сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P10-92-461

П.В.Зрелов, В.В.Иванов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СТАТИСТИКИ $\omega_n^k = n^{k/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - P(x)]^k dP(x)$ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Алгебраический вид, функции распределения и критерии согласия

1992

Введение

В задачах анализа данных физики частиц высоких и средних энергий успешно применяются непараметрические критерии согласия на основе известной статистики ω_n^2 [1, 2]

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^2 dF(x),$$

а также предложенной недавно статистики ω_n^3 [3]

$$\omega_n^3 = n^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x),$$

где $F(x)$ - теоретическая, а $S_n(x)$ - эмпирическая функции распределения случайной величины x, n - объем выборки.

Распределения ω_n^2 и ω_n^3 не зависят от F, поскольку указанные статистики могут быть записаны в виде соответствующих функционалов от эмпирического процесса (см., например, [4] и [5])

$$v_n(t) = \sqrt{n}[F_n(t) - t], \qquad 0 \le t \le 1.$$

К этому же классу относится рассмотренная в [6][1] статистика

$$\bar{F}_n = \int_0^1 F_n(t)dt = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i,$$

[1]В более ранней работе [7] исследована статистика $\bar{U}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i$, предложенная Мозесом

поскольку она может быть представлена в виде:

$$\omega_n^1 = \int\limits_0^1 v_n(t)dt = \sqrt{n}\int\limits_0^1 [F_n(t) - t]dt = \sqrt{n}\left(\bar{F}_n - \frac{1}{2}\right).$$

В работе [8] в рамках формального определения обобщённой интегральной статистики $\omega_n(\phi)$, представимой в виде

$$\omega_n(\phi) = \int\limits_0^1 \phi[t, v_n(t)]dt,$$

где ϕ – некоторая функция эмпирического процесса $v_n(t)$, исследовались моментные и корреляционные свойства статистик

$$\omega_n^k = \int_0^1 v_n^k(t)dt = n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^k dF(x), \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

Очевидно, что рассмотренные выше статистики ω_n^1, ω_n^2 и ω_n^3 относятся к классу статистик (1).

Настоящая работа посвящена обобщению свойств интегральных статистик (1), исследованию их функций распределения, а также построению новых критериев согласия и их сравнению с известными критериями рассматриваемого типа.

1 Алгебраический вид статистик ω_n^k

Для практических целей удобно использовать алгебраическое представление ω_n^k.

Разбивая область интегрирования в (1) на интервалы (см., например, [3]) $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, \infty)$ и учитывая также, что эмпирическая функция распределения $S_n(x)$ величины x имеет вид:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ \frac{i}{n} & \text{при} \quad x_i \le x < x_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ 1 & \text{при} \quad x \ge x_n, \end{cases}$$

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – вариационный ряд, n – объём выборки, получаем:

$$\omega_n^k = (-1)^k n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{-\infty}^{x_1} F^k(x)dF(x) + n^{\frac{k}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\tfrac{i}{n} - F(x)\right]^k dF(x) + n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{x_n}^{\infty} [1 - F(x)]^k dF(x).$$

Поскольку $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, а $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, то имеем:

$$(-1)^k n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{-\infty}^{x_1} F^k(x)dF(x) = (-1)^k \frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1} F^{k+1}(x_1), \tag{2}$$

$$n^{\frac{k}{2}} \int\limits_{x_n}^{\infty} [1 - F(x)]^k dF(x) = \frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1} [1 - F(x_n)]^{k+1}, \tag{3}$$

$$n^{\frac{k}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{i}{n} - F(x)\right]^k dF(x) = -\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i-1}{n} - F(x_i)\right]^{k+1} - $$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i}{n} - F(x_i)\right]^{k+1} + [1 - F(x_n)]^{k+1} + (-1)^k F^{k+1}(x_1) \Big\}. \tag{4}$$

Сложив правые части равенств (2), (3) и (4), получим искомое алгебраическое выражение для статистик ω_n^k:

$$\omega_n^k = -\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{i-1}{n} - F(x_i)\right]^{k+1} - \left[\frac{i}{n} - F(x_i)\right]^{k+1} \right\}. \tag{5}$$

2 Вычисление функций распределения ω_n^k

Введем обозначение $y_i = F(x_i)$, $y_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда равенство (5) принимает вид

$$\omega_n^k = -\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{i-1}{n} - y_i\right)^{k+1} - \left(\frac{i}{n} - y_i\right)^{k+1} \right]. \tag{6}$$

Введём переменную z_n^k

$$z_n^k = \omega_n^k - R_n^k,$$

где R_n^k – минимальное значение случайной величины ω_n^k. Используя равенство (6), можно показать, что

$$R_n^k = \begin{cases} -\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1} & \text{для нечётных } k, \\ \frac{1}{2^k n^{\frac{k}{2}}(k+1)} & \text{для чётных } k, \end{cases}$$

а максимальное значение случайной величины ω_n^k равно

$$\{\omega_n^k\}_{max} = \frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1} \quad \text{для любых } k.$$

Тогда случайная величина z_n^k принимает значения на отрезке $[0, \{\omega_n^k\}_{max} - R_n^k]$, а соответствующая ей функция распределения $F(z)$ равна нулю на $(-\infty, 0)$. В работе [9] было показано, что для таких функций верно соотношение

$$F(h) \le \frac{h}{\lambda} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{hk\pi}{\lambda}}{k} Re\left[\Phi\left(\frac{k\pi}{\lambda}\right)\right] \le F(h) + [1 - F(\lambda)], \qquad (7)$$

где $0 < h < \lambda$. Неравенство (7) позволяет, вычисляя характеристическую функцию $\Phi(t)$ величины z_n^k для каждого текущего t, определять функцию распределения $F(h)$.

Выражение для характеристической функции $\Phi_n^k(t)$ имеет вид:

$$\Phi_k^n(t) = n!\int_0^1\int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_2}\exp\Big\{-it\Big\{\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\Big[(\frac{i-1}{n} - t_i)^{k+1} - -(\frac{i}{n} - t_i)^{k+1}\Big] + R_n^k\Big\}\Big\}dx_1\ldots dx_n.$$

Введём обозначение

$$I(x,t,l) = l!\int_0^x\int_0^{x_l}\cdots\int_0^{x_2}\exp\Big\{-it\Big\{\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1}\sum_{i=1}^{l}\Big[(\frac{i-1}{n} - t_i)^{k+1} - -(\frac{i}{n} - t_i)^{k+1}\Big] + R_n^k\Big\}\Big\}dx_1\ldots dx_n.$$

Для величины $I(x,t,l)$ можно записать рекуррентное соотношение

$$I(x,t,l+1) = (l+1)\int_0^x dy I(y,t,l)\cdot\exp\Big\{-it\Big\{\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1}\Big[(\frac{l}{n} - y)^{k+1} - -(\frac{l+1}{n} - y)^{k+1}\Big]\Big\}\Big\}, \qquad (8)$$

которое справедливо при $l = 2, 3, \ldots, n-1$. Положим $I(x,t,0) = 1$ для любых x и t, а $I(x,t,1)$ представим в виде

$$I(x,t,1) = \int_0^x dy\exp\Big\{-it\Big\{\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1}\Big[(-y)^{k+1} - (\frac{1}{n} - y)^{k+1}\Big]\Big\}\Big\}.$$

Величину $\Phi_n^k(t)$ для любого заданного t можно определить путём численного интегрирования. Для этого величины $I(x,t,l)$ вычисляются в узлах $x_j = \frac{j}{m}$ $(j = 1, 2, ..., m)$, где m достаточно велико. Далее, положив

$$\Delta I(x,t,l) = I\left(x + \frac{1}{m}, t, l\right) - I(x,t,l) \qquad (9)$$

и $I(0,t,l+1) = 0$ для любого t, запишем тождество:

$$I(\frac{r}{m}, t, l+1) = \sum_{\rho=1}^{r}\Delta I\Big(\frac{\rho-1}{m}, t, l+1\Big), \quad r = 1, 2, ..., m, \qquad (10)$$

которое определяет процедуру вычисления характеристической функции $\Phi_n^k(t) = I(1,t,n)$; при этом величины $\Delta I(x,t,l+1)$ на основании (8) и (9) записываются в виде

$$\Delta I(x,t,l+1) = (l+1)\int_x^{x+\frac{1}{m}} dy I(y,t,l)\cdot\exp\Big\{-it\Big\{\frac{n^{\frac{k}{2}}}{k+1}\Big[(\frac{l}{n} - y)^{k+1} - -(\frac{l+1}{n} - y)^{k+1}\Big]\Big\}\Big\} \qquad (11)$$

и могут быть вычислены с помощью квадратурных формул [10].

