сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р10-93-125

А.Ю.Бонюшкина, В.В.Иванов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, РЕГИСТРИРУЕМЫХ СПЕКТРОМЕТРОМ МАСПИК

1993

Введение

Для проведения исследований механизма ядерных реакций при релятивистских энергиях на пучках частиц синхрофазотрона ОИЯИ используется двухплечевой магнитный спектрометр МАСПИК [1]. Сведения об исследуемых процессах извлекаются из импульсных спектров вторичных частиц, которые должны быть измерены и восстановлены с высокой точностью. Для определения импульсов заряженных частиц в установке используются спектрометрические магниты и проволочные камеры. В настоящей работе рассмотрены алгоритмы восстановления импульсов вторичных частиц, регистрируемых в основном плече спектрометра [1].

1 Эксперимент

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.

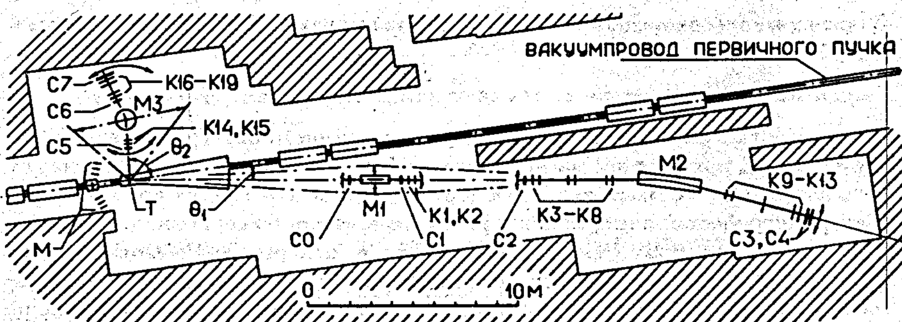

Рис. 1. Схема спектрометра МАСПИК: T – мишень, M – мониторы пучка, $M1, M2, M3$ – магниты, $C0 \div C7$ – сцинтилляционные счетчики, $K1 \div K19$ – пропорциональные камеры.

В качестве анализирующего магнита в основном плече спектрометра [2] ис-

[1] Краткое изложение рассматриваемых в работе алгоритмов было приведено ранее в статье [2].

[2] Магнит M2 на рис.1.

пользуется электромагнит СП12А, позволяющий отклонять однозарядные частицы с импульсом 10 ГэВ/с на угол $\approx 10^0$. Система проволочных камер обеспечивает возможность измерения углов отклонения и пространственных траекторий регистрируемых частиц с относительной точностью $(0,1 \div 0,2)\%$ [2]. Для того, чтобы в этих условиях определять импульсы детектируемых частиц с высокой точностью ($\approx 0,2 \div 0,3\%$), необходимо знание интеграла индукции магнитного поля[3] вдоль её траектории с максимально возможной точностью $\approx 0,1\%$, а также применение эффективных[4] алгоритмов восстановления импульса.

2 Определение импульсов вторичных частиц

Импульс вторичной заряженной частицы восстанавливался по измеряемым на опыте величинам:

- направлению её движения до попадания в магнитное поле,
- месту входа в поле,
- углу отклонения частицы полем магнита.

Угол отклонения φ определялся как угол между прямыми, аппроксимирующими треки частицы, зарегистрированные входным и выходным сегментами проволочных камер основного плеча спектрометра (см. рис.1).

2.1 Приближение однородного магнитного поля

В приближении однородного магнитного поля импульс p вычислялся по формуле

$$p = \frac{c}{\varphi},$$

где константа c определялась заранее путем численного интегрирования траекторий частиц в известном магнитном поле. Этот метод позволял восстанавливать импульсы с точностью $\approx 0,5\%$ (см. рис.2) и использовался при обработке спектрометрической информации в реальном времени эксперимента.

Однако поскольку импульсное разрешение спектрометра позволяло вычислять импульс с более высокой точностью, то при статистической обработке экспериментальных данных импульсы частиц определялись с помощью функции, учитывающей пространственную неоднородность магнитного поля.

[3]С этой целью были выполнены измерения пространственного распределения магнитного поля электромагнита СП12А, подробно описанные в работе [2].

[4]По точности восстановления импульса и скорости вычислений.

