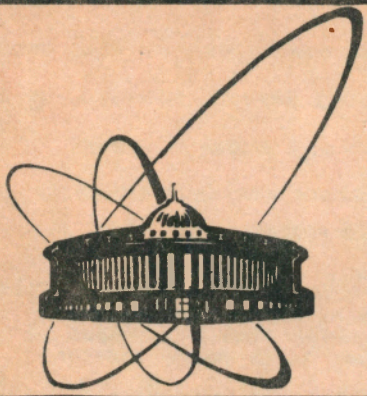

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р10-91-187

Е.В.Белякова

МЕТОД РЕГУЛИРОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ДАННЫХ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ СКОРОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1991

1. При обработке числовых данных на ЭВМ возникают погрешности, связанные с чисто машинными особенностями.

Работающая в настоящее время в ОИЯИ вычислительная машина VAX-8350 допускает точность 33 десятичных знака после запятой. Однако применение двойной или тем более четверной точности существенно влияет на скорость вычислений.

В настоящей работе предлагается метод, который позволит получать данные с любой промежуточной точностью вплоть до максимальной.

2. На VAX-8350 существуют 4 формата для представления действительных чисел:

F-format (float) имеет точность 7 десятичных знаков;

D-format (double precision) - 16 знаков;

G-format (grant) - 16 знаков;

H-format (huge) - 33 знака.

3. Рассмотрим задачу о суммировании N чисел. a_1, a_2,...,a_N хранятся в памяти в определенном формате, и $\sum_{i=1}^{N} a_i = S$. Число S известно и тоже хранится в памяти. Для иллюстрации можно взять задачу суммирования вероятностей, здесь S = 1.

Предполагается, что числа a_i после округления до n-го знака после запятой используются в дальнейших вычислениях. Возникает вопрос, как следует произвести округление, чтобы сумма S' округленных чисел a'_i имела бы минимальное отклонение от S ?

Пример: a=6,768239. Пусть n=3, тогда a'=6,768.

Введем погрешность округления ζ суммы S: $\sum_{i=1}^{N} a_i' = S + \zeta$.

Если $\zeta>0$, то округление выполняется с избытком. Если $\zeta<0$ - то с недостатком. Случай $\zeta=0$ практически невозможен.

Введем функцию $\eta_n(x)$: $0 \le \eta_n(x) \le 10^{-n}$ для любого $n \ge 1$. $\eta_n(x)$ можно выразить элементарными функциями:

$\eta_n(x) = x - 10^{-n} * [10^n * x]$, где операция [ ] означает взятие целой части числа.

Заметим, что функция $\eta_n(x)$ сохраняет знак аргумента. Например, $\eta_2(6,01785)=0,00785$.

Положим: $\eta_i = \eta_n(a_i)$ $S_\eta = \sum_{i=1}^{N} \eta_i$ и для n фиксированного возьмем $c = 10^{-n}/2$.

Если $\eta_i < c$, то округление до n-го знака после запятой выполняется с недостатком, иначе - с избытком.

Пусть $I_{(a>b)}$ - функция-индикатор.

$$I_{(a>b)} = \begin{cases} 0, & a \le b \\ 1, & a > b. \end{cases}$$

Представим сумму S_η в следующем виде:

$$S_\eta = \sum_{i=1}^{N} \eta_i * I_{(\eta_i > c)} + \sum_{j=1}^{N} \eta_j * I_{(\eta_j < c)} = S_\eta^{up} + S_\eta^{down}.$$

Пусть $k = \sum_{i=1}^{N} I_{(\eta_i > c)}$ и $K = \sum_{j=1}^{N} I_{(\eta_j < c)}$.

Следовательно, справедливы оценки:

$$k*c \le S_\eta^{up} \le 10^{-n}*K$$

$$0 \le S_\eta^{down} < k*c.$$

4. Вспомним, что при округлении сумма $\sum_{i=1}^{N} a_i$ меняется на величину ζ:

$$\zeta = \sum_{i=1}^{N} (10^{-n} - \eta_i * I_{(\eta_i > c)}) - \sum_{i=1}^{N} \eta_j * I_{(\eta_j < c)} =$$

$$= 10^{-n}*N - S_\eta^{up} - S_\eta^{down} = 10^{-n}*N - S_\eta.$$

Итак, $\zeta = 10^{-n} \cdot N - S_\eta$, то есть ζ зависит от S_η и от выбора параметра n функции $\eta_n(x)$.

