объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-724

В.К.Мельников

О ПРЯМОМ МЕТОДЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МНОГОСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН НА ПЛОСКОСТИ x,y

Направлено в журнал "Известия АН СССР, серия математическая"

1986

Применение метода обратной задачи к исследованию различных нелинейных процессов за прошедшие два десятилетия обогатило науку рядом глубоких результатов, существенно углубивших наше понимание многих явлений. В действительности многие из этих результатов могут быть получены без использования метода обратной задачи. В настоящей работе это утверждение будет продемонстрировано на примере системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2=0,\quad i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{I}$$

описывающей (в некотором приближении) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу /I/. Здесь u - амплитуда длинной волны, φ - комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр $\varkappa$ удовлетворяет условию $\varkappa^2=1$. Нами получены явные выражения для многосолитонного решения системы (I). При этом основную роль играют некоторые очень элементарные факты, относящиеся к матрицам весьма специального вида. Достигается это следующим образом.

§I. Решение вспомогательной системы уравнений

Пусть B - квадратная матрица порядка $r_0=r_1+2r_2,\ r_1>0,\ r_2>0$, с элементами $B_{r,s}$, $r,s=1,\dots,r_0$. Предположим, что отличные от нуля элементы матрицы B имеют вид

$$B_{r,s}=\begin{cases}\dfrac{f_r\exp[(\omega_r-\sigma_s)x-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y]}{\omega_r-\sigma_s}, & \text{если } r=1,\dots\\ \qquad\dots,r_1,\ r_1+r_2+1,\dots,r_0, \text{ а } s=1,\dots,r_0+r_1, \\ -\dfrac{f_r\exp[-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y]}{\omega_r^2-\sigma_s^2}, & \text{если } r_1<r\le r_1+r_2<s\le r_0.\end{cases} \tag{I.I}$$

Остальные элементы матрицы B предполагаются равными нулю, т.е.

$$B_{r,s}=0,\ \text{если}\ \begin{cases} 1)\ 1\le r\le r_1,\ r_1+r_2<s\le r_0, \\ 2)\ r_1<r\le r_1+r_2,\ 1\le s\le r_1+r_2, \\ 3)\ r_1+r_2<r,\ s\le r_0. \end{cases} \tag{I.2}$$

При этом предполагается, что величины $f_1,\dots,f_{r_0},\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$, $\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ от координат x,y не зависят. Кроме того, предположим, что величины $f_1,\dots f_{r_0}$ зависят от времени t так, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_r}{\partial t}+i(\omega_r^2-\sigma_r^2)f_r=0 \quad \text{при}\quad r=1,\dots,r_1, \\ &\frac{\partial f_r}{\partial t}-i\sigma_r^2 f_r=0 \quad \text{при}\quad r=r_1+1,\dots,r_1+r_2, \\ &\frac{\partial f_r}{\partial t}+i\omega_r^2 f_r=0 \quad \text{при}\quad r=r_1+r_2+1,\dots,r_0. \end{aligned} \tag{I.3}$$

Однако величины $\omega_1,\dots,\omega_{r_0},\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ считаются не зависящими от t. Возьмем теперь векторы-столбцы λ и ℓ соответственно с компонентами λ_r и ℓ_r вида

$$\lambda_r=\begin{cases} f_r\exp[\omega_r x-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y],\ \text{если}\ r=1,\dots,r_1,r_1+r_2+1,\dots,r_0, \\ f_r\exp[-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y],\ \text{если}\ r_1<r\le r_1+r_2, \end{cases} \tag{I.4}$$

$$\ell_r=\begin{cases} \exp(-\sigma_r x),\ \text{если}\ 1\le r\le r_1+r_2, \\ 1,\ \text{если}\ r_1+r_2<r\le r_0. \end{cases} \tag{I.5}$$

Возьмем, далее, диагональные матрицы J, J_0, J_1, J_2 порядка r_0, имеющие соответственно вид

$$\begin{aligned} &J=diag(1,\dots,1,1,\dots,1,0,\dots,0), \\ &J_0=diag(1,\dots,1,0,\dots,0,1,\dots,1), \\ &J_1=diag(0,\dots,0,1,\dots,1,0,\dots,0), \\ &J_2=diag(0,\dots,0,0,\dots,0,1,\dots,1), \end{aligned} \tag{I.6}$$

где первые группы нулей и единиц имеют длину r_1, а вторые и третьи - имеют длину r_2.

