89-577

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р10-89-577

П.В.Зрелов, В.В.Иванов

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРОВЕРОЧНОЙ СТАТИСТИКЕ

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x)$$

Определения и свойства. Мощность для малых n

1989

ВВЕДЕНИЕ

При статистической проверке гипотез экспериментальная информация служит для подтверждения либо опровержения теории или гипотезы или для выбора между альтернативными гипотезами на основе используемого для анализа критерия проверки. Критерии, предназначенные для проверки соответствия между распределением множества выборочных значений и теоретическим распределением, носят название критериев согласия.

На практике широкое распространение получили критерии согласия, основанные на статистиках, распределения которых не зависят от вида гипотезы. Некоторые из таких критериев, например критерий χ^2, применяются для анализа данных, сгруппированных в гистограмму, другие позволяют исследовать каждое событие в отдельности. Поскольку при группировке событий в гистограмму происходит частичная потеря информации [1], то второй тип критериев оказывается предпочтительнее. В этом случае исследователю предоставляется небольшой выбор из так называемых непараметрических критериев согласия [2,3]. К указанным критериям относятся, в частности, эффективно применяемый при анализе экспериментальных данных в физике высоких энергий [4-7] критерий ω^2 [8].

Целью настоящей работы является построение критериев согласия, основанных на новой непараметрической статистике

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x), \tag{1}$$

где $F(x)$ — непрерывная функция распределения случайной величины x, n — объем выборки, а $S_n(x)$ — эмпирическая функция распределения величины x. Эта статистика предложена и исследована в работе [10], где, в частности, были вычислены таблицы процентных точек, среднее значение и дисперсия распределения ω_n^3 для произвольного n*, а также

** В [10] при вычислении дисперсии была допущена ошибка. Правильное выражение для дисперсии имеет вид* $D(\omega_n^3) = \dfrac{20 - 66n + 69n^2}{1680\,n^2}$, *соответственно дисперсия асимптотического распределения* ω^3 *равна* $D(\omega^3) = \dfrac{23}{560}$.

получен алгебраический вид статистики, удобный для практических применений.

1. ПОСТРОЕНИЕ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ

Общая схема построения критериев проверки гипотез такова: выбирается проверочная статистика T и задается правило, по которому для установленного уровня значимости α определяется критическая область B_α, удовлетворяющая соотношению (см., например, /11/)

$$\Pr\{T \in B_\alpha | H_0\} \le \alpha,$$

где через H_0 обозначена проверяемая гипотеза. Выбор B_α, как правило, осуществляется таким образом, чтобы ошибка второго рода была минимальной. Область B_α можно найти по распределению величины T.

Нулевая гипотеза для непараметрических критериев согласия формулируется в виде H_0: $F = F_0$, где F_0 — функция распределения, которую согласно гипотезе имеет случайная величина x. Гипотеза $F \ne F_0$ называется двусторонней альтернативной гипотезой. Для этой гипотезы могут выполняться оба неравенства: $F > F_0$ и $F < F_0$. Здесь $F > F_0$ ($F < F_0$) означает выполнение соотношения $F(x) \ge F_0(x)$ ($F(x) \le F_0(x)$) на всей действительной оси x. Односторонняя альтернативная гипотеза формулируется в виде $F < F_0$ (правосторонняя) или $F > F_0$ (левосторонняя).

1.1. Построение односторонних критериев

Рассмотрим критерий для проверки гипотезы H_0: $F = F_0$ против правосторонней альтернативной гипотезы $F < F_0$. В этом случае критическая область B_{α_1} для заданного уровня значимости α_1 определяется неравенством $\omega_n^3 < Z_{\alpha_1}$ (см. рис.1а), где Z_{α_1} — корень уравнения $\Phi_n(Z_{\alpha_1}) = \alpha_1$, а $\Phi_n(Z)$ — функция распределения величины ω_n^3 (см. таблицу в /10/).