Обозначим $L_\zeta = \frac{|\zeta-\eta_n(\zeta)|}{10^{-n}} = 10^n * (|\zeta-\eta_n(\zeta)|)$,

L_ζ - целочисленная функция.

Число поправок после первого округления, выполняемого "в лоб", можно определить так:

$$L = \begin{cases} L_\zeta+1, & \text{если } \zeta>0 \text{ и } \eta_n(\zeta)\ge c \text{ и } \eta_n(S)<c, \\ L_\zeta, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим окончательную погрешность $\delta = |S-S''|$, $\delta \le c=10^{-n}/2$.

5. Примеры использования алгоритма в задачах суммирования.

Пример 1.

N=6, n=2.

a_i	a'_i	a''_i
a_1=1,1129	a'_1=1,11	a''_1=1,11
a_2=1,1568	a'_2=1,16	a''_2=1,16
a_3=1,8860	a'_3=1,89	a''_3=1,89
a_4=1,0009	a'_4=1,00	a''_4=1,00
a_5=1,0177	a'_5=1,02	a''_5=1,02
a_6=1,1551	a'_6=1,16	a''_6=1,15
S=7,3285	S'=7,34	S''=7,33

ζ=0,0115 > 0, $c = 10^{-2} = 0,01$

$\eta_2(S)$=0,0085 ≥ c, но

$\eta_2(\zeta)$=0,0015 < c,

следовательно,

$L=L_\zeta=\frac{|0,0115-0,0015|}{0,01}=1$,

то есть достаточно отнять величину 0,01 от любого числа среди a'_i, чтобы выполнялось: $\delta = |S-S''| = |-0,0015| < c = 0,005$.

В конкретном примере изменено a''_6=1,15.

Пример 2.

N=10, n=2.

Пусть S=7,9814, а $S' = \sum_{i=1}^{10} a'_i = 7,95$.

ζ=-0,0314 - окружение выполнено с недостатком.

$$L_\zeta = \frac{|-0,0314-0,0014|}{0,01} = 3$$

$L = L_\zeta = 3$.

Следовательно, к первым трем a'_i прибавляем по 0,01. Итак, S''= 0,03+S'= 7,98 и $\delta=|S-S''|=0,0014<0,05$.

Пример 3.

N=20, n=2. Пусть S=7,2441, а S'=7,28. Тогда ζ=0,0359. Находим $L = -\frac{0,03}{0,01} + 1 = 4$. Вносим поправки и получаем: S''=7,24.

6. Заключение

Рассмотренный алгоритм оптимального округления чисел с заведомо заданной погрешностью очень удобен и прост благодаря введению функции $\eta_n(x)$.

Таким образом, используя $\eta_n(X)$ - функцию выделения дробной части числа X, начиная с (n+1)-го десятичного знака, можно работать исключительно с выбранной и удобной точностью, и колоссально увеличить скорость вычислений на компьютерах, так как несравненно быстрее работать с числами, которые имеют ограниченное количество значащих цифр после запятой.

Процедуру с функцией $\eta_n(X)$ целесообразно вставлять после групп промежуточных операций.

Область применения метода достаточно широка - от частных небольших задач до обработки данных с физических установок, в особенности для оптимальной упаковки информации о событиях.

В перспективе это означает экономию памяти ЭВМ и магнитних носителей.

Автор благодарит Кривохижина В.Г. и Кухтина В.В. за ценные замечания о работе.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1991 года.

Белякова Е.В. Р10-91-187

Метод регулирования точности данных
для увеличения скорости вычислений

Предлагается метод, который позволяет получить данные с любой промежуточной точностью /вплоть до машинной максимальной/ и увеличить тем самым скорость вычислений.

Работа выполнена в Лаборатории сверхвысоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод автора

Belyakova E.V. P10-91-187

The Method of Accuracy Data Regularization
for the Speed Calculation Increase

The proposed method allows to get the data with any transient accuracy up to max permissible at a concrete computer. So it´s possible to increase the speed of calculations.

The investigation has been performed at the Particle Physics Laboratory, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991