Из неравенства (7) видно, что точность определения $F(h)$ зависит от величины λ и параметра K, ограничивающего число членов бесконечной суммы. Величина λ выбиралась равной величине отрезка $[0, \{\omega_n^k\}_{max} - R_n^k]$. Выбор величины λ несколько большей этого значения позволял контролировать точность вычисления функции $F(h)$ по её близости к единице при значениях h, превосходящих $\{z_n^k\}_{max}$. Значение параметра K выбиралось исходя из соотношения $K = 150 \times \lambda$.

Значения функции распределения $F(h)$ величины z_n^k вычислялись с переменным шагом Δh, который подбирался таким образом, чтобы $F(h + \Delta h) - F(h) \approx 0{,}001$. Затем эти величины преобразовывались в значения функции распределения $F_n^k(x)$ статистики ω_n^k согласно соотношению $F(h) = 1 - F_n^k(x)$, где $x = R_n^k - h$, и использовались для определения значений процентных точек Z_p.

3 Таблицы процентных точек ω_n^k-распределения

Функции распределения были вычислены для $k = 1(1)5$ и $n = 1(1)10$, что потребовало значительного времени счёта на ЭВМ. В таблицах 2, 4 и 6 приведены процентные точки (Z_p) распределений статистик ω_n^k для нечётных k, а в таблицах 3 и 5 – для чётных k. В таблицах 2, 4, 6 представлены точки $Z_p > 0$, поскольку для нечётных k из-за симметрии ω_n^k - распределения относительно нуля имеет место равенство

$$F_n^k(Z_p) = 1 - F_n^k(-Z_p).$$

3.1 Анализ результатов вычислений

Для распределения ω_n^1 можно получить аналитический вид функции распределения $F_n^1(z)$, исходя из следующего равенства

$$\begin{aligned} F_n^1(z) &= \Pr\{\omega_n^1 \le z\} = \Pr\{\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} t_i \le z\} = \\ &= \Pr\{t_1 + t_2 + \ldots + t_n \ge \frac{n}{2} - \sqrt{n}z\} = \\ &= 1 - \Pr\{t_1 + t_2 + \ldots + t_n < \frac{n}{2} - \sqrt{n}z\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для дальнейшего удобно обозначить $a = n/2 - \sqrt{n}z$. Вероятности (12) можно вычислить для $n = 1, 2$ и 3, используя геометрические построения. В частности, для выборки $n = 3$ имеем:

$$F_3^1(a) = \begin{cases} 1, & a \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2\cdot 3}a^3, & 0 < a \le 1, \\ 1 - \frac{1}{2\cdot 3}\left[a^3 - 3(a-1)^3\right], & 1 < a \le 2, \\ 1 - \frac{1}{2\cdot 3}\left[a^3 - 3(a-1)^3 + 3(a-2)^3\right], & 2 < a \le 3, \\ 0, & a > 3. \end{cases}$$

Этот результат может быть обобщён на случай произвольного n следующим образом:

$$F_n^1(a) = \begin{cases} 1, & a < 0, \\ 1 - \frac{1}{n!}\sum\limits_{m=0}^{k}(-1)^m C_n^m (a-m)^n, & k < a < k+1, \\ & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0, & a \ge n, \end{cases}$$

или, переходя от a к z,

$$F_n^1(z) = \begin{cases} 0, & z \le -\frac{\sqrt{n}}{2}, \\ 1 - \frac{1}{n!}\sum\limits_{m=0}^{k}(-1)^m C_n^m \left(\frac{n}{2} - \sqrt{n}z - m\right)^n, & \frac{n}{2} - \frac{k+1}{\sqrt{n}} < z \le \frac{n}{2} - \frac{k}{\sqrt{n}}, \\ & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 1, & z > \frac{\sqrt{n}}{2}. \end{cases}$$

Табличные данные для $k = 1$ (см. таблицу 2а,б) совпадают с результатами вычислений по этой формуле с точностью до 1 – 2 единиц пятого знака после запятой.

В случае распределения ω_n^2 аналитические выражения функций распределения $F_n^2(z)$ для $n = 1, 2$ были получены в работе [11]. При этом для случая $n = 1$ функция $F_n^2(z)$ определяется следующим образом:

$$F_1^2(z) = \begin{cases} 0, & z \le \frac{1}{2}, \\ \left(4z - \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, & \frac{1}{12} \le z \le \frac{1}{3}, \\ 1, & z > \frac{\sqrt{1}}{3}, \end{cases}$$

а для $n = 2$ имеет значительно более сложный вид[2]

$$F_2^2(z) = \begin{cases} 0, & z < \frac{1}{24}, \\ 2\pi\left(z - \frac{1}{24}\right), & \frac{1}{24} \le z \le \frac{5}{48}, \\ \left(z - \frac{1}{24}\right)\left[2\pi - 4\arccos\frac{1}{4}\left(z - \frac{1}{24}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\left(z - \frac{5}{48}\right)^{\frac{1}{2}}}{z - \frac{1}{24}}\right], & \frac{5}{48} < z \le \frac{1}{6}, \\ \left(z + \frac{1}{24}\right)\left[\frac{3\pi}{2} - 2\arccos\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(z - \frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\left(z - \frac{5}{48}\right)^{\frac{1}{2}}}{z - \frac{1}{24}}\right] + & \\ + \frac{1}{8} + \left[\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{6}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{5}{48}\right)^{\frac{1}{2}}, & \frac{1}{6} < z \le \frac{2}{3}, \\ 1, & z > \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$$

[2] В работе [11] эта формула дана с ошибкой, поэтому здесь мы приводим исправленное выражение для $F_2^2(z)$, взятое из работы [12]

Сравнение табличных данных для ω_n^2 при $n = 1,2$ (см. таблицу 3а,б) с результатами вычислений по аналитическим формулам показало, что с точностью до 1 – 2 единиц пятого знака после запятой они совпадают.

Процентные точки распределения ω_n^2 для $n > 2$ определены с точностью 1 – 2 единиц пятого знака после запятой и, за исключением нескольких отдельных точек, совпадают с результатами вычислений Нотта [9].

Точность вычисления процентных точек для распределения ω_n^3 оценивалась путём их сравнения со значениями, полученными ранее в работе [13], а для распределений ω_n^4 и ω_n^5 – путём варьирования числа K, а также (в случае распределения ω_n^5) попарным сравнением абсолютных величин процентных точек, симметричных относительно $Z_p = 0$. Анализ показал, что результаты для ω_n^3 совпадают с приведенными в [13], а для ω_n^4 и ω_n^5 достигнута точность (за исключением 2 – 3 точек на хвостах распределения ω_n^5) 1 – 2 единиц четвёртого знака после запятой.

4 Критерии согласия на основе статистик ω_n^k

Подробное описание процедуры построения интегральных критериев согласия на примере ω_n^3 приведена в работе [14]. Здесь кратко описана общая схема построения одно- и двусторонних критериев на основе проверочных статистик ω_n^k.

4.1 Построение односторонних критериев

Структура статистик ω_n^k с нечётными k определяет возможность их использования для построения односторонних критериев согласия, т.е. критериев проверки гипотезы $H_0 : F = F_0$ против одной из двух возможных альтернативных гипотез: $F < F_0$ (правосторонней) или $F > F_0$ (левосторонней).

В случае альтернативной гипотезы $F < F_0$ критическая область B_{α_1} правостороннего критерия для заданного уровня значимости α_1 определяется неравенством $\omega_n^k < Z_{\alpha_1}$, где Z_{α_1} – корень уравнения $F_n^k(Z_{\alpha_1}) = \alpha_1$, а $F_n^k(Z)$ – функция распределения величины ω_n^k. В случае гипотезы $F > F_0$ критическая область левостороннего критерия определяется неравенством $\omega_n^k > Z_{\alpha_2}$, а величина Z_{α_2} в этом случае удовлетворяет уравнению $F_n^k(Z_{\alpha_2}) = 1 - \alpha_2$.

4.2 Построение двусторонних критериев

Для построения критериев проверки гипотезы $H_0 : F = F_0$ против двусторонней альтернативной гипотезы $F \neq F_0$ наиболее пригодны статистики ω_n^k с чётным k, однако для определённого типа альтернативных гипотез применение двусторонних критериев на основе статистик ω_n^k с нечётным k является оправданным и эффективным (см. [14]). Критическая область для таких критериев определяется следующим образом:

$$B = \left\{|\omega_n^k| > Z_\alpha^*\right\},$$

где Z_α^* – корень уравнения $F_n^k(Z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Критическая область для критериев ω_n^k в случае чётных k имеет вид:

$$B = \left\{\omega_n^k > Z_\alpha^{**}\right\},$$

где Z_α^{**} – корень уравнения $F_n^k(Z_\alpha) = 1 - \alpha$.