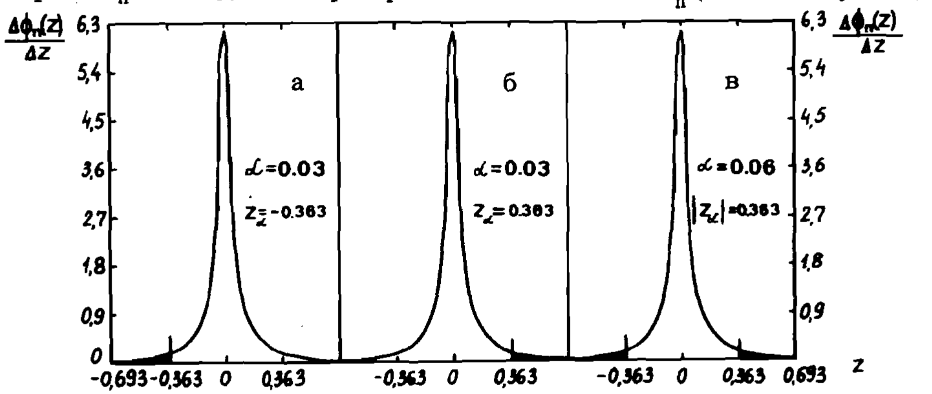


Рис.1. Критические области (выделены черным цветом) для правостороннего (а), левостороннего (б) и двустороннего (в) критериев согласия ω_n^3: n = 10, α = 0,03 (а, б) и α = 0,06 (в).

Для левосторонней альтернативной гипотезы $F > F_0$ критическая область определяется неравенством $\omega_n^3 > Z_{\alpha_2}$ (см. рис.1б). Величина Z_{α_2} в этом случае удовлетворяет уравнению $\Phi_n(Z_{\alpha_2}) = 1 - \alpha_2$.

Точки Z_{α_1} и Z_{α_2}, разделяющие допустимую и критическую области, называются критическими точками.

1.2. Построение двустороннего критерия

Структура статистики ω_n^3 (1) определяет ее использование преимущественно для задач с односторонними альтернативными гипотезами, однако существуют также задачи, для которых применение двустороннего критерия ω_n^3 является оправданным и эффективным (см. разд.4).

Для двустороннего критерия ω_n^3 критическая область определяется следующим образом:

$$B = \{\omega_n^3 < Z_{\alpha_1}\} \cup \{\omega_n^3 > Z_{\alpha_2}\}.$$

Естественно выбирать Z_{α_1} и Z_{α_2}, удовлетворяющими условиям для правосторонней и левосторонней гипотез соответственно (см. 1.1): $\Phi_n(Z_{\alpha_1}) = \alpha_1$, $\Phi_n(Z_{\alpha_2}) = 1 - \alpha_2$. Если положить $\alpha_1 = \alpha_2$, то $\Phi_n(Z_{\alpha_1}) = 1 - \alpha_1 = 1 - \alpha_2$ и $\Phi_n(Z_{\alpha_1}) = 1 - \Phi_n(Z_{\alpha_2})$. В /10/ отмечалось, что распределение статистики ω_n^3 симметрично относительно нуля, то есть $\Phi_n(Z) = 1 - \Phi_n(-Z)$, откуда следует, что $Z_{\alpha_1} = -Z_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 = \alpha_2$.

Обычно для симметричного распределения α_1 и α_2 выбираются равными $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, вследствие чего критическая область для двустороннего критерия ω_n^3 приобретает вид (см. рис.1в):

$$B = \{|\omega_n^3| > Z_\alpha\},$$

где Z_α — корень уравнения $\Phi_n(Z_\alpha) = 1 - \alpha/2$.

В таблице приведена сводка критериев, построенных на статистике ω_n^3.

Таблица. Критерии согласия на основе статистики ω_n^3

Тип критерия	левосторонний	правосторонний	двусторонний
Альтернатива	$F > F_0$	$F < F_0$	$F \ne F_0$
Крит.область	$\omega_n^3 > Z_\alpha$	$\omega_n^3 < Z_\alpha$	$\lvert\omega_n^3\rvert > Z_\alpha$
Урав.для Z_α	$\Phi_n(Z_\alpha) = 1 - \alpha$	$\Phi_n(Z_\alpha) = \alpha$	$\Phi_n(Z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Таким образом, при проверке гипотезы H_0 с помощью одностороннего или двустороннего критерия согласия, построенного на основе статистики ω_n^3, предполагается, что гипотеза H_0: $F = F_0$ принимается с уровнем значимости α, если значение ω_n^3, вычисленное по формуле [10]:

$$\omega_n^3 = -\frac{\sqrt{n}}{8} \sum_{i=1}^{n} [2F_0(x_i) - \frac{2i-1}{n}]\{[2F_0(x_i) - \frac{2i-1}{n}]^2 + \frac{1}{n^2}\}, \qquad (2)$$

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — вариационный ряд выборки объема n, а $F_0(x)$ — функция распределения нулевой гипотезы, попадает в допустимую область и отвергается в противном случае.

