

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P10-86-618**

**В.Б.Злоказов**

**ROLSM - ПРОГРАММА  
ДЛЯ РОБАСТНОЙ МИНИМИЗАЦИИ  
КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА,  
НЕЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩЕГО  
ОТ ПАРАМЕТРОВ**

**1986**

## Введение

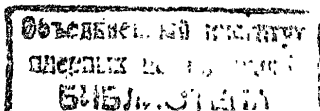
Интерес к процедурам робастной (помехоустойчивой) подгонки экспериментальных данных параметрическими кривыми огромен. Отношение к этим процедурам охватывает широкий диапазон, начиная с осторожного оптимизма, ждущего от них некоторого улучшения качества оценок, и кончая самым бескомпромиссным экстремизмом, объявляющим метод наименьших квадратов (м.н.к.) печальным заблуждением и призывающим к отказу от него<sup>1,2/</sup>.

Истина, по-видимому, состоит в том, что основой массовой обработки данных был, есть и будет м.н.к.; однако в тех случаях, когда он в принципе не может дать приемлемой точности, разумеется, необходимо по возможности автоматический переход к робастным процедурам. Именно требование такой совместимости и было основным к программе ROYSM : при обработке "нормальных" данных должна действовать подгонка в смысле квадратичной метрики, а при обработке "засоренных" данных - автоматически включаться робастная подгонка. При этом должна выполняться максимальная совместимость критериев и концепций проверки гипотез, контроля минимизации, ошибок оценок параметров и т.д.

### § I. Робастность в анализе регрессий

В дальнейшем будет использоваться детерминистская трактовка регрессий, изложенная в<sup>3/</sup> и являющаяся более общей, чем статистическая. С ее точки зрения, погрешность данных, случайного или неслучайного происхождения, характеризуется нормой, а "выбросами" являются погрешности, явно превосходящие по амплитуде ожидаемую для них норму.

Традиционное изложение понятия робастности обычно опирается на такой факт: последовательность плотностей функций распределения с плохо интегрируемыми "хвостами" может быть сколь угодно близкой к нормальной плотности в смысле  $\epsilon$ -метрики, однако м.н.к.-оценки параметров по соответствующим выборкам могут сколь угодно сильно отличаться от истинных значений. Для регрессий такая ситуация нехарактерна. В регрессионном анализе помехоустойчивость проявляется в неадекватно сильной реакции м.н.к.-оценок параметров регрессий на изолированные "выбросы". Особенно наглядно это проявляется при ана-



лизе нелинейных регрессий, но, хотя и в меньшей степени, имеет место и для регрессий линейных.

Неустойчивость оценок параметров регрессий к "выбросам" можно проиллюстрировать таким примером. Пусть  $y_j = c + e_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Пусть  $\|e_j\| = \varepsilon$ ,  $j \neq 1$ , а  $\|e_1\| = d$ ,  $d \gg \varepsilon$ . Пусть далее конкретное измерение дало данные  $y_j = c - \varepsilon$ ,  $j \neq 1$  и  $y_1 = c + d$ ,  $d \gg \varepsilon m$ . Если при м.н.к.-анализе таких данных мы будем исходить из предположения, что норма погрешности везде одинакова и равна  $\varepsilon$ , то м.н.к.-оценка параметра  $c$ , определяемая из условия минимума выражения  $\sum_j \frac{1}{\varepsilon^2} (y_j - \hat{c})^2$ , будет равна 
$$\hat{c} = c - \frac{m-1}{m}\varepsilon + \frac{1}{m}d. \quad (I.1)$$

Эта погрешность будет велика (по сравнению с  $\varepsilon$ ), и если  $d = N\varepsilon$  и  $N \gg m$ , то она приближенно будет равна  $N\varepsilon/m$ . Использование, например, метрики модулей позволяет выправить ситуацию, даже если не привлекаются никакие дополнительные сведения о  $c$ . Действительно, минимум  $\sum_j \frac{1}{\varepsilon} |y_j - c|$  достигается при  $\hat{c} = c - \varepsilon$  и при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\hat{c} \rightarrow c$  при любом поведении  $d$ . Однако переход к метрике модулей в общем случае связан с потерей эффективности оценивания, так как погрешности оценок в этом случае больше, чем погрешности м.н.к.-оценок. Кроме того, метрика модулей дает устойчивые оценки только тогда, когда в данных есть ярко выраженное "большинство", определяющее ход линии регрессии. Если же "голоса разделяются", минимизация в метрике модулей становится неустойчивой (рис.1).

