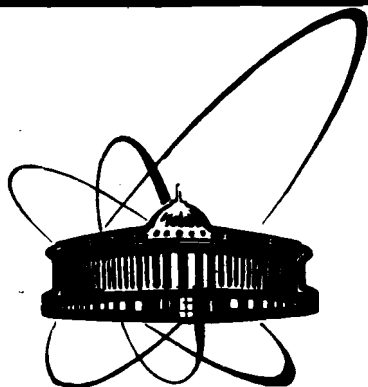


89-682



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

E601

P10-89-682

Г.А.Емельяненко, В.Г.Одинцов, Т.Т.Рахмонов*

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФАКТОРИЗОВАННЫХ
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ
И ИМ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ
ПРИ СОЗДАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ
ДЛЯ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИИ, РЕГИСТРИРУЕМОЙ
СПЕКТРОМЕТРАМИ ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ**

***Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент**

1989

В в е д е н и е

Настоящая работа посвящена описанию свойств факторизованных представлений симметрических блочно-трехдиагональных (и им обратных) матриц и результатов их использования при анализе трековой информации в области физики высоких энергий.

В работах [1-4] предложена математическая модель и аналитический вид формул для восстановления кинематических параметров треков заряженных частиц. При этом в указанной модели восстановления треков частиц использовался ряд свойств факторизованных представлений информационных матриц. Впоследствии, при практических расчетах [5] в рамках описанной модели [2], выяснилось, что информационная матрица в факторизованном представлении является плохо обусловленной. Это обстоятельство (при использовании математического аппарата [1,2]) приводило к неустойчивости вычислений.

В работах [6-8] были изучены свойства блочно-трехдиагональных (и им обратных) матриц общего вида и приведены их факторизованные представления, не использующие трехточечных рекуррентных соотношений [1,2]. Поскольку информационные матрицы в [1,2] относятся к указанному типу матриц, то это дало возможность применить устойчивый (в отличие от [1,2]) математический аппарат для факторизации информационных матриц.

На основе [6-8] сформулируем следующую теорему для симметрических блочно-диагональных матриц.

Теорема. Пусть A - неособенная симметрическая блочно-трехдиагональная матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & \\ a_2^T & b_2 & a_3 & & \\ & a_3^T & b_3 & a_4 & \\ & & & \dots & \\ & & & a_{m-1}^T & b_{m-1} & a_m \\ & & & & a_m^T & b_m \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\{ \det(a_k) \neq 0 \neq \det(a_k^T) \}_{k=2}^m$ - все (над)поддиагональные элементы-блоки неособенные. Пусть также все ведущие блочные угловые миноры матрицы $A(1)$ отличны от нуля. Тогда элементы-блоки матрицы $A^{-1} = B$, обратной к A , могут быть представлены в виде

$$B_{ij} = \begin{cases} V_i \cdot W_j, & \text{если } 1 \leq i \leq j \leq m, \\ W_i^T \cdot V_j^T, & \text{если } 1 \leq j \leq i \leq m, \end{cases} \quad \text{где} \quad (2)$$

$$\begin{cases} V_i = \left(\prod_{k=2}^i C_k \right)^{-1}, & V_1 = E_1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ W_j = \left(\prod_{k=2}^j C_k \cdot B_{jj} \right), & W_1 = B_{11}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (3)$$

Математическая модель восстановления кинематических параметров треков с использованием нового факторизованного представления информационных матриц

$$\begin{cases} C_{k+1} = -(\bar{L}_{k+1}^{-1} \cdot a_{k+1}), \quad k=1, 2, \dots, m-1, \\ \bar{L}_{k+1} = \delta_k - a_{k+1}^T \cdot \bar{L}_k^{-1} \cdot a_{k+1}, \quad \bar{L}_2 = \delta_1, \quad k=2, 3, \dots, m, \\ \bar{G}_{k-1} = \delta_k - a_{k+1} \cdot \bar{G}_k^{-1} \cdot a_{k+1}^T, \quad \bar{G}_{m-1} = \delta_m, \quad k=m-1, m-2, \dots, 1, \\ B_{kk} = (\bar{L}_{k+1} + \bar{G}_{k-1} - \delta_k)^{-1}, \quad B_{11} = \bar{G}_0^{-1}, \quad B_{mm} = \bar{L}_{m+1}^{-1}, \quad k=2, 3, \dots, m. \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство. Справедливость представления (2)+(4) устанавливается непосредственно проверкой основных равенств