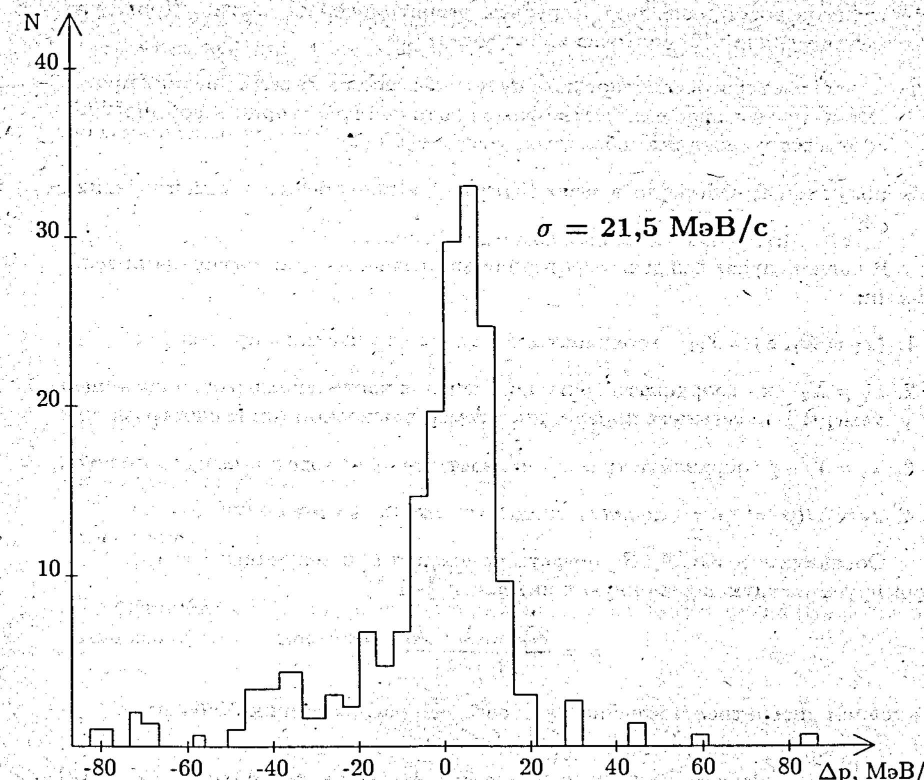

Рис. 2. Гистограмма, характеризующая точность вычисления импульсов в приближении однородного поля

2.2 Разложение в ряд по полиномам Чебышева

В случае неоднородного магнитного поля величина угла φ является функцией импульса, направления и места входа частицы в магнитное поле

$$\varphi = \varphi(X_1, Y_1, X_2, Y_2, p), \tag{1}$$

где (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) – точки в пространстве, задающие прямолинейную траекторию частицы с импульсом p перед входом в магнитное поле.

Необходимо построить обратную ей функцию

$$p = p(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \varphi), \tag{2}$$

позволяющую восстанавливать импульсы регистрируемых частиц. Процедура построения функции (2) состояла в следующем [3]:

1. через известное магнитное поле путем численного интегрирования проводится определённое количество фиксированных траекторий и формируется соответствующий им набор углов отклонений (1);
2. полученный набор углов используется для построения искомой функции (2).

В нашем случае каждая траектория определялась пятью случайными величинами:

1. ($x_1 = X_1$, $x_2 = Y_1$) – координаты точки вылета частицы из мишени;
2. $x_3 = X_2$ – x - координата точки пересечения частицей плоскости последней камеры 1-го сегмента проволочных камер в основном плече спектрометра;
3. $x_4 = Y_2$ – y-координата траектории частицы на выходе из магнитного поля;
4. $x_5 = 1/(p \cdot c)$, p – импульс частицы, c - скорость света.

Обозначим через $[A_i, B_i]$ область изменения i- й величины: $i = 1, 2, \ldots, 5$. Нормируем каждую переменную к интервалу $[-1, 1]$

$$g_i = \frac{2X_i - A_i - B_i}{B_i - A_i}$$

и выберем дискретное число значений согласно распределению Чебышева:

$$g_i = g(\alpha_i) = \cos\frac{(2\alpha_i - 1)\pi}{2N_i}, \qquad \alpha_i = 1, \ldots, N_i, \quad i = 1, \ldots, 5. \tag{3}$$

Величины N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 подбираются исходя из требуемой точности вычисления импульса эмпирическим путём.