Сказанное относится и к таким модификациям метрики модулей, как метрика Хьюбера и другие: методики оценивания параметров, основанные на их использовании, оказываются неконкурентоспособными по сравнению с наименьшими квадратами для "нормальных" данных; в случае же "засоренных" данных их эффективность снижается из-за существования более или менее отлаженных методик предварительного устранения "выбросов" из данных. Следует заметить, что эффективность м.н.к.-оценки резко возрастает, если веса (обратно пропорциональные квадратам норм) в м.н.к.-процедуре указаны верно. Даже если по-прежнему погрешность "выброса"  $d$  велика, но в качестве веса в точке  $y_1$  взята величина  $1/d^2$ , то м.н.к.-оценка  $\hat{c}$  будет равна:

$$\hat{c} = c + \frac{\varepsilon^2 d - (m-1)\varepsilon d^2}{\varepsilon^2 + (m-1)d^2}. \quad (I.2)$$

Если  $d \sim N\varepsilon$ , то погрешность этой оценки будет приближенно равна  $\frac{d}{(m-1)N^2} - \varepsilon$  и в  $\frac{N}{m}$  раз меньше, чем погрешности (I.1).

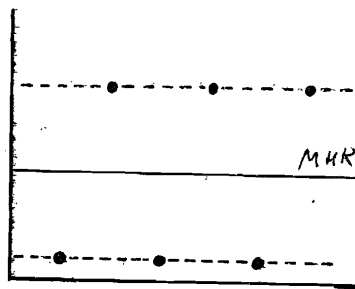


Рис.1. Ситуация: нет "большинства"; любая прямая линия, проходящая между верхними и нижними точками, дает одинаковый минимум суммы модулей отклонений, в то время как м.н.к.-оценка проходит единственным образом по истинной линии.

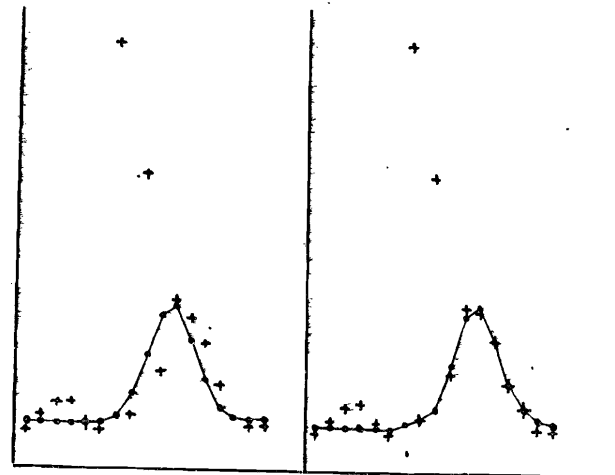


Рис.2.

Сравнение результатов м.н.к.-подгонки (слева) и робастной (справа). Точками обозначены исходные данные, кружками — подогнанные. Погрешности параметров, представляющих интерес (разности между ними и истинными значениями), оказались ниже в случае робастной подгонки по сравнению с м.н.к. в 2-4 раза.

Это подсказывает путь, по которому следует идти, чтобы регуляризовать задачу оценивания: используя априорную информацию о линии регрессии, строить веса в м.н.к.-процедуре, максимально адекватные реальным. В пользу такого подхода говорит еще одно обстоятельство. В литературе, при введении понятия неустойчивости оценок к помехам, модель формирования погрешностей излагается обычно так (см., например, /2/): имеется основная погрешность  $\varepsilon_1$ , подчиненная распределению  $N(0, \sigma^2)$ , и "выброс"  $\varepsilon_2$ , подчиненный распределению  $N(0, k\sigma^2)$ ; результирующая погрешность равняется либо  $\varepsilon_1$ , либо  $\varepsilon_2$ , и имеет в силу этого негауссово распределение. В реальных задачах, однако, механизм формирования погрешностей очень часто носит аддитивный характер и не следует логике "или-или". Окончательная погрешность равна либо  $\varepsilon_1$ , либо  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , и в обоих случаях имеет место гауссово распределение, но с разными дисперсиями.