$$A \cdot B = E = B \cdot A. \quad (5)$$

Равенства (5), очевидно, эквивалентны следующим системам матричных равенств:

$$\begin{cases} a_i^T \cdot B_{i-1j} + \delta_i \cdot B_{ij} + a_{i+1} \cdot B_{i+1j} = 0_{ij}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq m, \\ a_i^T \cdot B_{i-1j} + \delta_i \cdot B_{ii} + a_{i+1} \cdot B_{i+1i} = E_i, & \text{если } 1 \leq i = j \leq m, \\ a_{i+1} \cdot B_{i+1j} + \delta_i \cdot B_{ij} + a_i^T \cdot B_{i-1j} = 0_{ij}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq m; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} B_{i+1} \cdot a_{i+1}^T + B_{ij} \cdot \delta_j + B_{ij-1} \cdot a_j = 0_{ij}, & \text{если } 1 \leq i < j \leq m, \\ B_{i+1} \cdot a_i^T + B_{ii} \cdot \delta_i + B_{i+1i} \cdot a_{i+1}^T = E_i, & \text{если } 1 \leq i = j \leq m, \\ B_{i+1} \cdot a_j^T + B_{ij} \cdot \delta_j + B_{i+1j-1} \cdot a_{j+1}^T = 0_{ij}, & \text{если } 1 \leq j < i \leq m. \end{cases} \quad (7)$$

При проверке систем матричных равенств (6) и (7) следует воспользоваться ранее полученными равенствами [6]:

$$\begin{cases} \hat{C}_{k+1} \cdot B_{kk} = B_{k+1k+1} \cdot \hat{\beta}_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq m-1, \\ B_{kk} \cdot \hat{\beta}_k = \hat{C}_k \cdot B_{k-1k}, \quad 2 \leq k \leq m; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} B_{kk} \cdot \hat{\beta}_{k+1} = C_{k+1} \cdot B_{k+1k+1}, \quad 1 \leq k \leq m-1, \\ C_k \cdot B_{kk} = B_{k-1k-1} \cdot \hat{\beta}_k, \quad 2 \leq k \leq m, \end{cases} \quad \text{где} \quad (9)$$

B_{kk} - есть (4)₄) и

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{k+1} = -(a_{k+1}^T \cdot \bar{L}_{k+1}^{-1}), & \hat{\beta}_{k+1} = -(a_{k+1} \cdot \bar{G}_k^{-1}), \\ C_{k+1} = -(\bar{L}_{k+1}^{-1} \cdot a_{k+1}), & \hat{C}_{k+1} = -(\bar{G}_k^{-1} \cdot a_{k+1}^T), \quad k=1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (10)$$

Подставив (2)+(4) в (6) и (7), получаем (8) и (9), что и доказывает теорему.

Поиск кинематических параметров заряженных частиц осуществляется на основании анализа координат точек вдоль треков событий в пространстве детектора. Этот анализ, как правило, связан с минимизацией функции правдоподобия, вид которой зависит от оптимальной гипотезы о параметрах частицы. Воспользуемся [2] следующим видом функции правдоподобия:

$$L = (2\pi)^{-N/2} \cdot |C|^{1/2} \cdot \exp[-\frac{1}{2} \Delta Y \cdot C^{-1} \Delta Y^T], \quad \text{где} \quad (11)$$

$[\Delta Y = Y - \langle Y \rangle]$ - вектор случайных отклонений измеренных координат точек на треке $Y = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$, $\langle Y \rangle$ - вектор средних значений для Y , т.е. $\langle Y \rangle = a \cdot X + b$, (12)

$$C = \sum_{\text{кул.}} + \sum_{\text{изм.}}, \quad C^{-1} = \left(\sum_{\text{кул.}} + \sum_{\text{изм.}} \right)^{-1}, \quad \text{где}$$

$\sum_{\text{кул.}}$ - ковариационная матрица кулоновского рассеяния,
 $\sum_{\text{изм.}}$ - матрица аппаратурных погрешностей.

