

**сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна**

P10-86-832

Б.Словинский, Э.Мулас, В.Н.Жмыров

**ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИКИ  $\omega^2$   
ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ  
ПО ЭЛЕКТРИЧЕСКОМУ ЗАРЯДУ**

**1986**

В настоящей работе описан критерий эффективного разделения по электрическому заряду /далее - заряду/ быстрых фрагментов ( $p$ ,  $d$ ,  $t$ ,  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ ), испускаемых во взаимодействиях  $\alpha$ -частиц с легкими ядрами и регистрируемых под углом  $140$  мрад магнитным спектрометром МАСПИК<sup>/1/</sup>. Импульс первичных  $\alpha$ -частиц равен  $4,5$  ГэВ/с/Н.

Ранее<sup>/2/</sup> был предложен критерий усредненной амплитуды, при помощи которого можно надежно сепарировать по заряду релятивистские частицы, проходящие через систему из нескольких сцинтилляционных счетчиков /С/. Использовалось при этом следующее свойство амплитуды  $A_i$  сигнала от  $i$ -го С /далее - амплитуды/:

$$A_i \sim \int_0^{d_i} \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} dx \sim z^2, \quad /1/$$

где  $d_i$  - толщина сцинтиллятора  $C_i$ ,  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}}$  - ионизационные потери энергии частицы с зарядом  $z$  в  $C_i$ . Критерий амплитуды, усредненной по всем пяти счетчикам, дает возможность разделить по заряду  $z$  частицы на уровне значимости  $\sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ , причем вероятность принять в качестве однозарядной частицу с  $z = 2$  составляет примерно  $\sim 10^{-2} - 10^{-4}$ , в зависимости от режима работы счетчиков<sup>/2/</sup>.

## 1. КРИТЕРИЙ $\omega^2$

Из /1/ вытекает, что амплитуды  $A_i$  от частиц с зарядом  $z = 2$  будут систематически смещены относительно амплитуд от однозарядных частиц. Следовательно, для сепарирования этих частиц по  $z$  можно применять порядковую статистику, чувствительную именно к такого рода смещению. На практике в качестве статистического критерия, обладающего названным свойством, чаще всего используется величина  $\omega^2$ , которую в данном случае целесообразно представить в виде /см., например, /3/ /:

$$\omega_{j,k}^2 = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [F(Y_i^{(j)}) - \frac{2i-1}{2k}]^2. \quad /2/$$

Здесь  $Y_i^{(j)} = (A_i^{(j)} - A_i^{\text{НВ}}) / \delta A_i$ ,  $A_i^{\text{НВ}}$  - наиболее вероятное значение амплитуды,  $A_i^{(j)}$  - распределения для  $C_i$ ,  $\delta A_i$  - половина

ширины на половине высоты максимума  $A_i^{(j)}$  - спектра /индекс  $j$  означает  $j$ -ю реализацию  $A_i$  или, что то же,  $j$ -е событие/,  $F$  - функция накопленной вероятности для гипотезы  $z = 1$ . Важно подчеркнуть, что соответствующая ей функция плотности вероятности  $P(A_i^{(j)})$  случайной переменной  $A_i^{(j)}$  получается непосредственно экспериментальным путем и практически не содержит никаких дополнительных предположений. Стоит также отметить, что статистические выводы, основанные на критерии  $\omega^2$ , не зависят от распределения  $F$ , которое может претерпевать довольно значительные изменения в зависимости от режима работы счетчика. С точки зрения свойств  $A_i^{(j)}$ -распределения этот режим можно охарактеризовать коэффициентом вариации  $x_i = \Delta A_i / \bar{A}_i$ , где  $\bar{A}_i$  - среднее значение амплитуды,  $\Delta A_i$  - среднеквадратичный разброс амплитуд  $A_i^{(j)}$  /все для гипотезы  $z = 1$ /. Оказалось, что величина  $x_i$  в процессе работы аппаратуры может подвергаться изменениям в 2 и более раз /для разных наборов данных или так называемых файлов/.