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КРИТЕРИЕВ ω_n^3

Для характеристики качества выбираемого критерия обычно (см., например, [1]) рассматриваются следующие свойства: устойчивость, состоятельность, несмещенность и мощность.

2.1. Устойчивость

Критерий устойчив, если распределение проверочной статистики, а следовательно, и размер критической области могут быть рассчитаны (по крайней мере асимптотически) независимо от вида распределения, отвечающего нулевой гипотезе.

В [10] показано, что статистика ω_n^3 относится к статистикам указанного типа (причем не только асимптотически, но и для малых n), поэтому основанные на ней одно- и двусторонние критерии являются устойчивыми.

2.2. Мощность и состоятельность

Критерий состоятелен, если с увеличением числа наблюдений уменьшается ошибка второго рода, т.е. возрастает надежность разделения гипотез. Это свойство записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{T_n \in B_\alpha | H_1\} = 1, \qquad (3)$$

где T_n — проверочная статистика, рассчитанная по выборке из n наблюдений, B_α — критическая область с размером α, вычисленная при условии справедливости гипотезы H_0, H_1 — альтернативная гипотеза.

Состоятельность критерия ω_n^3 по отношению к односторонним гипотезам следует из слабой сходимости эмпирической функции $S_n(x)$ к функции распределения $F(x)$ и выполнения соотношения $\sup_x |F(x) - F_0(x)| > 0$. Однако можно показать состоятельность критерия ω_n^3, основываясь непосредственно на доказательстве предельного соотношения (3).

Поскольку вероятность в левой части (3) определяет мощность критерия, то для проверки состоятельности необходимо показать, что мощность критерия с данной проверочной статистикой и критической областью по отношению к любой односторонней гипотезе стремится к единице при $n \to \infty$. Для этого можно воспользоваться подходом Чэпмена [9], показавшего, что среди всех односторонних альтернативных гипотез (для определенности $F < F_0$), для которых величина $\sup_x [F_0(x) - F(x)] = \Delta\ (0 < \Delta < 1)$ является фиксированной, можно отобрать такие, которые минимизируют или максимизируют мощность.

Вычисления показывают, что для указанных гипотез в случае больших n соответствующие мощности для одностороннего критерия ω_n^3 при заданном уровне значимости α (для определенности рассмотрена гипотеза $F < F_0$) равны:

$$P_{min}(\Delta) \cong \Phi\{\frac{Z_\alpha}{n\Delta^3\sqrt{u_0(1-u_0)}} + \frac{\Delta\sqrt{n}}{4\sqrt{u_0(1-u_0)}} + \frac{3}{2\sqrt{n}\,\Delta}\sqrt{u_0(1-u_0)}\}, \qquad (4)$$

$$P_{max}(\Delta) \cong \Phi\{\frac{\frac{Z_\alpha}{n} + \sqrt{n}[\Delta^3(1 - \frac{3}{4}\Delta) + \frac{\Delta}{2n}(1 - 3\Delta^2 + 2\Delta^3)]}{\frac{\sqrt{3}\Delta^2}{2}\sqrt{1 - 6\Delta^2 + 8\Delta^3 - 3\Delta^4}}\}, \qquad (5)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения плотности $N(0,1)$, $0 < u_0 < 1$ — варьируемый параметр, Z_α — критическая граница для правостороннего критерия ω_n^3 (см. раздел 1.1).

Из формулы (4) следует, что для произвольного Δ при $n \to \infty$ мощность $P_{min}(\Delta) \to 1$. Следовательно, и по отношению к любой односторонней альтернативной гипотезе вида $F < F_0$ мощность критерия ω_n^3 также стремится к единице при $n \to \infty$, что и доказывает состоятельность правостороннего критерия ω_n^3. Аналогично доказывается состоятельность левостороннего критерия для альтернативной гипотезы $F > F_0$. Очевидно, что двусторонний критерий по отношению к любой односторонней гипотезе также является состоятельным.