Положим

$$D=det(1+B), \tag{I.7}$$

$$\Phi=det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J_2 \\ J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix},\quad \Psi=det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J \\ J_1\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \tag{I.8}$$

где 1 - единичная матрица порядка r_0, а знак „$\sim$" означает транспонирование, т.е.,в частности,переход от вектора-столбца к вектору-строке. Предположим теперь, что в некоторой окрестности точки $x=x_0,\ y=y_0,\ t=t_0$ выполнено неравенство $D=det(1+B)\neq 0$. Определим функции u,φ,ψ с помощью равенств

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \varphi=\frac{\Phi}{D},\quad \psi=\frac{\Psi}{D}. \tag{I.9}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема I. Определенные посредством (I.I)-(I.9) функции u,φ,ψ удовлетворяют в указанной выше окрестности точки $x=x_0,y=y_0,t=t_0$ системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}-2i\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)=0, \\ &i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad i\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0. \end{aligned} \tag{I.10}$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую элементарную лемму.

Лемма. Пусть A - квадратная матрица порядка $m+n+1$, $m>0$, $n>0$. Пусть, далее, $A_{\mu,\nu}$ - квадратная матрица порядка $m+n$, получающаяся из матрицы A после вычеркивания элементов μ -й строки и ν -го столбца, а $\alpha_{\mu,\nu}=\det A_{\mu,\nu}$, $\mu,\nu=1,\dots,m+n+1$. Пусть, наконец, A_0 - минор n -го порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы A, а матрица $\mathcal{A}_0$ имеет вид

$$\mathcal{A}_0=\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m+1,1} & \dots & \alpha_{m+1,m+1} \end{vmatrix}. \tag{I.II}$$

Тогда справедливо равенство

$$(\det A)^m \det A_0=\det\mathcal{A}_0. \tag{I.I2}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\det A\neq 0$. Возьмем матрицу $\hat{A}$ вида

$$\hat{A}=\begin{vmatrix} 1_{m+1} & A_1 \\ 0 & A_0 \end{vmatrix}, \tag{I.I3}$$

где 1_{m+1} - единичная матрица порядка $m+1$, а A_1 - минор матрицы A, образованный элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu=1,\dots,m+1$ и столбцов с номерами $\nu=m+2,\dots,m+n+1$. Тогда справедливо равенство

$$A^{-1}\hat{A}=\begin{vmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ \hat{A}_1 & 1_n \end{vmatrix}, \tag{I.I4}$$

где 1_n - единичная матрица порядка n, $\hat{A}_0$ - минор $(m+1)$-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A^{-1}, а $\hat{A}_1$ - минор матрицы A^{-1}, образованный элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu=m+2,\dots,m+n+1$ и столбцов с номерами $\nu=1,\dots,m+1$. Из равенства (I.I4) в силу (I.II) и (I.I3) следует справедливость соотношения (I.I2).

В том случае, когда $\det A=0$, заменим матрицу A на матрицу $A'=A+\varepsilon 1_{m+n+1}$, где 1_{m+n+1} - единичная матрица порядка $m+n+1$. Для матрицы A' утверждение леммы справедливо при всех достаточно малых $\varepsilon\neq 0$. Переходя к пределу при

$\varepsilon\to 0$, получаем, что в этом случае справедливо равенство $\det\mathcal{A}_0=0$, т.е. соотношение (I.I2) справедливо и в случае $\det A=0$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. С помощью непосредственной подстановки выражений (I.9) в (I.I0) убеждаемся, что система (I.I0) будет заведомо удовлетворена, если величины D, Φ, Ψ удовлетворяют соотношениям

$$\Big(\frac{\partial^2 D}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\Big)D=\Big(\frac{\partial D}{\partial t}-\frac{\partial D}{\partial y}\Big)\frac{\partial D}{\partial x}+i\Phi\Psi, \tag{I.I5}$$

$$\Big(i\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\Big)D=\Big(i\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\Big)\Phi-2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{I.I6}$$

$$\Big(i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\Big)D=\Big(i\frac{\partial D}{\partial t}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\Big)\Psi+2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{I.I7}$$

Докажем их. Согласно (I.I),(I.2) и (I.4)-(I.6) справедливы равенства

$$\frac{\partial B}{\partial x}=\omega J_0 B-BJ\sigma=J_0\lambda\tilde{\ell}J,\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}=\omega J_0\lambda,\ \frac{\partial\ell}{\partial x}=-\sigma J\ell, \tag{I.I8}$$