## § 2. Робастность как результат корректировки весов

В дальнейшем большие буквы будут обозначать матрицы и векторы, маленькие - их элементы. Итак, пусть даны  $y_j$  - начальные данные  $j=1, \dots, m$ ,  $f(x_i, p_i)$  - модель регрессии,  $i=1, \dots, n$ ,  $E_j$  - погрешности данных  $y_j$ , имеющие нормы  $D_j$ , и вектор априорных оценок (помехоустойчивых)  $P_{oi}$ .

Формируем веса для процедуры минимизации следующим образом. Обозначим  $H_j = \{y_j - f(x_j, P_{oi})\} / D_j$ . Пусть далее даны константы  $\alpha$  и  $\beta$ , характеризующие степень достоверности априорных оценок  $P_{oi}$  и характер их влияния на веса. Тогда веса  $w_j$  будут равны.

$$w_j = \begin{cases} 1/D_j^2, & \text{если } |H_j| \leq c \\ \frac{1 + \beta}{(\frac{1}{c^2}(H_j)^2 + \beta)D_j^2}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.1)$$

Далее робастная оценка параметров  $P_i$  ищется либо из условия минимума

$$\sum_{j=1}^m w_j \{y_j - f(x_j, P_i)\}^2, \quad (2.2)$$

либо, если используется итерационный процесс, из условия минимума

$$\sum_{j=1}^m w_j^{(k)} \{y_j - f(x_j, P_i)\}^2, \quad (2.3)$$

где  $w_j^{(k)}$  зависят от номера итерации  $k$  и пересчитываются по формулам (2.1) на каждой  $k$ -й итерации. В качестве  $P_{i0}$  берется значение  $P_i$  на предыдущей итерации. Коэффициент  $c$  характеризует апри-

орную оценку области возможных значений величин  $H_j$ , и если выполняется  $|H_j| \leq c$  для всех  $j$ , то оценки (2.2) и (2.3) являются обычными м.н.к.-оценками; для тех  $j$ , в которых  $|H_j| > c$ , происходит пересчет норм  $D_j$  приблизительно в  $H_j/c$  раз. Коэффициент  $\beta$  является управляющим; он регулирует степень действия этого механизма пересчета норм: при  $\beta=0$  его действие максимально, при  $\beta \rightarrow \infty$  пересчет не работает вообще, и минимум (2.2) и (2.3) независимо от значений  $H_j$  дает обычные м.н.к.-оценки. Метрики (2.2) и (2.3) являются в случае сходимости процесса минимизации ограниченными, и при  $H_j \rightarrow \infty$  не превосходят существенно  $m(1+\beta)c^2$ .

Начнем рассмотрение со случая линейной регрессии. Пусть

$$y_j = F_{ji} P_i + E_j, \quad j=1, \dots, m; \quad i=1, \dots, n \quad (2.4)$$

и пусть  $\|E_j\| = D_j$ .

Формируем диагональную весовую матрицу  $w$ :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1/D_j^2, & \text{при } i=j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.5)$$

Тогда м.н.к.-оценка  $\hat{P}$ , находящаяся из условия минимума (2.2), равна

$$\hat{P} = (F' w F)^{-1} F' w y. \quad (2.6)$$

Пусть данные  $y$  содержат "выбросы". Будем различать три варианта м.н.к.-оценок:

1) Чистая, неробастная, м.н.к.-оценка, сосчитанная по формуле (2.6) при весах (2.5);

2) Робастная м.н.к.-оценка, сосчитанная при априорной оценке  $\hat{P}_0$  и весах (2.1),  $\beta < +\infty$  и дополнительном условии, что  $\hat{P}_0$  и константа  $c$  выбраны настолько удачно, что "выбросы" идентифицированы правильно;