2.3. Несмещенность

Критерий считается несмещенным, если уровень значимости α не превосходит соответствующего значения мощности P: $\alpha \le P$. При этом очевидно, что равенство имеет место, когда нулевая и альтернативная гипотезы совпадают.

В работе Чэпмена /9/ показано, что критерии, построенные на статистиках структуры(d) /12/, по отношению к односторонним гипотезам являются несмещенными, если образующие их статистики непрерывно зависят от выборочных значений и монотонны для нулевой гипотезы (по определению Чэпмена). Можно показать, что ω_n^3 наряду со статистиками ω_n^2 и Колмогорова относится к статистикам структуры (d). Поэтому несмещенность основанных на ней критериев следует из непрерывной зависимости статистики ω_n^3 от выборочных значений $x_1, x_2, ..., x_n$, а также ее монотонности, поскольку для любых двух упорядоченных выборок x_i^I, $i = 1, 2, ..., n$ и x_j^{II}, $j = 1, 2, ..., n$, элементы которых распределены по закону, определяемому нулевой гипотезой, и таких, что $x_i^{II} > x_i^I$, $i = 1, 2, ..., n$, верно соотношение

$$\omega_n^3 (x_1^{II}, x_2^{II}, ..., x_n^{II}) \le \omega_n^3 (x_1^{I}, x_2^{I}, ..., x_n^{I}).$$

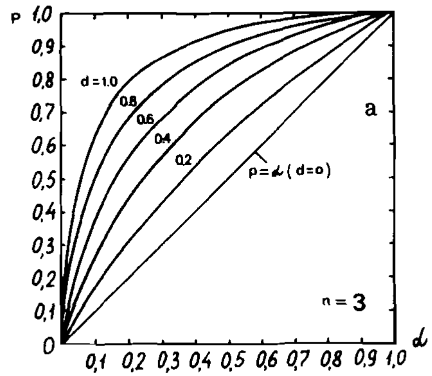
3. МОЩНОСТЬ КРИТЕРИЯ ω_n^3 В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ВЫБОРОК

Выражения (4) и (5) для мощности одностороннего критерия верны в случае достаточно больших n и не могут быть использованы при малых объемах выборки.

С целью получения оценки мощности критерия ω_n^3 для задач с малым объемом n был проведен численный расчет для случая односторонней альтернативной гипотезы и выборок n = 1, 2, ..., 9. При этом в качестве нулевой и альтернативной гипотез выбирались гауссовские распределения с дисперсиями, равными 1, и средними значениями, различающимися на величину d, принимавшую ряд фиксированных значений.

Кроме того, был проведен численный расчет мощности одностороннего критерия для двусторонней альтернативной гипотезы, при этом нулевая гипотеза задавалась распределением N(0, 1), а альтернативная — N(d, 4).

В результате моделирования были получены зависимости величины мощности P одностороннего критерия ω_n^3 от уровня значимости α для разных выборок n и ряда односторонних альтернатив, различающихся по параметру d. На рис. 2а, б, в приведены соответствующие кривые для n = 3; 6; 9 и d = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0. Такой же характер носят кривые