где произведение $\lambda\tilde{\ell}$ вектора-столбца λ на вектор-строку $\tilde{\ell}$ понимается как произведение матриц и, следовательно, является квадратной матрицей порядка r_0 с элементами $\lambda_r\ell_s$, $r,s=1,\dots,r_0$, а диагональные матрицы ω и σ имеют вид

$$\omega=diag(\omega_1,\dots,\omega_{r_0}),\quad \sigma=diag(\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}). \tag{I.I9}$$

Для произвольных целых чисел $m\geq 0$ и $n\geq 0$ определим квадратные матрицы $F_{m,n}$, G_m, H_n порядка r_0+1:

$$F_{m,n}=\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J\sigma^n \\ \omega^m J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \tag{I.20}$$

$$G_m=\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J_2 \\ \omega^m J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix},\quad H_n=\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J\sigma^n \\ J_1\lambda & 1+B \end{vmatrix}. \tag{I.21}$$

Пусть, далее, K - квадратная матрица порядка r_0+1, имеющая вид

$$K=\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_1\lambda & 1+B \end{vmatrix}. \tag{I.22}$$

Возьмем, наконец, квадратные матрицы U, V, W порядка r_0+2:

$$U=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J} \\ \mathcal{J}_1\lambda & \mathcal{J}_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \tag{I.23}$$

$$V=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J} \\ \omega\mathcal{J}_0\lambda & \mathcal{J}_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \quad W=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}\sigma \\ 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J} \\ \mathcal{J}_1\lambda & \mathcal{J}_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}. \tag{I.24}$$

На основании (I.7),(I.8), (I.I8)-(I.2I) и (I.24) имеем

$$\frac{\partial D}{\partial x}=-\det F_{0,0}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=-\det F_{1,0}+\det F_{0,1}, \tag{I.25}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\det G_1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}=\det G_2-\det V, \tag{I.26}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}=-\det H_1, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}=\det H_2+\det W. \tag{I.27}$$

Возьмем теперь матрицу T вида

$$T=\exp(i\sigma^2\mathcal{J}t) \tag{I.28}$$

и положим

$$\hat{B}=T^{-1}BT. \tag{I.29}$$

С учетом (I.I)-(I.3),(I.6),(I.I9),(I.28) и (I.29) находим, что отличные от нуля элементы $B_{r,s}$ матрицы B имеют вид

$$\hat{B}_{r,s}=\begin{cases} \dfrac{g_r\exp[(\omega_r-\sigma_s)x-i(\omega_r^2-\sigma_s^2)t-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y]}{\omega_r-\sigma_s}, \\ \text{если } r=1,\dots,r_1,r_1+r_2+1,\dots,r_0, \text{ а } s=1,\dots,r_1+r_2, \\ -\dfrac{g_r\exp[-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y]}{\omega_r^2-\sigma_s^2}, \text{ если } r_1<r\le r_1+r_2<s\le r_0, \end{cases} \tag{I.30}$$

где величины $g_1,\dots,g_{r_0}$ связаны с величинами $f_1,\dots,f_{r_0}$ соотношением

$$g_r=\begin{cases} f_r\exp[i(\omega_r^2-\sigma_r^2)t], & \text{если } 1\le r\le r_1, \\ f_r\exp(-i\sigma_r^2 t), & \text{если } r_1<r\le r_1+r_2, \\ f_r\exp(i\omega_r^2 t), & \text{если } r_1+r_2<r\le r_0, \end{cases} \tag{I.3I}$$

и, следовательно, от t не зависят. Остальные элементы матрицы $\hat{B}$, очевидно, равны нулю. В силу (I.4)-(I.6) и (I.28)-(I.3I) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} &= -i\omega^2\mathcal{J}_0\hat{B}+i\hat{B}\mathcal{J}\sigma^2= \\ &= -iT^{-1}(\omega\mathcal{J}_0\lambda\tilde{\ell}\mathcal{J}+\mathcal{J}_0\lambda\tilde{\ell}\mathcal{J}\sigma)T, \\ \frac{\partial}{\partial t}(T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda) &= -iT^{-1}\omega^2\mathcal{J}_0\lambda, \\ \frac{\partial}{\partial t}(T\mathcal{J}\ell) &= iT\sigma^2\mathcal{J}\ell, \\ \frac{\partial}{\partial t}(T^{-1}\mathcal{J}_1\lambda) &= \frac{\partial}{\partial t}(T\mathcal{J}_2\ell)=0. \end{aligned} \tag{I.32}$$