В таблице 1 приведена сводка критериев, построенных на статистиках ω_n^k.

Таблица 1: Критерии согласия на основе статистик ω_n^k

Тип критерия	левосторонний	правосторонний	двусторонний
Альтернатива	$F > F_0$	$F < F_0$	$F \neq F_0$
Крит. область, k нечётное	$\omega_n^k > Z_\alpha$	$\omega_n^k < Z_\alpha$	$\mid\omega_n^k\mid > Z_\alpha$
Ур-ние для Z_α, k нечётное	$F_n^k(Z_\alpha) = 1 - \alpha$	$F_n^k(Z_\alpha) = \alpha$	$F_n^k(Z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$
Крит. область, k чётное	—	—	$\omega_n^k > Z_\alpha$
Ур-ние для Z_α, k чётное	—	—	$F_n^k(Z_\alpha) = 1 - \alpha$

При проверке гипотезы H_0 с помощью одностороннего или двустороннего критерия согласия, построенного на статистике ω_n^k, предполагается, что гипотеза $H_0 : F = F_0$ принимается с уровнем значимости α, если значение ω_n^k, вычисленное по формуле (5), попадает в допустимую область и отвергается в противном случае.

4.3 Свойства критериев ω_n^k

Построенные выше критерии ω_n^k устойчивы, а по отношению к односторонним альтернативным гипотезам также состоятельны и не смещены. Доказательства этих свойств аналогичны рассмотренным в работе Чэпмена [7] для критериев $\bar{U}_n$ и ω_n^2, а также в работе [14] для критерия ω_n^3.

С целью изучения поведения функций мощности интегральных критериев было проведено сравнение критериев ω_n^k для $k = 1, 2, \ldots, 5$ при больших объёмах эмпирической выборки $n \geq 50$. Сравнение проводилось с использованием численного моделирования в рамках подхода Чэпмена [7], рассматривавшего среди множества односторонних альтернативных гипотез, для которых величина $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}[G(x) - F_0(x)] = \Delta \quad (0 < \Delta < 1)$ является фиксированной, две функции распределения $G_{mu_0}(x)$ и $G_M(x)$, одна из которых минимизирует, а другая максимизирует мощность. Моделирование проводилось для ряда значений уровня значимости α и параметра Δ в соответствии с процедурой, описанной в [15].

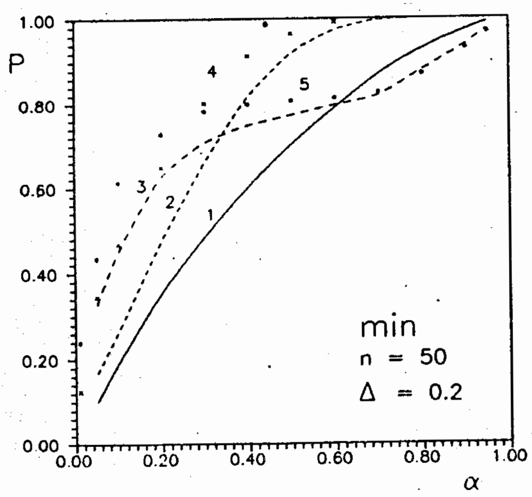

Рис. 1: Зависимости мощностей критериев ω_n^1 (кривая 1), ω_n^2 (2), ω_n^3 (3), ω_n^4 (4) и ω_n^5 (5) от уровня значимости α для гипотезы G_{mu_0} при $n = 50$ и $\Delta = 0.2$

На рис.1 и 2 приведены кривые мощности для гипотез G_{mu_0} (в случае $\Delta = 0,20$) и G_M (в случае $\Delta = 0,05$) соответственно. Объём эмпирической выборки для обеих гипотез равнялся $n = 50$. Анализ кривых на рис.1 и 2 показывает, что в случае гипотезы G_{mu_0}, минимизирующей мощность, критерии ω_n^k с большими k имеют преимущество в области $\alpha < 0,2$, что особенно важно для практических применений. В случае гипотезы G_M соотношение между мощностями критериев в основном имеет следующий вид

$$P(\omega_n^1) > P(\omega_n^3) > P(\omega_n^5) > P(\omega_n^2) > P(\omega_n^4),$$

причём критерии с нечётными k $(k = 1, 3, 5)$ заметно превосходят критерии с чётными k $(k = 2, 4)$, в то время как разница в мощ-

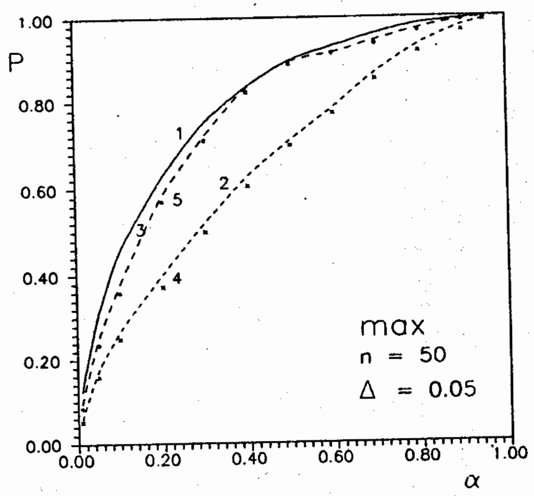

Рис. 2: Зависимости мощностей критериев ω_n^1 (кривая 1), ω_n^2 (2), ω_n^3 (3), ω_n^4 (4) и ω_n^5 (5) от уровня значимости α для гипотезы G_M при $n = 50$ и $\Delta = 0.05$

ности критериев ω_n^1, ω_n^3 и ω_n^5 незначительна (то же относится и к критериям ω_n^2, ω_n^4).

Таблица 2а. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^1:
$F_n^k(Z_p) = Pr\,\{\omega_n^1 < Z_p\}\,, \quad n = 1, 2, ..., 5$

Процентные точки Z_p					
$F_n^k(Z_p)$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
.50	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
.51	.01000	.00711	.00770	.00750	.00747
.52	.02000	.01429	.01540	.01501	.01494
.53	.03000	.02154	.02311	.02252	.02242
.54	.04000	.02887	.03083	.03005	.02991
.55	.05000	.03629	.03857	.03760	.03742
.56	.06000	.04378	.04632	.04518	.04496
.57	.07000	.05136	.05410	.05278	.05252
.58	.08000	.05903	.06190	.06042	.06011
.59	.09000	.06679	.06973	.06810	.06774
.60	.10000	.07465	.07760	.07582	.07541
.61	.11000	.08261	.08551	.08360	.08312
.62	.12000	.09067	.09346	.09142	.09089
.63	.13000	.09883	.10147	.09931	.09872
.64	.14000	.10711	.10952	.10727	.10661
.65	.15000	.11550	.11764	.11530	.11457
.66	.16000	.12401	.12582	.12341	.12261
.67	.17000	.13265	.13408	.13161	.13074
.68	.18000	.14142	.14242	.13990	.13896
.69	.19000	.15033	.15084	.14830	.14727
.70	.20000	.15938	.15936	.15680	.15570
.71	.21000	.16859	.16798	.16543	.16425
.72	.22000	.17796	.17671	.17419	.17294
.73	.23000	.18749	.18558	.18309	.18176
.74	.24000	.19720	.19457	.19214	.19074
.75	.25000	.20711	.20372	.20136	.19989
.76	.26000	.21721	.21304	.21077	.20922
.77	.27000	.22752	.22254	.22036	.21876
.78	.28000	.23807	.23225	.23018	.22852
.79	.29000	.24885	.24218	.24023	.23852
.80	.30000	.25989	.25237	.25054	.24879
.81	.31000	.27122	.26285	.26114	.25935
.82	.32000	.28284	.27366	.27205	.27025
.83	.33000	.29480	.28485	.28332	.28150
.84	.34000	.30711	.29648	.29498	.29317
.85	.35000	.31981	.30860	.30707	.30529
.86	.36000	.33294	.32127	.31967	.31793
.87	.37000	.34655	.33456	.33283	.33116
.88	.38000	.36070	.34856	.34665	.34507
.89	.39000	.37544	.36335	.36123	.35976
.90	.40000	.39088	.37907	.37671	.37537
.91	.41000	.40711	.39587	.39326	.39209
.92	.42000	.42426	.41398	.41113	.41015
.93	.43000	.44253	.43365	.43063	.42988
.94	.44000	.46216	.45531	.45225	.45174
.95	.45000	.48350	.47953	.47668	.47644
.96	.46000	.50711	.50723	.50508	.50513
.97	.47000	.53390	.54004	.53942	.53989
.98	.48000	.56569	.58125	.58382	.58519
.99	.49000	.60711	.64000	.65004	.65421