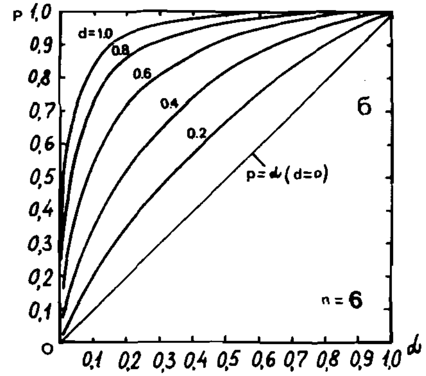
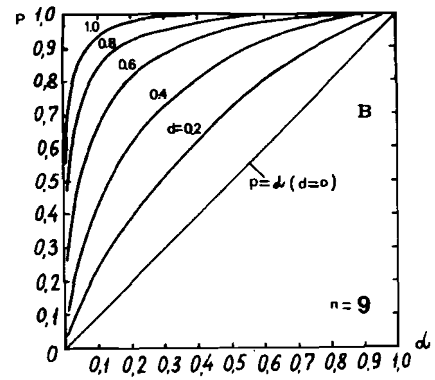
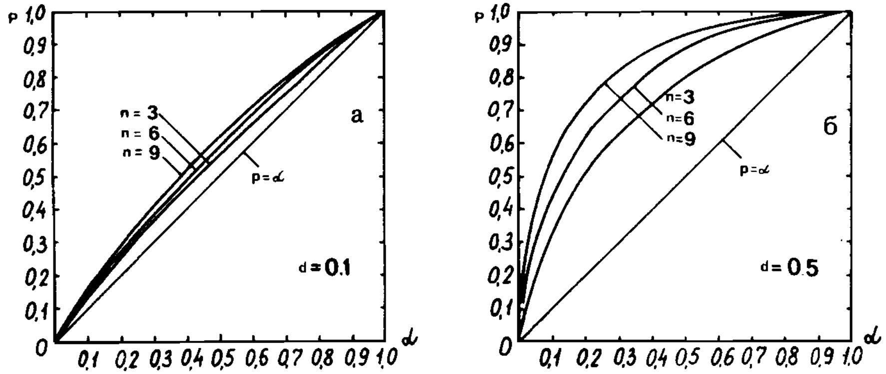


Рис.2. Наборы кривых P = P(α), иллюстрирующих быстрый рост мощности одностороннего критерия ω_n^3 с увеличением d (d = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 и 1,0) на примерах выборок n = 3, 6 и 9 (соответственно а, б, в).



мощностей для n = 2, 4, 5, 7 и 8. Приведенные кривые лежат выше прямой P = α, что говорит о несмещенности критерия. С целью сравнения мощностей для разных объемов выборки построены зависимости для n = 3, 6 и 9 при различных d = 0,1; 0,5; 1,0 (рис.3а, б, в). Видно, что мощность критерия возрастает не только с увеличением d, но и с увеличением объема выборки n. Для сравнения критерия ω_n^3 с хорошо известным критерием ω_n^2 (см., например /8/) был проведен численный расчет мощности для ω_n^2 в случае малых n и d = 0,1 ÷ 1,5 (0,1), результаты которого для n = 6 и d = 0,1; 0,5; 1,0 представлены на рис.4. Аналогичное поведение имеют зависимости и для других n и d. Из рисунка видно, что уровень мощности критерия ω_n^3 систематически превышает соответствующий уровень для ω_n^2.

Поведение кривых мощностей одностороннего критерия в случае двусторонней альтернативной гипотезы иллюстрируется рис.5, где изображены зависимости мощности P от уровня значимости α для n = 7 и d = 0,1; 0,5; 1,0; 1,5. При значениях d = 0,1 и d = 0,5 кривая мощности



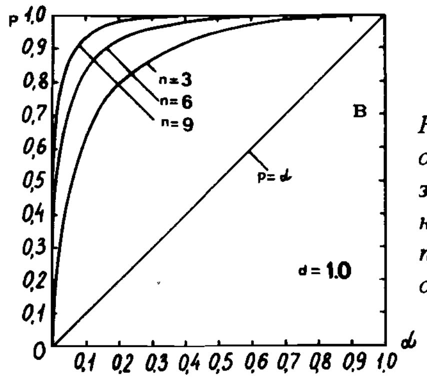


Рис.3. Зависимости величины мощности P одностороннего критерия ω_n^3 от уровня значимости α, иллюстрирующие рост мощности с увеличением объема выборки при трех значениях d=0,1; 0,5 и 1,0 (соответственно а, б, в).

пересекает прямую P=α, что показывает смещенность критерия для больших α. С целью сравнения критериев ω_n^3 и ω_n^2 для двусторонней альтернативной гипотезы на рис.5 представлены также кривые мощности для критерия ω_n^2, пересечение которых с соответствующими кривыми ω_n^3 для различных d свидетельствует о преимуществе нового критерия лишь в ограниченной области значений α. Однако для малых α, что особенно важно для практических применений, с ростом d это преимущество проявляется отчетливо.