В [1] показано, что имеет место представление

$$\sum_{\text{кул.}} + \sum_{\text{изм.}} = G (A + G^{-1} \sum_{\text{изм.}} \cdot G^{-T}) \cdot G^T. \quad (13)$$

Здесь

$$G = (E_\Delta \cdot \mathcal{D}_S \cdot E_\Delta), \quad G^{-1} = (E_\Delta \cdot \mathcal{D}_S \cdot E_\Delta)^{-1};$$

$$\mathcal{D}_S = \text{diag}(\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_N); \quad \sum_{\text{изм.}} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2);$$

$$E_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & (-1) & & & \\ & & (-1) & & \\ & & & (-1) & \\ & & & & (-1) \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} [2(\tilde{\gamma}_0^2 + \tilde{\gamma}_1^2)] \tilde{\gamma}_1^2 & & & & \\ \tilde{\gamma}_1^2 [2(\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\gamma}_2^2)] \tilde{\gamma}_2^2 & & & & \\ & \tilde{\gamma}_2^2 [2(\tilde{\gamma}_{N-2}^2 + \tilde{\gamma}_{N-1}^2)] \tilde{\gamma}_{N-1}^2 & & & \\ & & \tilde{\gamma}_{N-1}^2 [2(\tilde{\gamma}_{N-1}^2 + \tilde{\gamma}_N^2)] \tilde{\gamma}_N^2 & & \\ & & & \tilde{\gamma}_N^2 [2(\tilde{\gamma}_N^2 + \tilde{\gamma}_N^2)] \tilde{\gamma}_N^2 & \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\tilde{\gamma}_i^2 = \gamma_i^2 \cdot \Delta S_i, \quad \tilde{\gamma}_0^2 = 0, \quad \gamma_i^2 = \frac{(21.2)^2}{2} \cdot \frac{1}{(i) \chi_{\text{раб.}}} \cdot \frac{E_{i+1} \cdot E_i}{(P_{i+1} P_i)^2}, \quad (15)$$

(i) $\chi_{\text{рад.}}$ - радиационная длина i - элементарного рассеивателя,

E_i, E_{i+1} и P_i, P_{i+1} - энергия и импульс частицы в начале и в конце i - элементарного участка траектории соответственно, $S = \sum_{i=1}^N \Delta S_i$.

Из (13) следует [1], что $G^{-1} \sum_{\text{изм.}} \cdot G^{-T}$ есть пятидиагональная матрица:

Здесь определены

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_i &= \Phi_{i-1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta S_{i-1}}{\Delta S_i}\right) + \frac{\sigma_{i-1}^2}{\Delta S_i^2} + \left(\frac{\sigma_{i-2}^2}{\Delta S_{i-2}^2}\right) - \Phi_{i-2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta S_{i-2}}{\Delta S_{i-1}}\right), \quad i=1, 2, \dots, N; \\ q_i &= \Phi_{i-1} \cdot \left(\frac{\Delta S_{i-1}}{\Delta S_i}\right) + \Phi_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, N-1; \quad \rho_i = \Phi_{i-1} - \frac{\sigma_{i-1}^2}{\Delta S_{i-1}^2}, \quad i=1, \dots, N-1, \\ \text{где} \\ \Phi_{i-1} &= \frac{\sigma_{i-1}^2}{\Delta S_{i-1}^2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta S_{i-1}}{\Delta S_i}\right), \quad i=0, 1, \dots, N; \quad \sigma_{-1}^2 = 0 = \sigma_0^2, \quad \Delta S_{-1} = 1, \\ \Delta S_0 &= \Delta S_1, \quad \rho_0 = 1 = \rho_1, \quad \rho_N = 1 = \rho_{N+1}, \quad q_N = 1/\sigma \cdot \tilde{\gamma}_N^2. \end{aligned} \right.$$

Учитывая плохую обусловленность матриц $G^{-1} \sum_{\text{изм.}} G^{-T}$ и $(G^{-1} \sum_{\text{изм.}} G^{-T} + A)$, вместо (18)+(19) для вычисления элементов - блоков (18) матрицы $(V \cdot W)$ мы используем (в силу доказанной выше теоремы) перекуррентные представления вида (2)+(4).