Таблица 2б. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^1:
$F_n^k(Z_p) = Pr\,\{\omega_n^1 < Z_p\}\,, \quad n = 6, 7, ..., 10$

Процентные точки Z_p					
$F_n^k(Z_p)$	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
.50	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
.51	.00742	.00740	.00738	.00736	.00735
.52	.01485	.01480	.01476	.01473	.01470
.53	.02229	.02221	.02215	.02210	.02206
.54	.02974	.02963	.02955	.02949	.02944
.55	.03721	.03707	.03697	.03689	.03683
.56	.04470	.04454	.04441	.04432	.04424
.57	.05222	.05203	.05189	.05178	.05169
.58	.05977	.05955	.05939	.05926	.05916
.59	.06736	.06712	.06693	.06679	.06668
.60	.07499	.07472	.07451	.07436	.07423
.61	.08266	.08237	.08215	.08197	.08184
.62	.09040	.09008	.08983	.08965	.08950
.63	.09819	.09784	.09758	.09738	.09721
.64	.10605	.10567	.10539	.10517	.10500
.65	.11397	.11357	.11327	.11304	.11286
.66	.12198	.12156	.12124	.12099	.12079
.67	.13008	.12962	.12928	.12902	.12882
.68	.13826	.13779	.13743	.13715	.13694
.69	.14656	.14605	.14568	.14539	.14516
.70	.15496	.15443	.15404	.15373	.15349
.71	.16348	.16293	.16252	.16220	.16195
.72	.17214	.17156	.17113	.17081	.17054
.73	.18094	.18034	.17989	.17955	.17928
.74	.18989	.18927	.18881	.18846	.18818
.75	.19902	.19837	.19790	.19754	.19725
.76	.20833	.20766	.20718	.20680	.20651
.77	.21784	.21716	.21666	.21628	.21597
.78	.22758	.22688	.22637	.22597	.22566
.79	.23756	.23685	.23632	.23592	.23560
.80	.24781	.24708	.24655	.24614	.24581
.81	.25835	.25762	.25708	.25666	.25633
.82	.26923	.26848	.26794	.26751	.26718
.83	.28047	.27972	.27917	.27874	.27840
.84	.29211	.29137	.29081	.29038	.29004
.85	.30423	.30348	.30292	.30250	.30216
.86	.31686	.31612	.31557	.31514	.31480
.87	.33009	.32936	.32881	.32839	.32806
.88	.34400	.34329	.34276	.34235	.34202
.89	.35872	.35803	.35751	.35711	.35680
.90	.37437	.37371	.37322	.37285	.37255
.91	.39115	.39054	.39008	.38973	.38945
.92	.40930	.40874	.40833	.40802	.40777
.93	.42915	.42867	.42832	.42806	.42785
.94	.45119	.45082	.45056	.45035	.45019
.95	.47615	.47592	.47577	.47566	.47557
.96	.50519	.50519	.50521	.50522	.50523
.97	.54047	.54082	.54108	.54129	.54146
.98	.58657	.58751	.58819	.58873	.58915
.99	.65717	.65936	.66095	.66218	.66315

Таблица 3а. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^2:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^2 < Z_p\}, \quad n = 1, 2, ..., 5$

$F_n^k(Z_p)$	Процентные точки Z_p				
	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
.01	.08362	.04326	.03324	.03008	.02868
.02	.08391	.04485	.03644	.03380	.03265
.03	.08420	.04644	.03902	.03673	.03563
.04	.08450	.04803	.04136	.03925	.03814
.05	.08480	.04962	.04357	.04151	.04036
.06	.08510	.05122	.04565	.04359	.04240
.07	.08542	.05281	.04761	.04555	.04433
.08	.08574	.05440	.04944	.04741	.04617
.09	.08608	.05599	.05119	.04920	.04795
.10	.08643	.05758	.05287	.05092	.04969
.11	.08679	.05917	.05451	.05259	.05139
.12	.08718	.06076	.05613	.05422	.05307
.13	.08760	.06235	.05773	.05582	.05472
.14	.08805	.06395	.05933	.05739	.05637
.15	.08856	.06554	.06092	.05895	.05800
.16	.08913	.06713	.06251	.06052	.05962
.17	.08979	.06873	.06409	.06208	.06124
.18	.09061	.07032	.06568	.06365	.06286
.19	.09166	.07191	.06727	.06523	.06448
.20	.09304	.07350	.06886	.06682	.06610
.21	.09459	.07509	.07046	.06841	.06772
.22	.09599	.07668	.07205	.07002	.06935
.23	.09718	.07827	.07365	.07164	.07098
.24	.09825	.07987	.07524	.07327	.07262
.25	.09926	.08146	.07683	.07493	.07427
.26	.10026	.08305	.07841	.07660	.07593
.27	.10131	.08464	.08000	.07830	.07760
.28	.10247	.08623	.08159	.08001	.07928
.29	.10383	.08781	.08319	.08174	.08097
.30	.10551	.08941	.08480	.08348	.08268
.31	.10749	.09100	.08644	.08525	.08440
.32	.10937	.09260	.08811	.08704	.08614
.33	.11099	.09420	.08981	.08885	.08790
.34	.11245	.09579	.09154	.09069	.08968
.35	.11388	.09737	.09331	.09256	.09149
.36	.11540	.09895	.09512	.09445	.09331
.37	.11714	.10053	.09698	.09636	.09516
.38	.11927	.10213	.09887	.09829	.09704
.39	.12161	.10375	.10081	.10025	.09895
.40	.12372	.10544	.10278	.10225	.10089
.41	.12556	.10721	.10480	.10428	.10286
.42	.12734	.10907	.10687	.10634	.10487
.43	.12923	.11103	.10900	.10842	.10692
.44	.13145	.11308	.11118	.11054	.10901
.45	.13406	.11520	.11342	.11269	.11114
.46	.13657	.11736	.11571	.11488	.11331
.47	.13875	.11957	.11805	.11712	.11554
.48	.14082	.12184	.12045	.11939	.11781
.49	.14304	.12418	.12291	.12171	.12013
.50	.14569	.12659	.12542	.12406	.12251

Таблица 3б. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^2:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^2 < Z_p\}, \quad n = 1, 2, ..., 5$

$F_n^k(Z_p)$	Процентные точки Z_p				
	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
.51	.14860	.12905	.12799	.12647	.12495
.52	.15119	.13155	.13060	.12892	.12745
.53	.15353	.13410	.13328	.13144	.13002
.54	.15596	.13672	.13603	.13401	.13265
.55	.15880	.13940	.13884	.13663	.13535
.56	.16196	.14213	.14171	.13932	.13813
.57	.16477	.14491	.14464	.14209	.14098
.58	.16735	.14772	.14764	.14493	.14391
.59	.17009	.15060	.15073	.14786	.14693
.60	.17334	.15355	.15389	.15086	.15004
.61	.17662	.15655	.15711	.15396	.15324
.62	.17949	.15958	.16042	.15717	.15654
.63	.18233	.16265	.16382	.16048	.15994
.64	.18562	.16581	.16731	.16389	.16345
.65	.18919	.16916	.17089	.16742	.16708
.66	.19234	.17277	.17457	.17109	.17083
.67	.19536	.17666	.17836	.17490	.17471
.68	.19882	.18075	.18226	.17884	.17873
.69	.20258	.18501	.18627	.18296	.18289
.70	.20591	.18950	.19041	.18726	.18722
.71	.20915	.19421	.19470	.19173	.19171
.72	.21290	.19910	.19911	.19640	.19639
.73	.21678	.20424	.20370	.20129	.20126
.74	.22020	.20961	.20846	.20638	.20634
.75	.22375	.21521	.21339	.21172	.21165
.76	.22785	.22109	.21854	.21731	.21720
.77	.23170	.22721	.22391	.22316	.22303
.78	.23526	.23365	.22954	.22932	.22914
.79	.23930	.24037	.23546	.23579	.23557
.80	.24354	.24743	.24169	.24261	.24235
.81	.24729	.25482	.24831	.24981	.24952
.82	.25127	.26262	.25535	.25744	.25711
.83	.25575	.27080	.26288	.26554	.26519
.84	.25974	.27942	.27095	.27416	.27381
.85	.26377	.28855	.27963	.28338	.28304
.86	.26839	.29819	.28909	.29327	.29298
.87	.27261	.30841	.29944	.30393	.30373
.88	.27674	.31931	.31094	.31547	.31542
.89	.28150	.33095	.32372	.32805	.32823
.90	.28589	.34343	.33786	.34185	.34238
.91	.29016	.35689	.35352	.35711	.35814
.92	.29509	.37148	.37098	.37417	.37587
.93	.29958	.38744	.39068	.39346	.39606
.94	.30405	.40507	.41318	.41573	.41939
.95	.30917	.42480	.43938	.44203	.44695
.96	.31367	.44732	.47068	.47417	.48054
.97	.31842	.47373	.50951	.51570	.52353
.98	.32369	.50624	.56104	.57414	.58338
.99	.32806	.55058	.63977	.67008	.68348