Сравнительное поведение кривых мощности одностороннего критерия ω_n^3 и критерия ω_n^2 в зависимости от параметра d показано на рис.6 на примере выборки n = 6 и фиксированного уровня значимости α = = 0,05. Рис.6а иллюстрирует зависимости для односторонней альтернативной гипотезы, а рис.6б — для двусторонней. Видно, что в случае односторонней альтернативной гипотезы соответствующий критерий ω_n^3 превосходит критерий ω_n^2 для всех рассмотренных значений d, а в случае двусторонней альтернативной гипотезы критерий ω_n^3 имеет преимущество перед ω_n^2 в области значений d > 0,25.

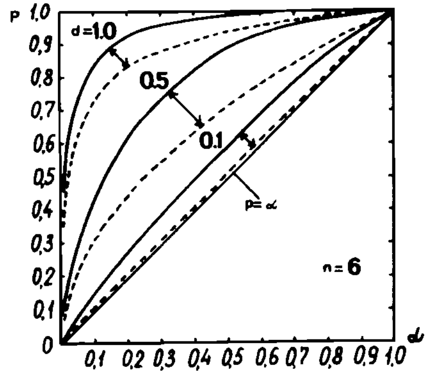


Рис.4. Сравнение мощностей критерия согласия ω_n^2 (пунктирная кривая) и одностороннего критерия ω_n^3 (сплошная кривая) в случае односторонней альтернативы на примере выборки n = 6 для различных значений параметра d = 0,1; 0,5 и 1,0.

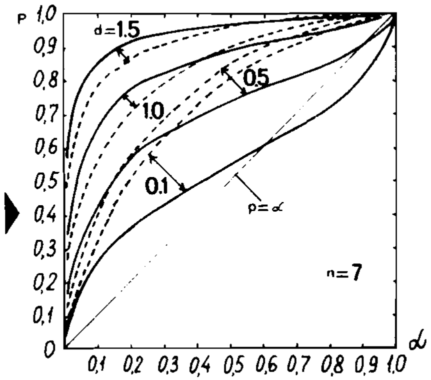


Рис.5. Сравнение мощностей критерия ω_n^2 (пунктирная кривая) и одностороннего критерия ω_n^3 (сплошная кривая) в случае двусторонней альтернативной гипотезы для n = 7 и d = 0,1; 0,5; 1,0 и 1,5.

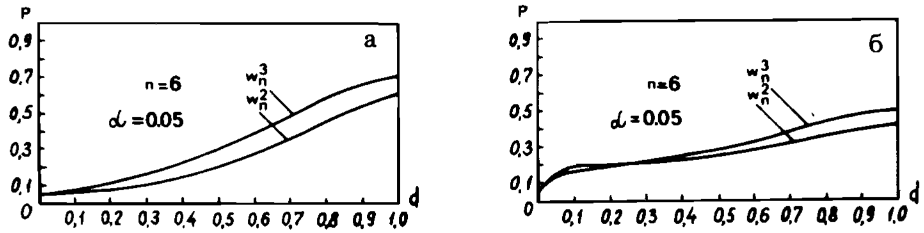


Рис.6. Сравнение мощностей одностороннего критерия ω_n^3 и критерия ω_n^2 в зависимости от параметра d для односторонней (а) и двусторонней (б) альтернативных гипотез на примере выборки n=6 и уровня значимости α = 0,05.

Численный расчет мощности двустороннего критерия ω_n^3 по отношению к односторонней альтернативной гипотезе не проводился, поскольку значение мощности в этом случае, определяемое для уровня значимости α, равно значению мощности одностороннего критерия по отношению к той же гипотезе, но уже для уровня значимости α/2, что следует из вида уравнений для критического значения Z_α в случае одностороннего и двустороннего критериев ω_n^3 (см. разд.1).

4. ДВУСТОРОННИЙ КРИТЕРИЙ ω_n^3 И СОСТАВНЫЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ

На практике двусторонние гипотезы встречаются гораздо чаще, чем односторонние. Примером может служить тот факт, что даже при незначительном изменении дисперсии одного из гауссовских распределений в модели односторонней гипотезы (разд.3) происходит преобразование односторонней альтернативной гипотезы в двустороннюю. (На рис.7а изображены плотности гауссовских распределений, соответствующие функциям распределения конкурирующих гипотез).