Далее, согласно (I.7),(I.8),(I.28) и (I.29) справедливы равенства

$$D=\det(1+\hat{B}),$$

$$\Phi=\det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}_2T \\ T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B} \end{vmatrix}, \quad \Psi=\det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}T \\ T^{-1}\mathcal{J}_1\lambda & 1+\hat{B} \end{vmatrix},$$

из которых на основе (I.32) вытекают соотношения

$$i\frac{\partial D}{\partial t} = -\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}T\\ T^{-1}\omega\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix} - \det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}\sigma T\\ T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix},$$

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}_2 T\\ T^{-1}\omega^2\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix}0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}_2 T\\ 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}T\\ T^{-1}\omega\mathcal{J}_0\lambda & T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix},$$

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}\sigma^2 T\\ T^{-1}\mathcal{J}_1\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix}0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}\sigma T\\ 0 & 0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}T\\ T^{-1}\mathcal{J}_1\lambda & T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix},$$

т.е. в соответствии с (I.20), (I.21) и (I.24) имеем

$$i\frac{\partial D}{\partial t} = -\det F_{1,0} - \det F_{0,1}, \tag{I.33}$$

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \det G_2 + \det V, \quad i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\det H_2 + \det W. \tag{I.34}$$

Отсюда на основании (I.25)-(I.27) следуют равенства

$$i\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -2\det F_{1,0}, \quad i\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -2\det F_{0,1}, \tag{I.35}$$

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2\det V, \quad i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 2\det W. \tag{I.36}$$

Воспользуемся теперь доказанной ранее леммой. Положим $A = V$. Беря $m = 1$, $n = r_0$, с учетом (I.20),(I.21) и (I.24) получаем, что

$$A_0 = 1 + B, \quad A_{1,1} = F_{0,0}, \quad A_{1,2} = F_{1,0}, \quad A_{2,1} = G_0, \quad A_{2,2} = G_1.$$

В силу (I.7),(I.8),(I.21),(I.25),(I.26),(I.35) и (I.36) равенство (I.12) в этом случае имеет вид (I.16). Аналогичным образом, полагая $A = W$, при $m = 1$, $n = r_0$ находим, что $A_0 = 1 + B$, $A_{1,1} = F_{0,0}$, $A_{1,2} = H_0$, $A_{2,1} = F_{0,1}$, $A_{2,2} = H_1$. Согласно (I.7),(I.8), (I.21),(I.25),(I.27),(I.35) и (I.36) равенство (I.12) на этот раз принимает вид (I.17).

Возьмем теперь матрицу Y вида

$$Y = \exp(i\sigma^2 y) \tag{I.37}$$

и пусть

$$\check{B} = Y^{-1} B Y. \tag{I.38}$$

В соответствии с (I.1),(I.19),(I.37) и (I.38) отличные от нуля элементы $\check{B}_{r,s}$ матрицы $\check{B}$ имеют вид

$$\check{B}_{r,s} = \begin{cases} \dfrac{f_r \exp[(\omega_r - \sigma_s)x - i(\omega_r^2 - \sigma_s^2)y]}{\omega_r - \sigma_s}, & \text{если } r = 1,\dots \\ \dots, r_1, r_1 + r_2 + 1, \dots, r_0, \text{ а } & s = 1, \dots, r_1 + r_2, \\ -\dfrac{f_r \exp[-i(\omega_r^2 - \sigma_s^2)y]}{\omega_r^2 - \sigma_s^2}, & \text{если } r_1 < r \le r_1 + r_2 < s \le r_0. \end{cases} \tag{I.39}$$

Остальные элементы матрицы $\check{B}$, очевидно, равны нулю. С помощью (I.4)-(I.6) и (I.37)-(I.39) получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \check{B}}{\partial y} &= -i\omega^2\mathcal{J}_0\check{B} + i\check{B}\mathcal{J}\sigma^2 - i\omega^2\mathcal{J}_1\check{B}\mathcal{J}_2 + i\mathcal{J}_1\check{B}\mathcal{J}_2\sigma^2 = \\ &= -iY^{-1}(\omega\mathcal{J}_0\lambda\tilde{\ell}\mathcal{J} + \mathcal{J}_0\lambda\tilde{\ell}\mathcal{J}\sigma - \mathcal{J}_1\lambda\tilde{\ell}\mathcal{J}_2)Y.\end{aligned} \tag{I.40}$$

Далее, в силу (I.7) и (I.38) имеем $D = \det(1 + \check{B})$.