Таблица 3в. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^2:

$$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^2 < Z_p\}, \quad n = 6, 7, ..., 10$$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
.01	.02795	.02742	.02703	.02675	.02654
.02	.03189	.03135	.03099	.03074	.03054
.03	.03484	.03433	.03400	.03375	.03354
.04	.03734	.03687	.03655	.03629	.03608
.05	.03959	.03915	.03883	.03857	.03835
.06	.04167	.04125	.04093	.04066	.04044
.07	.04364	.04323	.04290	.04262	.04240
.08	.04552	.04512	.04478	.04449	.04427
.09	.04734	.04693	.04658	.04630	.04608
.10	.04911	.04869	.04833	.04804	.04783
.11	.05083	.05041	.05004	.04975	.04954
.12	.05252	.05208	.05171	.05142	.05121
.13	.05419	.05374	.05335	.05307	.05286
.14	.05584	.05536	.05498	.05470	.05449
.15	.05747	.05698	.05659	.05632	.05611
.16	.05909	.05858	.05819	.05792	.05771
.17	.06069	.06017	.05979	.05952	.05931
.18	.06229	.06176	.06138	.06111	.06090
.19	.06389	.06335	.06297	.06271	.06250
.20	.06548	.06493	.06456	.06430	.06409
.21	.06708	.06653	.06616	.06590	.06569
.22	.06868	.06812	.06776	.06750	.06729
.23	.07028	.06973	.06937	.06911	.06890
.24	.07189	.07134	.07099	.07073	.07052
.25	.07351	.07297	.07262	.07236	.07215
.26	.07514	.07461	.07426	.07400	.07379
.27	.07679	.07626	.07592	.07566	.07544
.28	.07845	.07793	.07759	.07733	.07711
.29	.08012	.07961	.07928	.07902	.07880
.30	.08182	.08132	.08099	.08072	.08050
.31	.08353	.08304	.08271	.08245	.08223
.32	.08527	.08479	.08446	.08419	.08397
.33	.08703	.08656	.08623	.08596	.08574
.34	.08881	.08835	.08802	.08775	.08753
.35	.09062	.09017	.08984	.08957	.08935
.36	.09246	.09202	.09169	.09141	.09119
.37	.09432	.09389	.09356	.09329	.09306
.38	.09622	.09580	.09546	.09519	.09496
.39	.09815	.09773	.09740	.09712	.09689
.40	.10012	.09970	.09936	.09909	.09886
.41	.10212	.10170	.10136	.10108	.10086
.42	.10415	.10374	.10340	.10312	.10290
.43	.10623	.10582	.10548	.10519	.10497
.44	.10834	.10793	.10759	.10731	.10709
.45	.11050	.11009	.10975	.10946	.10924
.46	.11271	.11229	.11195	.11166	.11145
.47	.11496	.11454	.11419	.11391	.11369
.48	.11725	.11684	.11649	.11620	.11599
.49	.11960	.11919	.11883	.11855	.11834
.50	.12200	.12158	.12123	.12095	.12074

Таблица 3г. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^2:

$$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^2 < Z_p\}, \quad n = 6, 7, ..., 10$$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
.51	.12446	.12404	.12368	.12340	.12320
.52	.12698	.12655	.12619	.12591	.12571
.53	.12955	.12912	.12876	.12849	.12829
.54	.13219	.13176	.13140	.13113	.13093
.55	.13490	.13447	.13410	.13384	.13365
.56	.13768	.13724	.13688	.13662	.13643
.57	.14054	.14009	.13973	.13948	.13929
.58	.14347	.14302	.14266	.14242	.14223
.59	.14648	.14603	.14568	.14544	.14525
.60	.14958	.14913	.14878	.14855	.14836
.61	.15278	.15232	.15198	.15175	.15156
.62	.15607	.15560	.15528	.15506	.15487
.63	.15946	.15900	.15868	.15847	.15828
.64	.16297	.16250	.16220	.16199	.16180
.65	.16658	.16612	.16583	.16562	.16544
.66	.17033	.16986	.16959	.16939	.16921
.67	.17420	.17374	.17348	.17328	.17311
.68	.17821	.17776	.17752	.17732	.17715
.69	.18236	.18193	.18171	.18151	.18135
.70	.18668	.18627	.18606	.18587	.18571
.71	.19117	.19078	.19059	.19040	.19024
.72	.19584	.19548	.19530	.19511	.19497
.73	.20070	.20039	.20021	.20003	.19990
.74	.20579	.20551	.20534	.20517	.20504
.75	.21110	.21087	.21071	.21055	.21043
.76	.21667	.21648	.21633	.21618	.21608
.77	.22251	.22237	.22223	.22210	.22200
.78	.22866	.22857	.22843	.22831	.22824
.79	.23514	.23509	.23497	.23487	.23481
.80	.24198	.24198	.24187	.24179	.24175
.81	.24923	.24927	.24918	.24913	.24910
.82	.25694	.25701	.25694	.25692	.25691
.83	.26514	.26524	.26521	.26521	.26522
.84	.27391	.27403	.27404	.27408	.27411
.85	.28331	.28346	.28351	.28359	.28364
.86	.29342	.29360	.29371	.29383	.29391
.87	.30436	.30457	.30475	.30491	.30502
.88	.31624	.31651	.31676	.31698	.31713
.89	.32922	.32957	.32992	.33019	.33038
.90	.34352	.34398	.34444	.34477	.34502
.91	.35941	.36002	.36060	.36100	.36133
.92	.37726	.37808	.37879	.37929	.37970
.93	.39759	.39867	.39954	.40017	.40068
.94	.42115	.42258	.42364	.42444	.42509
.95	.44911	.45099	.45230	.45333	.45415
.96	.48342	.48586	.48755	.48889	.48995
.97	.52770	.53087	.53315	.53495	.53637
.98	.58987	.59420	.59752	.60005	.60208
.99	.69441	.70159	.70702	.71118	.71450

Таблица 4а. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^3:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^3 < Z_p\}$, $n = 1, 2, ..., 5$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
.50	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
.51	.00250	.00147	.00131	.00126	.00124
.52	.00501	.00294	.00262	.00253	.00249
.53	.00753	.00442	.00394	.00382	.00377
.54	.01006	.00592	.00529	.00514	.00507
.55	.01262	.00744	.00667	.00649	.00641
.56	.01522	.00898	.00808	.00790	.00781
.57	.01784	.01056	.00954	.00936	.00926
.58	.02051	.01217	.01104	.01088	.01076
.59	.02323	.01381	.01261	.01247	.01234
.60	.02600	.01550	.01424	.01413	.01398
.61	.02883	.01724	.01595	.01588	.01570
.62	.03173	.01902	.01775	.01770	.01749
.63	.03470	.02086	.01965	.01962	.01936
.64	.03774	.02276	.02166	.02163	.02133
.65	.04087	.02472	.02378	.02375	.02340
.66	.04410	.02676	.02604	.02598	.02557
.67	.04741	.02887	.02842	.02832	.02785
.68	.05083	.03107	.03095	.03078	.03025
.69	.05436	.03337	.03362	.03337	.03277
.70	.05800	.03578	.03646	.03611	.03544
.71	.06176	.03833	.03947	.03900	.03827
.72	.06565	.04104	.04266	.04206	.04125
.73	.06967	.04396	.04604	.04528	.04442
.74	.07382	.04713	.04964	.04871	.04778
.75	.07812	.05061	.05346	.05234	.05136
.76	.08258	.05443	.05753	.05619	.05519
.77	.08718	.05862	.06186	.06030	.05929
.78	.09195	.06320	.06648	.06468	.06369
.79	.09689	.06822	.07142	.06937	.06844
.80	.10200	.07369	.07670	.07440	.07357
.81	.10729	.07966	.08236	.07981	.07914
.82	.11277	.08617	.08844	.08566	.08517
.83	.11844	.09329	.09498	.09201	.09173
.84	.12430	.10107	.10205	.09894	.09889
.85	.13038	.10959	.10972	.10656	.10673
.86	.13666	.11895	.11805	.11499	.11533
.87	.14315	.12924	.12716	.12442	.12485
.88	.14987	.14061	.13718	.13500	.13542
.89	.15682	.15321	.14827	.14691	.14724
.90	.16400	.16726	.16066	.16040	.16058
.91	.17142	.18300	.17465	.17578	.17577
.92	.17909	.20078	.19071	.19351	.19330
.93	.18701	.22105	.20953	.21423	.21387
.94	.19518	.24443	.23236	.23886	.23852
.95	.20363	.27183	.26159	.26887	.26891
.96	.21234	.30464	.30006	.30676	.30793
.97	.22132	.34524	.35175	.35725	.36109
.98	.23059	.39830	.42636	.43142	.44024
.99	.24015	.47592	.55265	.56721	.58339