Выбранный вариант разбиения переменных определяет набор фиксированных траекторий на входе в магнитное поле в количестве, равном произведению $\prod_{i=1}^{5} N_i$. Эти траектории проводятся через заданное магнитное поле путём численного интегрирования[5] и вычисляется соответствующий им набор углов отклонения $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Определив пределы изменения углов отклонения $[A_6, B_6]$ и приведя их к интервалу [-1,1]:

$$g_6 = \frac{2\varphi - A_6 - B_6}{B_6 - A_6},$$

по аналогии с (3), выбирается дискретное число значений g_6:

$$g_6 = g(\alpha_6) = \cos\frac{(2\alpha_6 - 1)\pi}{2N_6}, \qquad \alpha_6 = 1, \ldots, N_6, \quad N_6 \le N_5.$$

[5]Для этого использовался метод Рунге-Кутта .

Удобно взять $N_6 = N_5$, так как это обеспечивает приближение значений импульса как функции углов отклонений по методу наименьших квадратов [3].

Используя вычисленный массив углов отклонений для каждого набора переменных x_1, x_2, x_3, x_4 (всего $\prod_{j=1}^{4} N_j$ наборов), можно разложить $p_i \equiv x_5^i$ по ортогональным многочленам[6]:

$$p_i = b_1\mu_1(d_i) + b_2\mu_2(d_i) + \ldots + b_n\mu_n(d_i), \quad d_i \equiv \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, N_5; \tag{4}$$

$\mu_1(d_i), \ldots, \mu_n(d_i)$ – ортогональные многочлены на множестве $d_1, d_2, \ldots, d_{N_5}$.

Эти многочлены строятся следующим образом:

$$\mu_1(d_i) = d_i; \qquad \mu_2(d_i) = (d_i - \gamma_1)\mu_1(d_i);$$

$$[\mu_1\mu_2] = [d_i\mu_1^2] - \gamma_1[\mu_1^2] = 0;$$

$$\gamma_1 = \frac{[d_i\mu_1^2]}{[\mu_1^2]} = \frac{[d_i^3]}{[d_i^2]};$$

здесь введено обозначение $\sum_i a_i b_i = [ab]$.

Рекуррентное соотношение для вычисления многочленов степени $k \ge 3$ имеет вид

$$\mu_{k+2} = (d_i - \gamma_{k+1})\mu_{k+1} - \beta_k\mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Коэффициенты γ_{k+1} и β_k можно легко получить из соотношения (5), воспользовавшись ортогональностью многочленов:

$$\beta_k = \frac{[d\mu_k\mu_{k+1}]}{[\mu_k^2]}; \qquad \gamma_{k+1} = \frac{[d\mu_{k+1}^2]}{[\mu_{k+1}^2]}.$$

Используя ортогональность многочленов, определим из разложения (4) коэффициенты b_j:

$$b_j = \frac{\sum_{k=1}^{N_5} P_k\mu_j(d_k)}{\sum_{k=1}^{N_5} \mu_j^2(d_k)}.$$

Подставляя в (4) значения углов отклонений, отвечающих распределению Чебышева, получим массив нормированных импульсов g_5 размерностью, равной произведению $\prod_{i=1}^{5} N_i$.

Используем этот массив для построения искомой функции. Для этого воспользуемся полиномами Чебышева, образующими ортогональный набор [4]:

$$\sum_\alpha T_j(X_\alpha)T_k(X_\alpha) = \delta_{jk} \cdot const.$$

[6]Рассматриваемая здесь процедура вычисления массива нормированных импульсов использовалась нами в течение длительного времени, поэтому мы посчитали необходимым изложить её подробно. Однако для получения указанных импульсов можно воспользоваться более простым алгоритмом, приведённым в приложении .

если

$$X_\alpha = \cos\frac{(2\alpha - 1)\pi}{2N}, \quad \alpha = 1, ..., N.$$

Представим g_5 в виде

$$g_5 = \sum_{ijklm} C_{ijklm} T_i(g_1) T_j(g_2) T_k(g_3) T_l(g_4) T_m(g_6) \qquad (6)$$

$i = 0, ..., N_1 - 1; j = 0, ..., N_2 - 1; k = 0, ..., N_3 - 1; l = 0, ..., N_4 - 1; m = 0, ..., N_6 - 1.$