Отсюда на основе (I.40) следует равенство

$$i\frac{\partial D}{\partial y} = -\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}Y\\ Y^{-1}\omega\mathcal{J}_0\lambda & 1+\check{B}\end{vmatrix} -$$

$$-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}\sigma Y\\ Y^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\check{B}\end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\mathcal{J}_2 Y\\ Y^{-1}\mathcal{J}_1\lambda & 1+\check{B}\end{vmatrix},$$

т.е. в соответствии с (I.20) и (I.22) получаем

$$i\frac{\partial D}{\partial y} = -\det F_{1,0} - \det F_{0,1} + \det K.$$

Таким образом, с учетом (I.33) находим, что

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial y} = i \det K. \qquad (I.41)$$

Отсюда согласно (I.4)-(I.6), (I.I8),(I.22) и (I.23) следует равенство

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = -i \det U. \qquad (I.42)$$

Воспользуемся снова доказанной ранее леммой. Положим $A = U$. Беря $m = 1$, $n = r_0$, в силу (I.20)-(I.23) получаем, что $A_0 = 1 + B$, $A_{1,1} = F_{0,0}$, $A_{1,2} = H_0$, $A_{2,1} = G_0$, $A_{2,2} = K$. В соответствии с (I.7),(I.8),(I.2I),(I.25),(I.4I) и (I.42) убеждаемся, что в этой ситуации из соотношения (I.I2) вытекает справедливость (I.I5).

Теорема доказана.

Уместно отметить, что если величины $\omega_1, \dots, \omega_{r_0}, \sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}$ удовлетворяют условию

$$\omega_r^2 = \sigma_r^2, \quad r = 1, \dots, r_0,$$

то полученное нами решение системы (I.I0) согласно (I.I) и (I.4) не зависит от y и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2i\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) = 0, \quad i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = u\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} + u\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

§2. Инвариантное многообразие системы (I.I0)

Из теоремы I следует, что если определенные посредством (I.I)-(I.8) функции D, Φ, Ψ удовлетворяют соотношениям *)

*) Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение, а звездочкой обозначается эрмитово сопряжение для матриц (и векторов).

$$D = \bar{D}, \quad \Psi = i\varkappa\bar{\Phi}, \quad \varkappa^2 = 1, \qquad (2.1)$$

то определенные согласно (I.9) функции u, φ, ψ принадлежат инвариантному многообразию $u = \bar{u}$, $\psi = i\varkappa\bar{\varphi}$ системы (I.I0), и, следовательно, функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D, \quad \varphi = \frac{\Phi}{D} \qquad (2.2)$$

являются решением системы (I). Следующая теорема содержит достаточные условия для выполнения соотношений (2.I).

Теорема 2. Если входящие в определение матрицы B и векторов λ, ℓ величины $f_1, \dots, f_{r_0}, \omega_1, \dots, \omega_{r_0}, \sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ f_r \neq 0 \ \text{при}\ r = 1, \dots, r_0, \\ &2)\ f_r = \bar{f}_r,\ \sigma_r = -\bar{\omega}_r \ \text{при}\ r = 1, \dots, r_1, \\ &3)\ \sigma_{r_1+r} = -\bar{\omega}_{r_1+r_2+r},\ \sigma_{r_1+r_2+r} = -\bar{\omega}_{r_1+r}, \\ &\quad f_{r_1+r_2+r} = i\varkappa\bar{f}_{r_1+r} \ \text{при}\ r = 1, \dots, r_2, \end{aligned} \qquad (2.3)$$

то полученные с помощью (I.I)-(I.8) функции D, Φ, Ψ удовлетворяют соотношениям (2.I).

Доказательство. Представим матрицу B в следующем блочном виде:

$$B = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ a & b & 0 \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

где α - минор, стоящий на пересечении первых r_1 строк и первых r_1 столбцов; β - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r = 1, \dots, r_1$ и столбцов с номерами $s = r_1+1, \dots, r_1 + r_2$; $-\gamma$ - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r = r_1+1, \dots, r_1 + r_2$ и столбцов с номерами $s = r_1+r_2+1, \dots, r_0$; a - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r = r_1 + r_2+1, \dots, r_0$ и столбцов с номерами $s = 1, \dots, r_1$; и, наконец, b - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_0$ и столбцов с номерами $s = r_1+1, \dots, r_1 + r_2$. Пусть

$$f=\mathrm{diag}\{f_1\exp[-i(\omega_1^2-\bar\omega_1^2)y],\dots,f_{r_1}\exp[-i(\omega_{r_1}^2-\bar\omega_{r_1}^2)y]\},$$

$$g=\mathrm{diag}(g_1,\dots,g_{r_2}),\quad h=\mathrm{diag}(h_1,\dots,h_{r_2}), \tag{2.5}$$