Особое место занимают задачи с составными альтернативными гипотезами двустороннего типа*. Для таких гипотез эмпирическая выборка принадлежит распределению F_i с вероятностью C_i, где $i = 1, 2, ..., \ell$, а C_i удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^{\ell} C_i = 1$. Ограничимся рассмотрением случая $\ell = 2$; тогда существуют две функции F_1 и F_2, согласно которым могут быть распределены элементы выборки, причем вероятности, с которыми каждая из выборок принадлежит тому или иному закону, удовлетворяют условию $C_1 + C_2 = 1$. На рис.7б схематически изображены плотности, соответствующие составной гипотезе, для которой $F_1 > F_0$, а $F_2 < F_0$. В этом случае для разделения конкурирующих гипотез становится эффективным применение двустороннего критерия ω_n^3 (см. разд. 2.2), поскольку значения статистики ω_n^3, вычисляемые по выборкам из генеральной совокупности альтернативной гипотезы, будут группироваться в областях $-\frac{1}{4}n^{3/2}$ и $\frac{1}{4}n^{3/2}$, то есть предельных значений статистики ω_n^3 /10/, в зависимости от того, какому из распределений F_1 или F_2 принадлежит выборка. Следовательно, критическую область будет определять неравенство $|\omega_n^3| > Z_\alpha$.

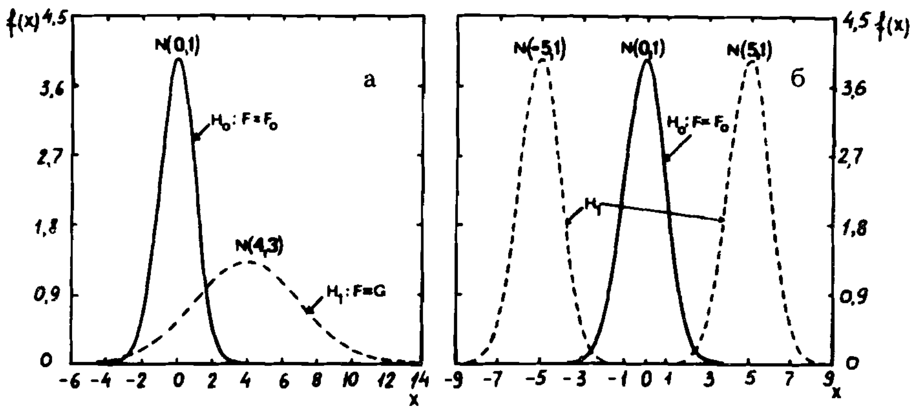


Рис.7. Два основных типа альтернативных двусторонних гипотез H_1: $F=G$ по отношению к нулевой гипотезе H_0: $F=F_0$ заданной плотностью $N(0, 1)$: а) гипотеза H_1 представлена плотностью $N(4, 3)$; б) составная гипотеза H_1 определена двумя гауссовскими распределениями $N(-5, 1)$ и $N(5, 1)$.

Мощность двустороннего критерия ω_n^3 по отношению к составным альтернативным гипотезам с $\ell = 2$ определяется выражением:

$$P = C_1 P_1 + C_2 P_2 ,$$

где P — мощность критерия по отношению к составной гипотезе, P_1, P_2 — мощности критерия по отношению к соответствующим односторонним гипотезам F_1 и F_2.

Необходимо отметить, что двусторонний критерий ω_n^3 целесообразно применять также и в том случае, когда тип альтернативной гипотезы заранее не известен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются одно- и двусторонние критерии согласия, построенные на проверочной статистике

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x) .$$

Исследованы основные свойства критериев; показано, что они устойчивы, а по отношению к односторонним альтернативным гипотезам также состоятельны и несмещены. Для малых объемов выборки $n = 3$, 6 и 9 численным расчетом получены и исследованы зависимости мощности одностороннего критерия в случае, когда нулевая и альтернативная гипотезы представлены гауссовскими распределениями с дисперсиями, равными 1, и средними значениями, различающимися на величину d, принимающую значения 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 и 1,0. На основании полученных зависимостей проведено сравнение критериев ω_n^3 и ω_n^2, выявившее пре-

* *Подобные задачи часто возникают в физике частиц высоких энергий (см., например, /13/) при анализе распределений, получаемых в результате одновременного измерения одних и тех же величин (время пролета, масса, ионизационные потери и др.) несколькими детекторами, и представляющих собой сумму распределений, вызванных частицами разных сортов.*