На рис. 1 приведено распределение величины  $\omega_{j,5}^2$ , определенной по пяти счетчикам для гипотезы  $z = 1$ , а также в предположении, что среди зарегистрированных частиц имеется двухпроцентная

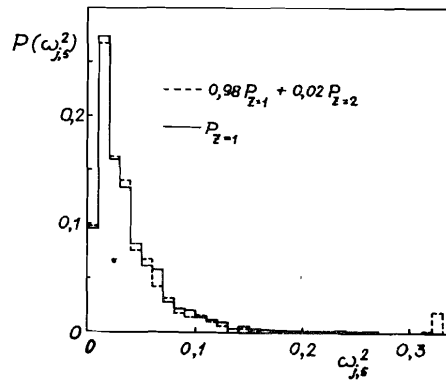


Рис. 1. Распределение величины  $\omega_{j,5}^2$ , определенной соотношением /2/. Сплошная линия соответствует гипотезе  $z = 1$ , штриховая линия - сложной гипотезе: 98% событий с  $z = 1$  и 2% событий с  $z = 2$ .

примесь двухзарядных частиц. Эти распределения получены путем моделирования на ЭВМ 200000 событий ( $\omega_{j,5}^2$ ) на основании эмпирических  $A_i^{(j)}$ -распределений с учетом /1/ для выборки

данных с  $\bar{x} = 0,53 \pm 0,06$ . Видно, что двухзарядные частицы группируются на шкале  $\omega_{j,5}^2$  в интервале  $\omega_{j,5}^2 > 0,3$ , в то время как для частиц с  $z = 1$   $\omega_{j,5}^2 < 0,3$ . Можно также заметить, что интервал критических значений  $\omega_i^2$  критерия  $\omega_{j,5}^2$  довольно узок и расположен около точки 0,3. Поскольку отношение  $\gamma$ -сечений образования двухзарядных частиц к однозарядным для исследуемой реакции мало / $\gamma \approx 10^{-3}$ /, целесообразно рассмотреть прежде всего интервал критических значений  $\omega_L^2 = /0,3 \pm 0,315/$ . В таблице для этого интервала приведены значения уровня значимости

$$\alpha_5 \approx \sum_{j: (\omega_{j,5}^2 > \omega_i^2)} P_{z=1}(\omega_{j,5}^2)$$

/3/

правостороннего критерия для  $z = 1$  и вероятности

$$\beta_5 = \sum_{j: (\omega_{j,5}^2 < \omega_i^2)} P_{z=2}(\omega_{j,5}^2) \quad /4/$$

принять двухзарядную частицу за однозарядную /левосторонний критерий для гипотезы  $z = 2$ /.

Таблица

Значения  $\omega_i^2$  критической статистики  $\omega_{j,5}^2$  /2/ и соответствующие им значения уровня значимости  $\alpha_5$  /3/ и вероятности  $\beta_5$  /4/ принять двухзарядную частицу за однозарядную. Численные данные получены по выборке экспериментально полученных амплитудных спектров, для которой коэффициент вариации  $\bar{x} = 0,53 \pm 0,06$ . Розыграны 200000 событий

$\omega_i^2$	0,300	0,305	0,315
$\alpha_5$	$3 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-9}$
$\beta_5$	$2 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-5}$

## 2. КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ $\omega^2$ И УСРЕДНЕННОЙ АМПЛИТУДОЙ

Представляет интерес изучить корреляцию, а также статистическую зависимость между  $\omega_{j,5}^2$ -статистикой, определенной соотношением /2/, и  $\bar{A}_{j,5}^2$ -статистикой, усредненной по пяти счетчикам амплитудой  $\bar{A}_{j,5}^{(j)}$  /2/. В случае, когда эта корреляция /или зависимость/ невелика, можно было бы пользоваться в качестве критерия сепарации частиц двумерной величиной  $(\omega_{j,5}^2; \bar{A}_{j,5}^{(j)})$ , повысив тем самым мощность применяемого теста. Такая возможность тем более соблазнительна, что равным образом  $\omega_{j,5}^2$ , как и  $\bar{A}_{j,5}^{(j)}$ , слабо чувствительны к изменению режима работы счетчиков.