где по определению при $r=1,\dots,r_2$ имеем

$$g_r=f_{r_1+r}\exp[-i(\omega_{r_1+r}^2-\bar\omega_{r_1+r_2+r}^2)y], \tag{2.6}$$

$$h_r=f_{r_1+r_2+r}\exp[-i(\omega_{r_1+r_2+r}^2-\bar\omega_{r_1+r}^2)y].$$

В силу (2.3) получаем, что

$$f=f^*,\quad h=i\varkappa g^*. \tag{2.7}$$

Далее, в соответствии с (I.I) и (2.3)-(2.7) находим, что

$$\alpha f=f\alpha^*,\quad af=h\beta^*,\quad bh^*=hb^*,\quad \gamma g^*=-g\gamma^*. \tag{2.8}$$

Положим теперь

$$S=\begin{vmatrix} f & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\varkappa g\\ 0 & h & 0\end{vmatrix},\quad S_0=\det S. \tag{2.9}$$

Согласно (2.4)-(2.9) справедливы равенства

$$S=S^*,\quad SB^*=BS^*=BS.$$

Отсюда следует, что

$$S(1+B^*)=(1+B)S, \tag{2.10}$$

т.е. с учетом неравенства $f_r\neq 0$ при $r=1,\dots,r_0$ получаем равенство $\det(1+B)=\det(1+B^*)$. Таким образом, первое из соотношений (2.I) доказано.

Докажем теперь второе из соотношений (2.I). В силу (I.8) и (2.9) имеем

$$S_0\bar\Phi=\det\begin{vmatrix} 0 & \lambda^*J_0\\ SJ_2\ell & S(1+B^*)\end{vmatrix},\quad \Psi S_0=\det\begin{vmatrix} 0 & \tilde\ell JS\\ J_1\lambda & (1+B)S\end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

На основании (I.4)-(I.6),(2.3),(2.5),(2.6) и (2.9) справедливы равенства

$$\tilde\ell JS=\lambda^*J_0,\quad J_1\lambda=i\varkappa SJ_2\ell. \tag{2.12}$$

В соответствии с (2.10) и (2.12) второе из соотношений (2.I) следует из равенств (2.11).

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что если величины $\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ выбраны с соблюдением условий

$$\begin{aligned} &1)\ \omega_r=\bar\omega_r \quad \text{при } r=1,\dots,r_1,\\ &2)\ \omega_{r_1+r}^2-\bar\omega_{r_1+r_2+r}^2=0 \quad \text{при } r=1,\dots,r_2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

то полученное нами решение системы (I) не зависит от y и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2=0,\quad i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{2.14}$$

играющей важную роль в ряде областей математической физики. Нетрудно убедиться, что если $u=u(x,t)$, $\varphi=\varphi(x,t)$ является решением системы (2.14), то пара функций

$$v(x,t)=u(x+ct,t),\quad \psi(x,t)=\varphi(x+ct,t)\exp[i\tfrac{c}{2}(x+\tfrac{c}{2}t)]$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}-c\frac{\partial v}{\partial x}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2=0,\quad i\frac{\partial\psi}{\partial t}=u\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{2.14'}$$

В работах /2,3/ системы (2.14) и (2.14') исследовались с помощью метода обратной задачи рассеяния. Однако получаемые здесь попутно явные выражения для многосолитонных решений этих систем являются новыми.

Выясним теперь, какие требования нужно дополнительно наложить на величины $f_1,\dots,f_{r_0}$, $\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ для того, чтобы определитель D не обращался в нуль при любых вещественных значениях x, y, t. Ответ дает следующая

Теорема 3. Если входящие в определение матрицы B величины $f_1,\dots,f_{r_0}, \omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ удовлетворяют условиям:

1) $\operatorname{sign} f_1 = \dots = \operatorname{sign} f_{r_1} = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1) = \dots = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1})$, (2.15)

2) $\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1}) = \dots = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0})$, (2.16)

3) $\varkappa \operatorname{Re}\left[i\left(\omega^2_{r_1+r} - \bar{\omega}^2_{r_1+r}\right)\omega_{r_1+r_2+r}\right] < 0$ при $r = 1,\dots,r_2$, (2.17)