имущество критерия ω_n^3 для случая односторонней альтернативной гипотезы. Кроме того, для $n=6$ представлены кривые мощности для одностороннего критерия и двусторонней альтернативной гипотезы, когда нулевая гипотеза задана распределением $N(0, 1)$, а альтернативная — $N(d, 4)$ для $d=0{,}1$; $0{,}5$; $1{,}0$ и $1{,}5$. Показано, что мощности критериев ω_n^3 и ω_n^2 в этом случае оказываются сравнимыми, однако из рассмотренного примера следует, что в области больших a может нарушаться несмещенность одностороннего критерия ω_n^3 в зависимости от вида двусторонней альтернативной гипотезы.

В работе подчеркивается эффективность применения одностороннего критерия ω_n^3 в случае односторонних альтернативных гипотез, определен класс задач, для которых целесообразно использование двустороннего критерия ω_n^3.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить профессора Е.П.Жидкова за постоянную поддержку данных исследований, а также Н.И.Чернова за полезные обсуждения и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Идье В. и др. – Статистические методы в экспериментальной физике. М.: Атомиздат, 1976.*
2. *Тюрин Ю.Н. – Непараметрические методы статистики. М.: Знание, 1978.*
3. *Холлендер М., Вулф Д.А. – Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика, 1983.*
4. *Ludlam T. et al. – Phys. Rev. D, 1973, v. 8, No 5, p. 408.*
5. *Ludlam T. et al. – Phys. Lett., 1974, v. 48B, No. 5, p. 449.*
6. *Ludlam T. et al. – Phys. Rev. D, 1977, v. 16, No. 1, p. 100.*
7. *Зрелов П.В., Иванов В.В. – Препринт ОИЯИ Р10-86-812, Дубна, 1986.*
8. *Мартынов Г.В. – Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.*
9. *Chapman D.G. – Ann. Math. Statist., 1958, v. 29, p. 655.*
10. *Зрелов П.В., Иванов В.В. – Сообщение ОИЯИ Р10-88-321, Дубна, 1988.*
11. *Четыркин Е.М., Калихман И.Л. – Вероятность и статистика. М.: Финансы и статистика, 1982.*
12. *Birnbaum Z.W., Rubin H. – Ann. Math. Stat., 1954, v. 25, p. 593.*
13. *Словинский Б. и др. – Сообщение ОИЯИ Р1-87-51, Дубна, 1987.*

Рукопись поступила в издательский отдел
3 августа 1989 года.

Зрелов П.В., Иванов В.В. Р10-89-577

Критерии согласия, основанные на проверочной статистике

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x).$$

Определения и свойства. Мощность для малых n

Рассматриваются односторонние и двусторонние критерии согласия, построенные на проверочной статистике $\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x)$. Исследованы основные свойства критериев; показано, что они устойчивы, а по отношению к односторонним альтернативным гипотезам также состоятельны и несмещены. Для малых объемов выборки ($n<10$) численным расчетом получены зависимости мощности критерия ω_n^3 от уровня значимости a для альтернативных гипотез определенного вида; показано преимущество одностороннего критерия ω_n^3 по отношению к критерию ω_n^2 в случае односторонних альтернативных гипотез, а также сравнимость по мощности этих критериев для двусторонних альтернативных гипотез. Обосновывается эффективность применения одностороннего критерия ω_n^3 в случае односторонних альтернативных гипотез, определен класс задач, для которых целесообразно использование двустороннего критерия ω_n^3.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов

Zrelov P.V., Ivanov V.V. P10-89-577

Goodness-of-fit Criteria Based on Test Statistics

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x).$$

Definitions and Properties. Power for Small n

The one- and two-sided goodness-of-fit criteria based on test statistics

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x)$$

are considered. The main properties of criteria are examined; it is shown that they are stable, and in the case of one-side alternative hypotheses consistent and unbiased. For small sample sizes ($n < 10$) the dependences between criteria' power and significance level a for same types alternative hypothesis were received. The one-sided ω_n^3 — criteria has an advantage over ω_n^2 — test for one-side alternative hypotheses, and is compared with the latter for two-sided alternatives. The ω_n^3 — criteria effectiveness of use in the case of one-side alternative hypotheses was grounded. The class of tasks is defined for which using the two-sided ω_n^3 — criteria is preferable.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989