
13. Whang Y.C.,Gringauz K.I.- Adv.Space Res.,1982, v.2, N1, p.61.
14. Пайерлс Р.- УФН, 1983, т.140, N2, с.315.
15. Баранцев Р.Г.- Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. механ., 1976, N1, Вып.1, с.69.
16. Бабич В.М.,Булдырев В.С.- Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. матем., 1977, N13, Вып.3, с.5.
17. Моисеев Н.Н.- Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
18. Найфе А.Х.- Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
19. Чириков Б.В.- В сб.: Асимптотические методы математической физики. Киев : Наукова думка, 1986. - Препринт 86-22.



Новосибирск : ИЯФ СО АН СССР, 1986.

20. Чириков Б.В.- Физика плазмы, 1978, т.4, №3, с.521.
21. Лихтенберг А.- Динамика частиц в фазовом пространстве. М.: Атомиздат, 1972.
22. Редерер Х.- Динамика радиации, захваченной геомагнитным полем. М.: Мир, 1972.
23. Ленерт Б.- Динамика заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967.
24. Волосов В.М., Моргунов Б.И.- Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во Московского ун-та, 1971.
25. Брагинский С.И.- Укр. матем. журн., 1956, т.8, №2, с.119.
26. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.- Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958.
27. Морозов А.И., Соловьев Л.С.- Вопросы теории плазмы, Вып.2, М.: Госатомиздат, 1963.
28. Моргунов Б.И.- Вестн. Моск. ун-та, Сер. Физ., астр., 1964, №2, с.3.
29. Siambis J.G., Northrop T.G.- Phys.Fluids., 1966, v.9, N10, p.2001.
30. Hastie R.J., Taylor J.B., Haas F.A.- Ann. Phys., 1967, v.41, V2, p.302.
31. Gardner C.S.- Phys.Fluids., 1966, v.9, N10, p.1997.
32. Заславский Г.М., Чириков Б.В.- УФН, 1971, т.105, вып.1, с.3.
33. Cohen R.H., Rowlands G., Foote J.H.- Phys.Fluids, 1978, v.21, N4, p.627.
34. Hastie R.J., Hobbs G.D., Taylor J.B.- Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. IAEA. Vienna, 1969, v.1, p.389.
35. Chirikov B.V.- Phys.Reports, 1979, v.52, N5, p.265.
36. Крускал М.- Адиабатические инварианты. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
37. Ильин В.Д., Ильина А.Н.- ЖЭТФ, 1978, т.75, Вып.2(8), с.518.
38. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Ильина А.Н., Ильин В.Д.- Сообщение ОИЯИ, P11-85-88, Дубна, 1985.

39. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Ильин И.В., Ильин В.Д.-  
Сообщение ОИЯИ, P11-91-68, Дубна, 1991.
40. Звонков А.В., Тимофеев А.В.- Физика плазмы, 1985, т.11, N3,  
с.320.
41. Акасофу С.И., Чепмен С.- Солнечно-земная физика. ч.2, М.:  
Мир, 1975, гл.8.
42. Ильин В.Д.- Геомагнетизм и аэрономия, 1981, т.21, N2,  
с.342.
43. Дорман Л.И., Смирнов В.С., Тясто М.И.- Космические лучи в  
магнитном поле Земли. М.: Наука, 1971, гл.5.
44. Амирханов И.В. и др.- Сообщение ОИЯИ, P11-87-377,  
Дубна, 1987.
45. Амирханов И.В. и др.- ЖЭТФ, 1993, т.104, N8, с.2721.
46. Kuznetsov S.N. - International Workshop Space Radiation  
Environment: Empirical and Physical Models, Dubna, 1993,  
p.27.
47. Бобров М.С.- Геомагнетизм и аэрономия, 1993, т.31, N3,  
с.410.
48. Медведев Б.В.- ТМФ, 1989, т.79, N3, с.404.
49. Хесс В.- Радиационный пояс и магнитосфера. М.: Атомиздат,  
1972, гл.3.
50. Николис Г., Пригожин И.- Познание сложного. М.: Мир, 1990
51. Tagare S.G.- Phys.Rev.A, 1986, v.34, N2, p.1587.
52. Заславский Г.М.- ЖЭТФ, 1985, т.88, N6, с.1984; 1989, т.96,  
N5(11), с.1563.
53. Petrosky T.Y.- Phys.Lett.A, 1986, v.117, p.328.
54. Вечеславов В.В., Чириков Б.В.- Препринт ИЯФ СО АН СССР,  
86-184, Новосибирск, 1986. - Письма в Астрон. журнал,  
1988, т.14, N4, с.357.
55. Заславский Г.М., Чириков Б.В.- ДАН СССР, 1964, т.159, N2,  
с.306.
56. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.- Введение в нелинейную  
физику. М.: Наука, 1988.
57. Ильин В.Д., Ильина А.Н. - Физика плазмы, 1982, т.8, N1,  
с.148.

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 марта 1994 года.