то определитель $D = \det(1 + B)$ отличен от нуля при любых вещественных x, y, t.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$X + \alpha X + \beta Y = 0, \quad Y - \gamma Z = 0, \quad a X + b Y + Z = 0, \tag{2.18}$$

где матрицы $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ определены ранее с помощью представления (2.4) матрицы B, а X и Y, Z – векторы-столбцы соответственно с r_1 и r_2 компонентами. Покажем, что при выполнении условий (2.15)-(2.17) система (2.18) имеет только тривиальное решение. С этой целью сделаем в системе (2.18) замену

$$X = f\hat{X}, \quad Y = h^*\hat{Y}, \quad Z = \hat{Z},$$

где матрицы f и h определены посредством (2.5) и (2.6). В результате получим систему

$$(f + \hat{\alpha})\hat{X} + \hat{\beta}\hat{Y} = 0, \quad \hat{Y} - \hat{\gamma}\hat{Z} = 0, \quad \hat{a}\hat{X} + \hat{b}\hat{Y} + \hat{Z} = 0, \tag{2.19}$$

где

$$\hat{\alpha} = \alpha f, \quad \hat{\beta} = \beta h^*, \quad \hat{\gamma} = (h^*)^{-1}\gamma, \quad \hat{a} = a f, \quad \hat{b} = b h^*. \tag{2.20}$$

Согласно (2.7),(2.8) и (2.20) имеем

$$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha}, \quad \hat{\beta}^* = \hat{a}, \quad \hat{\gamma}^* = \hat{\gamma}, \quad \hat{b}^* = \hat{b}, \tag{2.21}$$

т.е. матрицы $f + \hat{\alpha}$, $\hat{b}$ и $\hat{\gamma}$ являются эрмитовыми. Далее, из системы (2.19) вытекает равенство

$$-\hat{X}^*(f + \hat{\alpha})\hat{X} + \hat{Y}^*\hat{b}\hat{Y} + \hat{Z}^*\hat{\gamma}\hat{Z} = 0. \tag{2.22}$$

Элементарный анализ показывает, что если выполнено условие (2.17) и справедливо равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} f_1 = \dots = \operatorname{sign} f_{r_1} = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1) = \dots = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1}) = \\ = -\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1}) = \dots = -\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}), \end{aligned} \tag{2.23}$$

то матрицы $-(f + \hat{\alpha})$, $\hat{b}$ и $\hat{\gamma}$ будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Кроме того, в силу равенств первой строки формулы (2.23) имеем $\det(f + \hat{\alpha}) \neq 0$. Отсюда следует, что равенство (2.22) возможно только при $\hat{X} = 0$. Это значит, что для любого решения системы (2.19) выполняются соотношения

$$\hat{Y} - \hat{\gamma}\hat{Z} = 0, \quad \hat{b}\hat{Y} + \hat{Z} = 0. \tag{2.24}$$

На основе сказанного выше все собственные значения матриц $\hat{b}\hat{\gamma}$ и $\hat{\gamma}\hat{b}$ неотрицательны. Следовательно, определитель системы (2.24) отличен от нуля, т.е. $\hat{Y} = \hat{Z} = 0$. Таким образом, при выполнении условий (2.17) и (2.23) система (2.18) имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим теперь матрицы A_0 и A_1 вида

$$A_0 = \begin{vmatrix} f + \hat{\alpha} & \hat{\beta} \\ \hat{a} & \hat{b} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \hat{\gamma}.$$

Согласно (2.21) матрицы A_0 и A_1 являются эрмитовыми. Элементарный анализ показывает, что если выполнено условие (2.17) и справедливо равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} f_1 = \dots = \operatorname{sign} f_{r_1} = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1) = \dots = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1}) = \\ = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1}) = \dots = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}), \end{aligned} \tag{2.25}$$

то матрицы A_0 и A_1 будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Возьмем матрицу Q вида

$$Q = \begin{vmatrix} 1_{r_2} & 0 \\ -q & 1_{r_2} \end{vmatrix},$$

где 1_{r_2} – единичная матрица порядка r_2, а $q = \hat{\alpha}(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}$. С учетом (2.21) имеем $q^* = (f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta}$. Нетрудно убедиться, что эрмитова матрица $\hat{A}_0 = Q A_0 Q^*$ имеет вид

$$\hat{A}_0 = \begin{vmatrix} f+\hat{\mathcal{L}} & 0 \\ 0 & \hat{b} - \hat{\alpha}(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta} \end{vmatrix}.$$