При этом коэффициенты C_{ijklm} легко вычисляются, если учесть ортогональность полиномов Чебышева:

$$C_{ijklm} = \frac{\sum\limits_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_6} g_{5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_6} T_i(g_1) T_j(g_2) T_k(g_3) T_l(g_4) T_m(g_6)}{(\sum\limits_{\alpha_1} T_i(g_1))^2 (\sum\limits_{\alpha_2} T_j(g_2))^2 (\sum\limits_{\alpha_3} T_k(g_3))^2 (\sum\limits_{\alpha_4} T_l(g_4))^2 (\sum\limits_{\alpha_6} T_m(g_6))^2}$$

$$\alpha_1 = 1, ...N_1; \alpha_2 = 1, ...N_2; \alpha_3 = 1, ...N_3; \alpha_4 = 1, ...N_4; \alpha_6 = 1, ...N_6.$$

Полиномы Чебышева высоких степеней определяются из рекуррентного соотношения:

$$T_{n+1}(X) - 2X \cdot T_n(X) + T_{n-1}(X) = 0, \quad n \geq 1;$$

при этом следует учесть, что $T_0(X) = 1$, а $T_1(X) = X$.

2.3 Аппроксимация простыми полиномами

Приведённый выше метод позволяет вычислять импульсы регистрируемых частиц с точностью,не худшей 0,1% (см. ниже). Однако его применение ограничено областью изменения переменных g_1, g_2, g_3, g_4, g_6. Кроме того, для достижения такой точности необходимо большое число коэффициентов разложения C_{ijklm}, что приводит к существенным затратам времени при массовой обработке экспериментальных данных.

Чтобы избавиться от указанных недостатков, был разработан метод, не имеющий ограничений на область изменения входных переменных и обеспечивающий более высокую скорость вычисления импульса при некоторой потере в точности.

В качестве базиса для построения искомой функции использовался набор переменных $x_1 \div x_4$ и полученный в результате прямого интегрирования через заданное магнитное поле набор углов отклонений $g_6(i, j, k, l, m)$.

Из геометрии спектрометра (см. рис.1) можно сделать предположение, что углы отклонения слабо зависят от выбора точки испускания частиц из мишени. Чтобы убедиться в этом, был проведён модельный расчёт углов отклонения для частиц с разными импульсами, вылетающими из центра мишени. В итоге оказалось, что ошибка, вносимая в углы отклонения в результате такого допущения, не превысила 0,7%. Поэтому переменные x_1 и x_2 были исключены из дальнейшего рассмотрения путём следующего усреднения:

$$d_{klm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{j=1}^{N_2} g_{6_{ijklm}}}{N_1 \cdot N_2}.$$

Вычислим набор величин $c_{klm} = p_m \cdot d_{klm}$, где p_m – импульсы, соответствующие значениям переменной g_5, выбранной согласно распределению Чебышева:

$$g_5 = \cos\frac{(2\alpha_5 - 1)\pi}{2N_5}, \quad \alpha_5 = 1, ..., N_5.$$

Усредним теперь углы отклонения по переменным x_3 и x_4:

$$\varphi_m = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N_3} \sum\limits_{l=1}^{N_4} d_{klm}}{N_3 \cdot N_4}$$

и представим зависимость между φ_m и соответствующим набором из c_{klm} (всего $N_3 \cdot N_4$ наборов) в виде:

$$c = a_0 \cdot \varphi + a_1 \cdot \varphi^2 + a_2 \cdot \varphi^3.$$

Запишем зависимость коэффициентов a_0, a_1 и a_2 от переменной x_4 в виде:

$$a_0 = b_{00} + b_{01} \cdot x_4 + b_{02} \cdot x_4^2;$$

$$a_1 = b_{10} + b_{11} \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_4^2;$$

$$a_2 = b_{20} + b_{21} \cdot x_4 + b_{22} \cdot x_4^2,$$

а зависимость коэффициентов $b_{00} \div b_{22}$ от переменной x_3 в виде:

$$b_{k0} = D_{k00} + D_{k01} \cdot x_3 + D_{k02} \cdot x_3^2 + D_{k03} \cdot x_3^3;$$

$$b_{k1} = D_{k10} + D_{k11} \cdot x_3 + D_{k12} \cdot x_3^2 + D_{k13} \cdot x_3^3;$$

$$b_{k2} = D_{k20} + D_{k21} \cdot x_3 + D_{k22} \cdot x_3^2 + D_{k23} \cdot x_3^3,$$

где $k = 0, 1, ..., N_4 - 1$.