На рис. 2 приведено распределение переменных  $\omega_{j,5}^2$  и  $Y^{(j)}$ , отнормированных на соответствующие средние значения:  $\bar{\omega}^2$  и  $\bar{Y}$ . Данные получены по выборке экспериментальных данных с  $\bar{x} = 0,53 \pm 0,06$ . Эмпирический коэффициент корреляции для этой выборки равен 0,3. Аналогичная величина для другой выборки /  $\bar{x} = 0,30 \pm 0,05$  / равняется 0,4. Оценено также значение так называемого коэффициента зависимости  $\delta$  между величинами  $Z_1^{(j)} = \omega_{j,5}^2 / \bar{\omega}^2$  и  $Z_2^{(j)} = Y^{(j)} / \bar{Y}$ , определяемого следующим образом /4/:

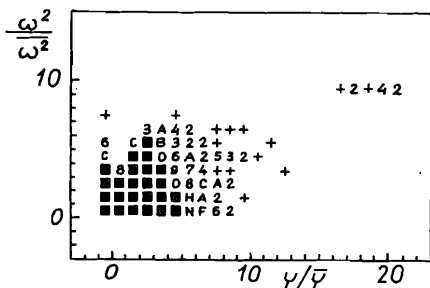


Рис. 2. Двумерное распределение событий из выборки экспериментальных данных с  $\bar{x} = 0,53 \pm 0,06$  по нормированным тестовым статистикам  $\omega^2/\bar{\omega}^2 \equiv \omega_{j,5}^2/\bar{\omega}^2$  и  $Y/\bar{Y} \equiv Y^{(j)}/\bar{Y}$ . Обозначения: ■ - более 25 точек, буквы от А до Z соответствуют числу точек от 10 до 35, + - одна точка, цифры обозначают одновременно число точек.

$$\delta = \left\{ \frac{1 - \sum_{k,l} \min(p_{kl}, p_k, p_l)}{1 - \frac{1}{\min(t, s)}} \right\}^{1/4}, \quad /5/$$

где  $p_{kl}$  - вероятность пары значений  $(Z_1^{(k)}, Z_2^{(l)})$ ,  $p_k$  и  $p_l$  - маргинальные распределения величин  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно;  $t = k_{\max}$ ,  $s = l_{\max}$ . Коэффициент  $\delta$ , аналогично коэффициенту корреляции, принимает значения от 0 до 1. Для рассматриваемых нами двух выборок экспериментальных данных  $\delta$  не превышает 0,2. Таким образом, статистическая связь между случайными переменными невелика. Следовательно, двумерное распределение  $(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)})$  содержит больше информации, чем  $Z_1^{(j)}$ - и  $Z_2^{(j)}$ - спектры в отдельности, и может быть использовано при решении обсуждаемой в данной работе задачи о разделении по заряду быстрых фрагментов ядерных реакций. В частности, на рис. 2 четко выделяются две группировки событий, вызванных одно- и двухзарядными частицами соответственно.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Наиболее наглядным результатом действия критериев разделения одно- и двухзарядных релятивистских частиц является распределение по массам. Оно показано на рис. 3. Сплошная линия - спектр масс в предположении, что все частицы однозарядные. Пунктирная линия соответствует только двухзарядным частицам ( ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ ), выделенным по критерию  $\omega^2$ . В спектрах не учтены поправки на флуктуацию амплитуд импульсов от ФЭУ<sup>/5/</sup>, что в данном случае несущественно.