Матрицы A_0 и $\hat{A}_0$ будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Из сказанного выше вытекает, что эрмитовы матрицы

$$f+\hat{\mathcal{L}}, \quad A_1 = \hat{\gamma}, \quad A_2 = \hat{b} - \hat{\alpha}(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta} \tag{2.26}$$

будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Выразим теперь с помощью первого уравнения системы (2.19) вектор $\hat{X}$ через вектор $\hat{Y}$, т.е. положим

$$\hat{X} = -(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta}\,\hat{Y}. \tag{2.27}$$

Это можно сделать, так как в силу равенств первой строки формулы (2.25) справедливо неравенство $\det(f+\hat{\mathcal{L}}) \neq 0$. После подстановки выражения (2.27) в третье уравнение системы (2.19) получаем систему

$$\hat{Y} - A_1\hat{Z} = 0, \quad A_2\hat{Y} + \hat{Z} = 0, \tag{2.28}$$

где матрицы A_1 и A_2 определены посредством (2.26). С учетом сказанного выше все собственные значения матриц A_1A_2 и A_2A_1 неотрицательны. На этом основании определитель системы (2.28) отличен от нуля, т.е. $\hat{Y} = \hat{Z} = 0$. Далее, в силу (2.27) получаем $\hat{X} = 0$. Таким образом, при выполнении условий (2.17) и (2.25) система (2.18) имеет только тривиальное решение.

Поскольку из условий (2.15), (2.16) вытекает справедливость либо условия (2.23), либо условия (2.25), то из сказанного выше следует, что условия (2.15)-(2.17) гарантируют отсутствие у системы (2.18) нетривиального решения, что, как известно, эквивалентно отличию от нуля определителя D.

Теорема доказана.

Отметим, что условия (2.13) не противоречат условиям (2.15)-(2.17).

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу полученного нами решения (2.2) системы (1). В типичном случае это решение описывает

взаимодействие $r_1 + r_2$ уединенных волн двух типов. Волны первого типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_1^2}{\operatorname{ch}^2[\mu_1 x + 2\mu_1\nu_1(y+t)]}, \quad \varphi = 0,$$

где вещественные параметры μ_1 и ν_1 принимают произвольные значения. Волны второго типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_2^2}{\operatorname{ch}^2[\mu_2(x+2\nu_2 t + 2\sigma y)]},$$

$$\varphi = c\,\frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t) + i\tau y]}{\operatorname{ch}[\mu_2(x+2\nu_2 t + 2\sigma y)]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где вещественные параметры μ_2, ν_2, σ, τ и комплексная величина c удовлетворяют единственному условию

$$2(\nu_2-\sigma)\mu_2^2 + \varkappa|c|^2 = 0,$$

и, следовательно, для существования этих решений необходимо выполнение условия $(\nu_2-\sigma)\varkappa < 0$. В типичном случае взаимодействие всех волн является упругим, т.е. результат взаимодействия выражается в соответствующих фазовых сдвигах всех взаимодействующих волн.

Ситуация меняется коренным образом, если на величины $\omega_1, \dots, \omega_{r_0}$ наложить определенные дополнительные требования. В этом случае среди взаимодействующих волн появляются, например, пары волн разных типов, в которых одна волна гасит другую. Впервые это явление было обнаружено нами в работе /4/. Однако рассмотренный там случай не исчерпывает всех сторон этого явления. Результаты настоящей работы позволяют рассмотреть это явление более полно.

В заключение отметим, что если в системе (1) заменить t на y, а y на t, то в итоге получим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2, \quad i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = u\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{*}$$

Очевидно, что проделав в решении (2.2) ту же самую замену, мы получим решение системы $(*)$. Однако упомянутое выше решение в новых переменных имеет совсем другой характер, а именно: в новых переменных это решение описывает излучение (или поглощение) длинной волной пакета коротких волн. Ранее это явление было обнаружено нами в другой системе уравнений [5].

Литература

1. Mel'nikov V.K., Lett. Math.Phys., 1983, v.7, N 2, p.129-136.
2. Yajima N., Oikawa M. Progr.Theor.Phys., 1976, v.56, N 6, p.1719-1739.
3. Ma Y.-C. Stud.Appl.Math., 1978, v.59, N 3, p.201-221.
4. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-234, Дубна: ОИЯИ, 1986.
5. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-276, Дубна: ОИЯИ, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 ноября 1986 года