В работах [3,4] была получена аналитическая формула для определения кинематических параметров a и δ прямолинейных треков. В данной работе она приведена с использованием представлений весовых матриц V и W (2)+(4) и имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} a &= t_2 + \frac{\det \left[\sum_{i=2}^m \delta t_i \cdot w_i^T \right]}{\det(W_1)}, \\ \frac{\delta}{\Delta S_1} &= t_1 - t_2 + \frac{K \cdot (a - t_2)}{F P^T} + \frac{P \cdot \sum_{i=2}^m w_i \cdot \delta t_i^T}{F P^T}. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Здесь a - наклон трека, δ - интерсепт, $\Delta S_k^{**} = X_k - X_{k-1}$, X_i - координата i -той точки трека, $t_i = (V_i - V_{i-1})/\Delta S_i$ - направление движения частицы в i -той точке трека, $F = (W_{11} - W_{12}, W_{21} - W_{22})$, $P = (V_{11}, V_{12}), K = V_{11}W_{11} + V_{12}W_{21}$, V и W - квазивекторы в представлении (2)+(4) информационной матрицы (17), (18).

Для расчета кинематических параметров треков по формуле (21) была создана программа с использованием матриц (V_i, W_i) в представлении (2)+(11). Эта программа была включена в ранее созданный пакет программы моделирования [13].

x) Здесь предположили, что частицы вылетают в узком конусе под малыми углами к оси OX . В противном случае $\Delta S_k \approx \Delta X_k \cdot \sqrt{1 + t_k^2}$.

Результаты расчетов параметров заряженных частиц

Процедура получения оценок кинематических параметров в рамках вышеописанной модели была выполнена для одной из конфигураций спектрометра "Гиперон" / II/, предназначенного для изучения широкого класса процессов |I2| образования и распада частиц высоких энергий на 76-ГэВ ускорителе ИФВЭ, в частности процессов типа |I2|



в области энергий 5+20 ГэВ.

Схематическое изображение одного из вариантов установки "Гиперон" приведено на рисунке.

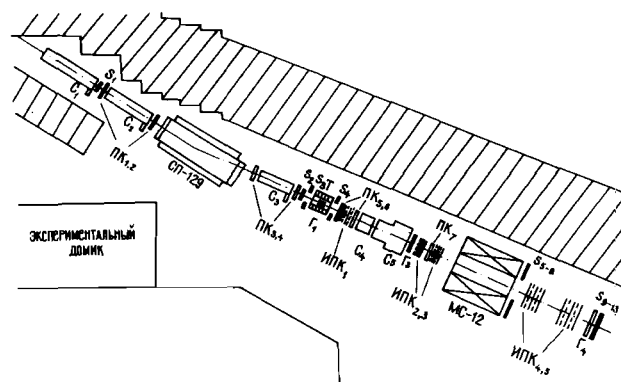


Схема расположения экспериментального оборудования установки "Гиперон".

Установка состоит из трех основных частей:

- 1) пучкового спектрометра на основе 4-метрового магнита и блоков пропорциональных камер ИПК₁₋₄. Служит для уточнения импульса первичной частицы;
- 2) жидководородной мишени;
- 3) широкоапертурного магнитного искрового спектрометра, регистрирующего продукты взаимодействия |II|. Создан на основе электромагнита МС-12 и блоков искровых проволочных камер ИПК₅₋₁₀. Блоки камер ИПК₅₋₈ служат для определения угла влета вторичной частицы в магнит МС-12, а блоки ИПК₉₋₁₀ - угла вылета из него.

Разрешающие способности установки по кинематическим параметрам определялись как разности между смоделированными и восстановленными значениями кинематических параметров исследуемых реакций, усредненные по большому числу разыгранных событий.

События, соответствующие реакции (22), генерировались с помощью моделирующей программы [13], созданной на основе общей Монте-Карло программы вычисления фазового объема FOWL [14]. Для сгенерированных событий рассчитывались траектории движения вторичных K^+ -мезонов в регистрирующих элементах спектрометра "Гиперон", а также в поле магнита МС-12. Эти траектории искажались с учетом действия случайных факторов: многократного кулоновского рассеяния и погрешности, связанной с неточностью определения координат частиц искровыми камерами. Смоделированные таким образом события использовались в дальнейшем для определения кинематических параметров треков вторичных K^+ -мезонов.