Окончательный вид функции PULSE (содержащей 36 коэффициентов) на ФОРТРАНе представлен на рис.3; здесь введены следующие обозначения: $XC \equiv x_3$, $YM \equiv x_4$ и $FI \equiv \varphi$.

```
      FUNCTION PULSE(XC,YM,FI)
C
C——START PULSE
C
      B00=1.1644733970+0.0069877659 * XC-0.0001015617*XC**2
     +-0.0001767532*XC**3
      B01=0.0005315265+0.0044701431*XC+0.0003431958*XC**2
     +-0.0000555529*XC**3
      B02=-0.0000477204-0.0004059915*XC-0.0000266333*XC**2
     ++0.0000057275*XC**3
      A0=B00+B01*YM+B02*YM**2
      B10=0.0076079266-0.0588306603*XC+0.0007570269*XC**2
     ++0.0014751275*XC**3
      B11=-0.0073653545-0.0390694361*XC-0.0029513092*XC**2
     ++0.0004911654*XC**3
      B12=0.0005578712+0.0035304812*XC+0.0002316934*XC**2
     +-0.0000501832*XC**3
      A3=B10+B11*YM+B12*YM**2
      B20=-0.0071703576+0.1337630691*XC-0.0004260723*XC**2
     +-0.0033575219*XC**3
      B21=0.0279782646+0.0881501187*XC+0.0064284543*XC**2
     +-0.0011037377*XC**3
      B22=-0.0017841329-0.0079718433*XC-0.0005205792*XC**2
     ++0.0001137618*XC**3
      A2=B20+B21*YM+B22*YM**2
      CM=A0+A3*FI+A2*FI**2
      RETURN
      END
```

Рис. 3. Вид функции PULSE на ФОРТРАНе

3 Оценка точности восстановления импульсов

Для оценки точности вычисления импульсов случайным образом разыгрывались наборы переменных g_1, g_2, g_3, g_4, g_5. Для каждого набора входных данных проводилось численное интегрирование по магнитному полю и определялся угол отклонения g_6. Затем, используя полученный заранее набор коэффициентов C_{ijklm}, согласно выражению (6) вычислялась величина нормированного импульса g_5 ($g_{5н}$).

Оценкой точности определения импульсов было взято среднеквадратичное отклонение распределения разности $\Delta p = p - p_в$, где p и $p_в$ – импульсы, отвечающие нормированным величинам g_5 и $g_{5в}$ соответственно.

На основании расчетов, выполненных с различными степенями полиномов Чебышева, был выбран оптимальный (с точки зрения точности и скорости вычислений) вариант, для которого $N_1 = 4, N_2 = 2, N_3 = 5, N_4 = 3, N_5 = 4$. Полученный при этом набор из 480 коэффициентов C_{ijklm} обеспечивает точность вычисления импульсов 0,08% ($\sigma =$ 3,8 МэВ/с, см. рис.4) в интервале $3,9 \div 5,6$ ГэВ/с.

При оценке точности вычисления импульсов с помощью функции PULSE в качестве входных использовались переменные x_3, x_4 и φ, соответствующие нормированным величинам g_3, g_4, g_6. Точность вычисления импульсов во всей области изменения входных переменных g_3, g_4, g_6 составила $\approx 0,2\%$ ($\sigma =$ 9,2 МэВ/с, см. рис.5).

Таким образом, при восстановлении импульсов заряженных частиц с помощью функции PULSE примерно в 2,5 раза уменьшается точность определения импульса, однако при этом скорость вычислений увеличивается примерно в 5 раз.