Таблица 4б. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^3:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^3 < Z_p\}$, $n = 6, 7, ..., 10$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
.50	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
.51	.00123	.00122	.00121	.00120	.00119
.52	.00247	.00244	.00243	.00241	.00240
.53	.00372	.00369	.00366	.00364	.00362
.54	.00501	.00497	.00493	.00490	.00488
.55	.00634	.00628	.00624	.00620	.00617
.56	.00772	.00765	.00759	.00754	.00751
.57	.00915	.00906	.00899	.00894	.00890
.58	.01064	.01054	.01046	.01040	.01036
.59	.01220	.01208	.01199	.01193	.01188
.60	.01382	.01368	.01358	.01352	.01347
.61	.01550	.01535	.01525	.01518	.01512
.62	.01727	.01710	.01699	.01692	.01686
.63	.01911	.01894	.01882	.01874	.01868
.64	.02105	.02086	.02074	.02066	.02059
.65	.02309	.02289	.02277	.02268	.02261
.66	.02524	.02503	.02491	.02482	.02474
.67	.02749	.02728	.02716	.02706	.02698
.68	.02987	.02966	.02954	.02943	.02934
.69	.03237	.03217	.03204	.03193	.03183
.70	.03503	.03484	.03470	.03458	.03447
.71	.03785	.03766	.03752	.03739	.03727
.72	.04084	.04067	.04051	.04037	.04025
.73	.04402	.04385	.04368	.04352	.04341
.74	.04741	.04723	.04705	.04689	.04676
.75	.05104	.05085	.05065	.05048	.05036
.76	.05491	.05471	.05449	.05432	.05419
.77	.05905	.05882	.05859	.05842	.05829
.78	.06349	.06324	.06300	.06282	.06270
.79	.06827	.06799	.06774	.06757	.06744
.80	.07340	.07309	.07283	.07267	.07255
.81	.07895	.07862	.07836	.07820	.07807
.82	.08495	.08459	.08433	.08418	.08406
.83	.09147	.09109	.09085	.09070	.09057
.84	.09857	.09817	.09796	.09782	.09769
.85	.10635	.10595	.10577	.10563	.10550
.86	.11489	.11452	.11436	.11423	.11410
.87	.12434	.12401	.12390	.12376	.12364
.88	.13487	.13462	.13453	.13440	.13429
.89	.14668	.14653	.14646	.14635	.14626
.90	.16005	.16003	.15998	.15989	.15984
.91	.17536	.17548	.17545	.17541	.17540
.92	.19313	.19338	.19339	.19341	.19346
.93	.21410	.21446	.21455	.21468	.21479
.94	.23931	.23977	.24001	.24027	.24047
.95	.27039	.27101	.27149	.27193	.27225
.96	.31014	.31109	.31198	.31267	.31318
.97	.36394	.36563	.36713	.36819	.36906
.98	.44420	.44755	.44998	.45184	.45337
.99	.59220	.59907	.60388	.60773	.61082

Таблица 5а. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^4:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^4 < Z_p\}, \quad n = 1, 2, ..., 5$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
.01	.01271	.00355	.00198	.00142	.00116
.02	.01291	.00398	.00256	.00206	.00182
.03	.01312	.00440	.00313	.00267	.00245
.04	.01333	.00483	.00369	.00326	.00306
.05	.01354	.00527	.00423	.00382	.00364
.06	.01375	.00570	.00475	.00437	.00419
.07	.01396	.00614	.00526	.00488	.00472
.08	.01418	.00659	.00576	.00538	.00523
.09	.01440	.00704	.00624	.00586	.00572
.10	.01462	.00750	.00671	.00633	.00619
.11	.01485	.00796	.00717	.00678	.00666
.12	.01509	.00843	.00762	.00722	.00711
.13	.01533	.00891	.00806	.00766	.00755
.14	.01558	.00940	.00850	.00809	.00800
.15	.01584	.00990	.00893	.00852	.00843
.16	.01611	.01041	.00936	.00895	.00887
.17	.01640	.01093	.00980	.00938	.00931
.18	.01670	.01146	.01023	.00981	.00975
.19	.01701	.01200	.01067	.01025	.01020
.20	.01735	.01255	.01111	.01070	.01066
.21	.01772	.01311	.01156	.01116	.01113
.22	.01812	.01368	.01202	.01164	.01161
.23	.01857	.01426	.01249	.01213	.01211
.24	.01909	.01484	.01298	.01264	.01263
.25	.01969	.01543	.01348	.01318	.01318
.26	.02042	.01603	.01400	.01374	.01375
.27	.02134	.01663	.01454	.01434	.01435
.28	.02247	.01723	.01511	.01498	.01499
.29	.02368	.01784	.01570	.01566	.01566
.30	.02478	.01845	.01633	.01639	.01636
.31	.02575	.01907	.01699	.01715	.01710
.32	.02662	.01969	.01769	.01794	.01785
.33	.02741	.02031	.01842	.01876	.01862
.34	.02818	.02094	.01918	.01958	.01940
.35	.02893	.02158	.01996	.02041	.02018
.36	.02970	.02223	.02077	.02123	.02095
.37	.03050	.02289	.02159	.02204	.02173
.38	.03138	.02356	.02244	.02286	.02251
.39	.03237	.02424	.02330	.02368	.02330
.40	.03354	.02495	.02418	.02453	.02411
.41	.03499	.02568	.02509	.02540	.02495
.42	.03664	.02644	.02604	.02631	.02583
.43	.03821	.02723	.02705	.02729	.02676
.44	.03957	.02805	.02811	.02833	.02776
.45	.04079	.02893	.02925	.02946	.02884
.46	.04193	.02985	.03047	.03066	.02999
.47	.04307	.03083	.03176	.03192	.03120
.48	.04427	.03187	.03309	.03318	.03244
.49	.04562	.03298	.03445	.03443	.03369
.50	.04725	.03415	.03580	.03567	.03492

Таблица 5б. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^4:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^4 < Z_p\}, \quad n = 1, 2, ..., 5$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
.51	.04922	.03539	.03717	.03691	.03615
.52	.05124	.03669	.03857	.03818	.03740
.53	.05300	.03805	.04004	.03951	.03871
.54	.05455	.03945	.04161	.04094	.04012
.55	.05602	.04091	.04331	.04253	.04166
.56	.05754	.04240	.04513	.04426	.04336
.57	.05927	.04396	.04702	.04606	.04517
.58	.06138	.04558	.04890	.04784	.04699
.59	.06382	.04728	.05078	.04958	.04878
.60	.06602	.04908	.05271	.05133	.05058
.61	.06791	.05100	.05477	.05320	.05246
.62	.06970	.05306	.05705	.05528	.05456
.63	.07159	.05529	.05949	.05763	.05696
.64	.07385	.05769	.06194	.06007	.05952
.65	.07660	.06027	.06437	.06243	.06200
.66	.07920	.06302	.06688	.06476	.06444
.67	.08141	.06593	.06966	.06728	.06708
.68	.08350	.06902	.07271	.07021	.07019
.69	.08580	.07231	.07579	.07340	.07352
.70	.08866	.07583	.07883	.07643	.07667
.71	.09174	.07956	.08211	.07949	.07992
.72	.09434	.08353	.08584	.08309	.08382
.73	.09672	.08776	.08960	.08715	.08796
.74	.09933	.09228	.09335	.09094	.09184
.75	.10260	.09708	.09762	.09508	.09637
.76	.10591	.10221	.10222	.10017	.10143
.77	.10867	.10770	.10672	.10491	.10615
.78	.11139	.11356	.11194	.11044	.11202
.79	.11467	.11985	.11738	.11648	.11770
.80	.11842	.12658	.12307	.12262	.12420
.81	.12156	.13383	.12955	.12982	.13097
.82	.12454	.14162	.13609	.13726	.13869
.83	.12811	.15002	.14362	.14533	.14640
.84	.13214	.15911	.15156	.15478	.15571
.85	.13549	.16895	.16013	.16447	.16553
.86	.13882	.17965	.17000	.17506	.17597
.87	.14298	.19132	.18079	.18712	.18781
.88	.14705	.20410	.19276	.20063	.20121
.89	.15054	.21815	.20651	.21595	.21658
.90	.15457	.23368	.22247	.23371	.23424
.91	.15918	.25096	.24111	.25267	.25342
.92	.16302	.27033	.26432	.27600	.27708
.93	.16710	.29226	.29154	.30278	.30470
.94	.17203	.31737	.32459	.33427	.33937
.95	.17620	.34660	.36537	.37396	.38193
.96	.18052	.38137	.41671	.42525	.43699
.97	.18573	.42414	.48623	.49533	.51416
.98	.19016	.47969	.58504	.60376	.62859
.99	.19473	.56052	.75560	.81141	.84804