Кинематические параметры треков восстанавливались с помощью двух методов:

а) метода, описанного в работах [1+4] и основанного на учете полной матрицы ошибок в факторизованном представлении. Параметры прямолинейного трека в рамках этого метода представляются в виде (21);

б) метода, в котором полагается, что полная ошибка в определении координаты каждой точки одинакова для всех точек трека. В этом случае параметры трека для YOX - проекции запишутся следующим образом [3]:

$$\left\{ \begin{aligned} a_x &= \frac{\pi \cdot \sum_{i=0}^N Y_i X_i - \sum_{i=0}^N Y_i \cdot \sum_{i=0}^N X_i}{\pi \cdot \sum_{i=0}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=0}^N X_i\right)^2}, \\ \delta_x &= \frac{\sum_{i=0}^N Y_i \cdot \sum_{i=0}^N X_i^2 - \sum_{i=0}^N Y_i X_i \cdot \sum_{i=0}^N X_i}{\pi \cdot \sum_{i=0}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=0}^N X_i\right)^2}, \end{aligned} \right. \quad \text{где} \quad (23)$$

X_i - координаты плоскостей искровых камер вдоль оси пучка (ось OZ направлена по пучку), Y_i - координаты трека, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1, N$; $\pi = N+1$.

По восстановленным параметрам треков (с использованием методов а и б) вычислялись импульс P_{Π} и угол θ_{Π} падения на мишень первичного Π^+ -мезона, угол вылета из мишени θ_{K^+} и импульс P_{K^+} вторичного K^+ -мезона, а также недостающая к K^+ -мезону масса MM .

В таблице 4 приведены для сравнения точностные характеристики спектрометра вторичных частиц для варианта геометрии установки, когда угол вылета частицы из мишени и влета ее в магнит определяется по блокам камер ИСК₅₋₈, а угол вылета ее из магнита - по блокам ИСК₉₋₁₀. В данном случае на пути частицы до магнита имеются значительные тяжелые среды в виде черенковских счетчиков, сцинтилляционных годоскопов и т.п.

Расчеты выполнялись при энергии первичного пучка 12 ГэВ.

В последнем столбце таблицы приведено экспериментальное значение ΔMM .

Таблица 4

Метод	$\Delta \theta_{K^+}$ мрад.	$\frac{\Delta P_a - \Delta P_b}{\Delta P_b}$ %	$\frac{\Delta P_{K^+}}{P_{K^+}}$ %	$\frac{\Delta P_a - \Delta P_b}{\Delta P_b}$ %	ΔMM МэВ	$\frac{\Delta MM_a - \Delta MM_b}{\Delta MM_b}$ %	$\Delta MM_{\text{эксп}}$ МэВ
а	0,34	0	0,47	21	47	18	56
б	0,34	0	0,60		57		

Из таблицы следует, что использование метода а в данной конфигурации установки позволяет улучшить точность определения кинематических параметров реакции (22).

Заключение

Показана эффективность использования аппарата факторизованных представлений блочно-тредиагональных и им обратных матриц при разработке и практическом использовании математического обеспечения для обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту АН СССР профессору И.И.Говоруну за интерес к работе, а также Им Ен Секу (КЦДР) за численные расчеты (приведенные в таблицах 1,2,3) спектральных характеристик.

Литература

1. Будагов Ю.А., Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г., Мачавариани А.М. ОИЯИ, Р10-9950, Дубна, 1976.
2. Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г. ОИЯИ, Р10-11127, Дубна, 1977.
3. Гасанбеков Р.М., Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г. ОИЯИ, Р10-12712, Дубна, 1979.
4. Одинцов В.Г. ОИЯИ, Р10-82-480, Дубна, 1982.
5. Виноградов В.Б. и др. ОИЯИ, I-13015, Дубна, 1980.
6. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р11-87-533, Дубна, 1987.
7. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р11-87-623, Дубна, 1987.
8. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. ОИЯИ, Р11-89-204, Дубна, 1989.
9. Емельяненко Г.А., Им Ен Сек. ОИЯИ, Р11-88-787, Дубна, 1988.
10. Емельяненко Г.А., Им Ен Сек. ОИЯИ, Р11-88-921, Дубна, 1988.
11. Антюхов В.А., Бицадзе Г.С., Будагов Ю.А. и др. ОИЯИ, Р13-84-562, Дубна, 1984.
12. Бицадзе Г.С., Будагов Ю.А. и др. ОИЯИ, Р1-84-657, Дубна, 1984.
13. Виноградов В.Б., Корданов А.Б. и др. ОИЯИ, I-10997, Дубна, 1977.
14. James F. Fowl CERN Program Library, W-500.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 сентября 1989 года.