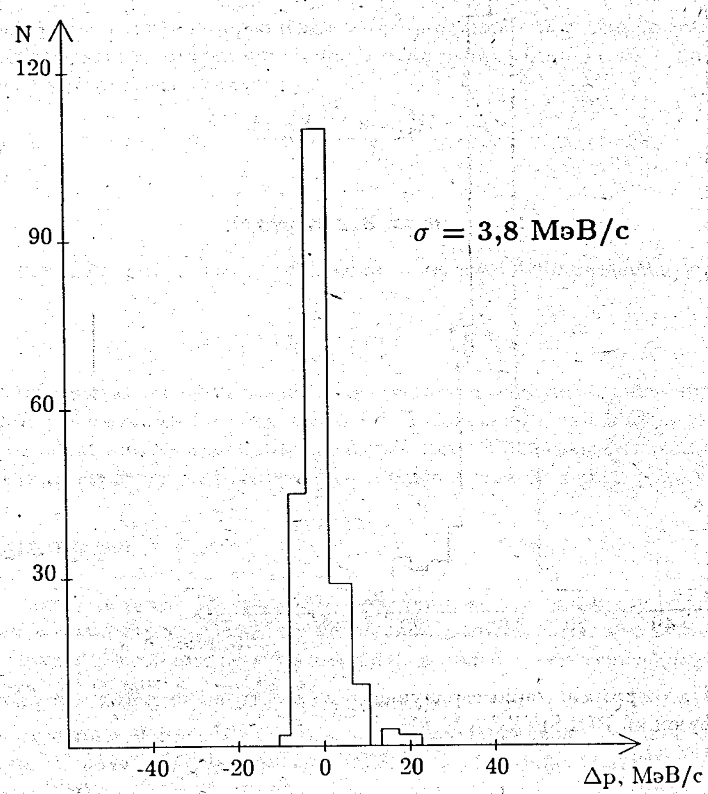

Рис. 4. Гистограмма, характеризующая точность вычисления импульсов с помощью коэффициентов разложения C_{ijklm}

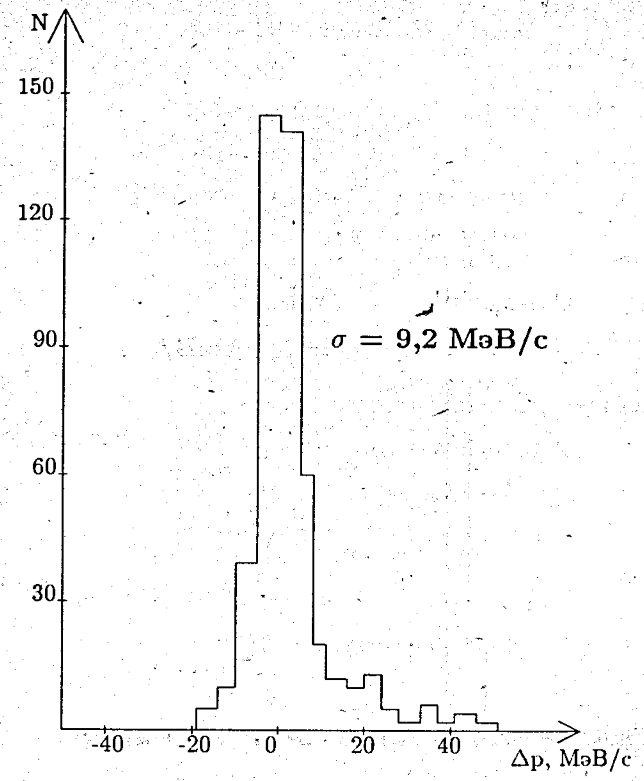

Рис. 5. Гистограмма, характеризующая точность вычисления импульсов с помощью функции PULSE(XC,YM,FI)

Заключение

В заключение следует отметить, что если считать одинаково важными время вычисления и точность определения импульсов заряженных частиц, то второй метод оказывается примерно вдвое эффективнее метода разложения искомой функции по ортогональным полиномам Чебышева.

Набор углов отклонений разобьем на группы по N_5 значений, соответствующих – для каждого конкретного набора координат x_1, x_2, x_3, x_4 – значениям импульсов в дискретных точках:

$$x_5 = \frac{A_5 + B_5 + g_5 \cdot (B_5 - A_5)}{2}.$$

где

$$g_5 = \cos\frac{(2\alpha_5 - 1)\pi}{2N_5}, \qquad \alpha_5 = 1, ..., N_5.$$

Для каждой группы углов отклонений определим функциональную зависимость:

$$p = f_i(\varphi), \qquad i = 1, ..., \prod_{i=1}^{4} N_i\,,$$

аппроксимирующую значения импульсов, соответствующие N_5 значениям углов отклонений, полиномами степени $(N_5 - 1)$. Подставляя в эти полиномы значения углов отклонений, отвечающие распределению Чебышева, вычислим массив нормированных импульсов размерностью, равной произведению $\prod_{i=1}^{5} N_i$.

Литература

[1] Л.С. Ажгирей и др. *"Двухплечевой магнитный спектрометр для исследований в области релятивистской ядерной физики /установка МАСПИК-2/"*. Труды Совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Д2-82-568, Дубна,1982, с.83

[2] Л.С. Ажгирей и др. *"Измерения пространственного распределения магнитного поля электромагнита СП12А"*. Препринт ОИЯИ 13-86-164. Дубна, 1986.

[3] Lechanoine.C. e.a. Nuclear instruments and methods. 69 (1969). 122.

[4] Д.С. Кузнецов. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1993 года.