Следует отметить, что результат сепарирования не зависит от конкретного значения критической статистики  $\omega_{j,5}^2$  в интервале  $0,300 \div 0,315$  и практически полностью совпадает с аналогичным результатом, полученным ранее<sup>/2/</sup> при помощи статистики усредненной амплитуды. Этот результат не должен вызывать удивления, так как в использованном нами экспериментальном материале уровень

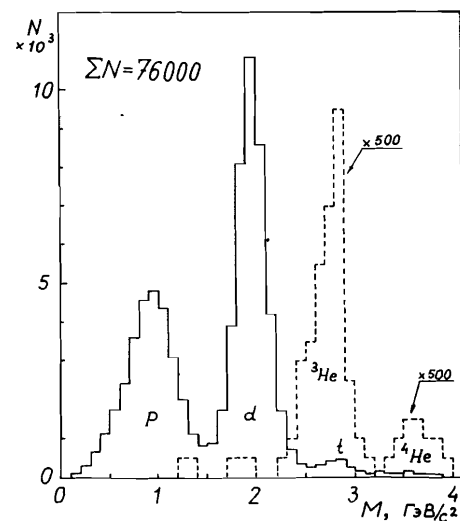


Рис. 3. Спектр масс быстрых частиц, испускаемых в реакции  $\alpha$ -частиц с легкими ядрами и регистрируемых системой из 5 сцинтилляционных счетчиков магнитного спектрометра МАСПИК<sup>/1/</sup>. Сплошная линия соответствует гипотезе, что все частицы однозарядные, штриховая линия - распределению по массам двухзарядных частиц, выделенных по критерию  $\omega^2$ . Спектры не учитывают поправок на флуктуацию амплитуд импульсов от ФЭУ<sup>/5/</sup>.

значимости названных тестов на один - два порядка величины меньше, чем отношение  $\gamma$  сечений рождения двухзарядных частиц к однозарядным.

Вместе с тем вероятность  $\beta$  отнести двухзарядную частицу к однозарядным как для критерия усредненной амплитуды, так и для  $\omega^2$ -критерия невелика.

В заключение авторы выражают благодарность директору ЛВТА члену-корреспонденту АН СССР М.Г.Мещерякову за постоянный интерес к данной работе и поддержку, а также сотрудникам научно-экспериментального сектора ЛВТА за полезные дискуссии.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ажгирей Л.С. и др. В кн.: Труды Совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. ОИЯИ, Д2-82-568, Дубна, 1982, с.83.
2. Словинский Б., Мулас Э., Жмыров В.Н. ОИЯИ, Р10-86-831, Дубна, 1986.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 1983.
4. Хеллвиг З. Элементы теории вероятностей и математической статистики /на польском яз./. Варшава, 1977, с.142.
5. Ажгирей Л.С. и др. ОИЯИ, Р1-85-749, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 декабря 1986 года.

Словинский Б., Мулас Э., Жмыров В.Н.  
Применение статистики  $\omega^2$  для разделения  
быстрых частиц по электрическому заряду

P10-86-832

Описано применение порядковой статистики  $\omega^2$  к задаче о разделении по электрическому заряду  $z$  быстрых фрагментов ядерных реакций, регистрируемых системой из пяти сцинтилляционных счетчиков магнитного спектрометра МАСПИК. Приведены оценки уровня значимости для гипотезы  $z = 1$  и вероятности принять двухзарядную частицу за однозарядную. Численные результаты получены для экспериментальных данных по облучению легких ядер  $\alpha$ -частицами с импульсом 4,5 ГэВ/с/Н.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Słowiński B., Mulas E., Zhmyrov V.N.  
Separation of Relativistic Particles  
on the Basis of Their Electrical Charge Using  
 $\omega^2$  Statistics

P10-86-832

$\omega^2$  statistics is used to separate on the basis of electrical charge the relativistic nuclear fragments by a set of 5 scintillation counters of the MASPIC magnetic spectrometer. Estimations of significance level for the hypothesis of  $z = 1$  and probabilities to take a particle with  $z = 2$ , for a one having the charge  $z = 1$  have been performed. Numerical results are obtained using experimental data concerning reactions of  $\alpha$ -particles with light nuclei at 4.5 GeV/c/N.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986