Таблица 5в. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^4:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^4 < Z_p\}, \quad n = 6, 7, ..., 10$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
.01	.00104	.00097	.00092	.00088	.00085
.02	.00172	.00166	.00162	.00159	.00155
.03	.00237	.00233	.00230	.00226	.00223
.04	.00300	.00296	.00293	.00289	.00286
.05	.00359	.00356	.00353	.00349	.00346
.06	.00415	.00412	.00409	.00405	.00401
.07	.00468	.00465	.00462	.00458	.00454
.08	.00519	.00516	.00512	.00508	.00505
.09	.00568	.00565	.00560	.00556	.00553
.10	.00616	.00612	.00607	.00602	.00599
.11	.00662	.00657	.00652	.00647	.00644
.12	.00707	.00702	.00696	.00691	.00687
.13	.00751	.00745	.00739	.00734	.00730
.14	.00795	.00788	.00782	.00776	.00773
.15	.00838	.00831	.00824	.00819	.00815
.16	.00881	.00873	.00866	.00860	.00856
.17	.00925	.00916	.00908	.00902	.00898
.18	.00968	.00959	.00951	.00945	.00941
.19	.01013	.01002	.00994	.00988	.00983
.20	.01058	.01047	.01037	.01031	.01027
.21	.01104	.01092	.01082	.01076	.01072
.22	.01151	.01138	.01128	.01122	.01117
.23	.01200	.01186	.01176	.01169	.01165
.24	.01251	.01236	.01225	.01218	.01214
.25	.01304	.01288	.01277	.01270	.01266
.26	.01359	.01342	.01331	.01324	.01320
.27	.01417	.01400	.01388	.01382	.01377
.28	.01479	.01460	.01449	.01442	.01438
.29	.01543	.01524	.01513	.01507	.01502
.30	.01611	.01592	.01581	.01575	.01571
.31	.01682	.01663	.01652	.01647	.01642
.32	.01756	.01736	.01727	.01722	.01717
.33	.01831	.01812	.01803	.01799	.01794
.34	.01908	.01889	.01881	.01877	.01872
.35	.01985	.01967	.01960	.01956	.01951
.36	.02062	.02045	.02039	.02034	.02029
.37	.02140	.02123	.02117	.02113	.02108
.38	.02218	.02202	.02196	.02192	.02186
.39	.02297	.02282	.02276	.02271	.02265
.40	.02378	.02363	.02357	.02352	.02346
.41	.02461	.02447	.02441	.02435	.02429
.42	.02549	.02535	.02529	.02523	.02516
.43	.02641	.02628	.02622	.02615	.02608
.44	.02740	.02729	.02722	.02714	.02707
.45	.02847	.02837	.02830	.02822	.02814
.46	.02962	.02953	.02947	.02938	.02930
.47	.03083	.03077	.03071	.03062	.03053
.48	.03209	.03204	.03198	.03189	.03181
.49	.03336	.03332	.03326	.03317	.03309
.50	.03462	.03459	.03452	.03443	.03435

Таблица 5г. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^4:
$F_n^k(Z_p) = Pr\{\omega_n^4 < Z_p\}, \quad n = 6, 7, ..., 10$

	Процентные точки Z_p				
$F_n^k(Z_p)$	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
.51	.03588	.03585	.03578	.03568	.03560
.52	.03717	.03713	.03705	.03695	.03687
.53	.03851	.03847	.03838	.03826	.03818
.54	.03995	.03991	.03980	.03968	.03960
.55	.04153	.04149	.04137	.04125	.04116
.56	.04327	.04324	.04312	.04299	.04291
.57	.04513	.04510	.04497	.04485	.04478
.58	.04699	.04695	.04683	.04671	.04665
.59	.04881	.04876	.04863	.04852	.04846
.60	.05064	.05057	.05043	.05032	.05027
.61	.05256	.05248	.05232	.05221	.05216
.62	.05471	.05462	.05444	.05433	.05428
.63	.05714	.05704	.05686	.05676	.05672
.64	.05969	.05958	.05942	.05933	.05930
.65	.06215	.06202	.06187	.06180	.06177
.66	.06459	.06444	.06428	.06421	.06418
.67	.06725	.06708	.06691	.06685	.06682
.68	.07037	.07018	.07002	.06998	.06996
.69	.07366	.07347	.07334	.07333	.07331
.70	.07677	.07657	.07645	.07644	.07642
.71	.08002	.07979	.07968	.07968	.07965
.72	.08392	.08368	.08360	.08363	.08361
.73	.08799	.08778	.08774	.08777	.08776
.74	.09184	.09162	.09160	.09162	.09160
.75	.09635	.09613	.09616	.09621	.09620
.76	.10135	.10118	.10125	.10130	.10130
.77	.10604	.10589	.10598	.10602	.10602
.78	.11185	.11177	.11195	.11202	.11203
.79	.11752	.11748	.11764	.11769	.11770
.80	.12398	.12405	.12432	.12441	.12445
.81	.13076	.13088	.13110	.13117	.13121
.82	.13847	.13879	.13911	.13922	.13931
.83	.14624	.14662	.14690	.14701	.14713
.84	.15562	.15610	.15638	.15650	.15664
.85	.16560	.16635	.16670	.16691	.16711
.86	.17627	.17725	.17770	.17800	.17830
.87	.18838	.18949	.18998	.19037	.19076
.88	.20220	.20348	.20406	.20457	.20503
.89	.21820	.21951	.22012	.22065	.22109
.90	.23596	.23703	.23762	.23821	.23869
.91	.25631	.25801	.25907	.25999	.26062
.92	.28002	.28168	.28315	.28452	.28545
.93	.30873	.31105	.31288	.31416	.31499
.94	.34357	.34547	.34752	.34956	.35120
.95	.38636	.39005	.39338	.39513	.39635
.96	.44324	.44811	.45089	.45313	.45589
.97	.52044	.52835	.53193	.53653	.54031
.98	.64024	.65095	.65994	.66382	.66839
.99	.87429	.88984	.90310	.91491	.92022

Таблица 6а. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^5: $F_n^k(Z_p) = Pr\,\{\omega_n^5 < Z_p\}\,, \quad n = 1, 2, ..., 5$

$F_n^k(Z_p)$	Процентные точки Z_p				
	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
.50	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
.51	.00064	.00035	.00032	.00032	.00032
.52	.00127	.00071	.00064	.00065	.00065
.53	.00192	.00107	.00096	.00097	.00097
.54	.00258	.00143	.00128	.00130	.00130
.55	.00325	.00179	.00161	.00164	.00164
.56	.00395	.00217	.00195	.00199	.00199
.57	.00467	.00256	.00230	.00234	.00234
.58	.00543	.00295	.00265	.00270	.00270
.59	.00623	.00337	.00303	.00308	.00308
.60	.00707	.00380	.00342	.00348	.00348
.61	.00797	.00425	.00383	.00390	.00390
.62	.00894	.00473	.00426	.00436	.00434
.63	.00997	.00524	.00474	.00484	.00483
.64	.01109	.00579	.00526	.00538	.00536
.65	.01228	.00639	.00584	.00598	.00595
.66	.01355	.00705	.00651	.00668	.00662
.67	.01489	.00778	.00730	.00751	.00742
.68	.01632	.00859	.00829	.00854	.00839
.69	.01783	.00949	.00957	.00985	.00960
.70	.01946	.01048	.01117	.01139	.01105
.71	.02122	.01153	.01282	.01294	.01256
.72	.02313	.01264	.01434	.01436	.01399
.73	.02518	.01379	.01577	.01572	.01534
.74	.02735	.01501	.01719	.01707	.01668
.75	.02963	.01635	.01876	.01856	.01811
.76	.03206	.01793	.02072	.02036	.01979
.77	.03469	.01999	.02354	.02288	.02205
.78	.03752	.02288	.02670	.02593	.02507
.79	.04053	.02594	.02931	.02854	.02787
.80	.04367	.02874	.03189	.03096	.03036
.81	.04703	.03198	.03544	.03391	.03321
.82	.05067	.03671	.04025	.03844	.03771
.83	.05451	.04107	.04402	.04247	.04217
.84	.05852	.04610	.04870	.04633	.04622
.85	.06286	.05257	.05501	.05264	.05291
.86	.06745	.05910	.06029	.05789	.05840
.87	.07224	.06708	.06837	.06569	.06681
.88	.07742	.07678	.07577	.07278	.07423
.89	.08283	.08749	.08498	.08326	.08455
.90	.08856	.09999	.09634	.09547	.09674
.91	.09466	.11473	.10921	.10955	.11071
.92	.10104	.13148	.12399	.12604	.12741
.93	.10785	.15327	.14240	.14881	.14957
.94	.11497	.17894	.16554	.17590	.17644
.95	.12250	.21055	.19795	.21173	.21258
.96	.13050	.25229	.24339	.25819	.25893
.97	.13878	.30585	.31265	.32683	.33437
.98	.14762	.38240	.42757	.44272	.45065
.99	.15703	.50382	.64897	.67313	.70763

Таблица 6б. Процентные точки Z_p случайной величины ω_n^5: $F_n^k(Z_p) = Pr\,\{\omega_n^5 < Z_p\}\,, \quad n = 6, 7, ..., 10$

$F_n^k(Z_p)$	Процентные точки Z_p				
	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
.50	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
.51	.00032	.00032	.00031	.00031	.00031
.52	.00064	.00064	.00063	.00063	.00063
.53	.00097	.00096	.00095	.00095	.00094
.54	.00129	.00128	.00127	.00127	.00126
.55	.00163	.00161	.00160	.00159	.00159
.56	.00197	.00195	.00193	.00193	.00192
.57	.00232	.00229	.00228	.00227	.00226
.58	.00268	.00265	.00263	.00262	.00261
.59	.00305	.00302	.00300	.00298	.00298
.60	.00344	.00341	.00338	.00337	.00336
.61	.00386	.00381	.00378	.00377	.00376
.62	.00429	.00425	.00421	.00420	.00419
.63	.00477	.00471	.00468	.00466	.00465
.64	.00528	.00522	.00518	.00516	.00515
.65	.00586	.00578	.00574	.00572	.00570
.66	.00651	.00642	.00638	.00635	.00633
.67	.00728	.00717	.00712	.00709	.00707
.68	.00820	.00808	.00803	.00800	.00797
.69	.00936	.00922	.00918	.00914	.00911
.70	.01076	.01064	.01061	.01058	.01053
.71	.01228	.01219	.01218	.01216	.01211
.72	.01374	.01369	.01369	.01366	.01362
.73	.01512	.01510	.01509	.01506	.01501
.74	.01648	.01647	.01646	.01641	.01637
.75	.01792	.01793	.01789	.01784	.01779
.76	.01960	.01962	.01957	.01949	.01943
.77	.02187	.02190	.02181	.02170	.02163
.78	.02501	.02503	.02493	.02483	.02475
.79	.02791	.02791	.02783	.02775	.02770
.80	.03046	.03044	.03035	.03027	.03023
.81	.03339	.03334	.03320	.03310	.03305
.82	.03802	.03791	.03772	.03762	.03759
.83	.04237	.04226	.04215	.04210	.04209
.84	.04643	.04628	.04613	.04607	.04606
.85	.05309	.05289	.05276	.05276	.05276
.86	.05850	.05832	.05822	.05823	.05822
.87	.06684	.06660	.06658	.06665	.06665
.88	.07418	.07393	.07394	.07401	.07399
.89	.08443	.08430	.08440	.08446	.08446
.90	.09657	.09654	.09673	.09680	.09682
.91	.11052	.11065	.11091	.11098	.11103
.92	.12721	.12777	.12826	.12846	.12865
.93	.14964	.15029	.15063	.15081	.15100
.94	.17696	.17793	.17834	.17868	.17902
.95	.21450	.21574	.21634	.21694	.21730
.96	.26515	.26743	.26894	.26898	.26978
.97	.33819	.34191	.34446	.34704	.34895
.98	.46166	.47256	.47476	.47838	.47685
.99	.72513	.74115	.75267	.76172	.76901

Заключение

Рассмотрены основные характеристики непараметрических статистик вида ω_n^k, которые могут быть представлены в виде интеграла от k-й степени эмпирического процесса. Получен алгебраический вид статистик, удобный для практических применений. Предложен обобщённый метод численного определения функций распределения статистик ω_n^k, с помощью которого вычислены таблицы процентных точек для $k = 1, 2, ..., 5$ при малых объёмах эмпирической выборки $n = 1, 2, ..., 10$. Проведено их сопоставление с известными табличными данными. Построены критерии согласия на основе указанных статистик и рассмотрены их основные свойства. Проведено сравнение критериев ω_n^k для $k = 1, 2, ..., 5$ по мощности.

Литература

[1] T.Ludlam et al. Phys.Rev.D, 1973, **v.8, No.5,** p.408; Phys.Rev.D, 1977, **v.16, No.1,** p.100.

[2] П.В.Зрелов, В.В.Иванов. *"Метод выделения маловероятных событий с помощью критерия согласия Смирнова-Крамера-Мизеса"*.Препринт ОИЯИ Р10-86-812, Дубна, 1986.

[3] P.V.Zrelov, V.V.Ivanov. *"Test Statistics* $\omega_n^3 = n^{\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - P(x)]^3 dP(x)$ *and its Main Properties"*. Transactions of the Eleventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Prague, from August 27 to 31, 1990. ACADEMIA Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1992, p.487 - 498.

[4] А.Н.Колмогоров. *"Теория вероятностей и математическая статистика"*. М.: Наука, 1986. Комментарий Э.В.Хмаладзе *"Эмпирические распределения"*.

[5] П.В.Зрелов, В.В.Иванов. *"Проверочная статистика* $\omega_n^3 = n^{\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - P(x)]^3 dP(x)$ *в теории непараметрических критериев согласия"*. Сообщение ОИЯИ Р10-88-321, Дубна, 1988.

[6] Z.W.Birnbaum, V.K.T.Tang. Rev. Inst. Statist., 1964, **32**, p.2.

[7] D.G.Chapman. Ann. Math. Statist., 1958, **v.32**, p.655.

[8] П.В.Зрелов. *"Обобщённые моментные функции эмпирического процесса и интегральные непараметрические статистики"*. Сообщение ОИЯИ Р11-92-398. Дубна, 1992.

[9] M.Knott M. *"The Distribution of the Gramer – Von Mises Statistic for Small Sample Sizes*. J. Roy. Statist. Soc. **B36, 3**, 1973, p.430 - 436.

[10] Interpolation and Allied Tables (1956). London: H.M.S.O.

[11] A.W.Marshall. *"The Small Distribution* $n\omega_n^2$*"*. Ann. of Math. Statist., 1979, **v.29**, p.307.

[12] П.В.Зрелов, В.В.Иванов. *"Функции распределения статистики Смирнова- Крамера-Мизеса для малых выборок"*. Препринт ОИЯИ Р10-86-547, Дубна, 1986.

[13] V.V.Ivanov, P.V.Zrelov. *"The Distribution Functions of the* $\omega_n^3 = n^{\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - P(x)]^3 dP(x)$ *Statistic for Small n*. JINR Preprint D11-92-139, Dubna, 1992. Submitted to the "Mathematical Modelling".

[14] П.В.Зрелов, В.В.Иванов. *"Критерии согласия, основанные на проверочной статистике* $\omega_n^3 = n^{\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - P(x)]^3 dP(x)$*. Определения и свойства. Мощность для малых n"*. Сообщение ОИЯИ Р10-89-577, Дубна, 1989.

[15] П.В.Зрелов, В.В.Иванов. *"Критерии согласия, основанные на проверочной статистике* $\omega_n^3 = n^{\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - P(x)]^3 dP(x)$*. Исследование мощности одностороннего критерия для больших n"*. Сообщение ОИЯИ Р11-92-409, Дубна, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1992 года.