3) Отклонение  $n_j$  равно

$$|y_j - F P_0| = |y_j - F P_0 + F P_0 - F P_0| \sim (D_j + \|F P_0 - F P_0\|).$$

Если  $\|F P_0 - F P_0\|$  велика, или  $c$  слишком мала, то некоторые точки могут быть ошибочно идентифицированы как "выбросы". Поэтому введем рассмотрение и третью, робастную м.н.к.-оценку, но сосчитанную при некоторых значениях данных, ошибочно объявленных "выбросами".

Мы можем представить матрицу  $w$  в следующем виде:

$$w = U + V,$$

где  $U$  - "истинная" весовая матрица, а  $V$ :

1) в первом случае, для  $j$  "выбросов":

$$V_{jj} = 1/D_j^2 - 1/D_j^2 \text{ ист.} \quad (2.7)$$

2) во втором случае, для  $j$  "выбросов"

$$v_{jj} = \frac{1+\beta}{\left\{ \frac{H_j}{c^2} + \beta \right\} D_j^2} - \frac{1}{D_{j\text{ист}}^2} \quad (2.8)$$

3) в третьем случае  $v_{jj}$  будет считаться по формулам (2.8) также и для некоторых  $j$ , в которых "выбросов" нет, и по формулам (2.7) для пропущенных истинных "выбросов". В остальных  $j$  все  $v_{jj}$  равны нулю. Здесь  $D_j$  - истинная норма погрешности в точке  $j_{\text{ист}}$ .

С учетом сказанного мы можем переписать (2.6) в таком виде:

$$\hat{P} = (F'UF + F'VF)^{-1} (F'UY + F'VY). \quad (2.9)$$

От "истинной" м.н.к.-оценки  $(F'UF)^{-1}F'UY_{\text{ист}}$ , она будет отличаться искажающими линейным  $F'VY$  и нелинейным  $F'VF$  факторами, норма которых будет тем меньше, чем меньше норма матрицы  $V$ , т.е. чем меньше разности  $1/D_j^2$  и  $1/D_{j\text{ист}}^2$ .

Запись (2.9) допускает более наглядное представление в следующем важном частном случае. Обозначим  $F'UF=M$ ,  $F'UY=B$ . Пусть выполняются условия:

1) априорная оценка  $P_0$  и константа  $c$  выбраны настолько хорошо, что "выбросы" и "нормальные данные" идентифицированы правильно;

2) матрица  $M$  достаточно хорошо обусловлена, норма матрицы поправок к дисперсиям (2.8) достаточно мала и константа  $\beta$  выбрана удовлетворительно, так что минимальное собственное значение матрицы  $M$  больше максимального собственного значения матрицы  $F'VF$ .

Тогда ответ на вопрос о преимуществах робастной м.н.к.-оценки перед неробастной дает нижеследующая

**Теорема.** При выполнении условий 1,2 норма погрешности робастной м.н.к.-оценки строго меньше нормы погрешности неробастной м.н.к.-оценки.

**Доказательство.** Так как минимальное собственное значение матрицы  $M$  больше, чем максимальное собственное значение матрицы  $F'VF$ , то евклидова норма матрицы  $M^{-1}(F'VF)$  будет меньше единицы. Обозначим  $R=M^{-1}(F'VF)$  и перепишем (2.9) в следующем виде:

$$\hat{P} = M^{-1}B + G(Y), \quad \text{где} \quad G(Y) = SM^{-1}B + (I+S)^{-1}M^{-1}(F'VY), \quad \text{а} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n R^n. \quad (2.10)$$

Погрешность оценки  $\hat{P}$  будет иметь как статистическую компоненту, зависящую от  $M^{-1}F'UE$  и  $G(E)$ , так и систематическую, равную  $G(P_{\text{ист}})$  и, таким образом, от погрешностей данных  $E_j$  не зависящую. Из вида (2.10) следует, что нормы этих обеих погрешностей будут пропорциональны норме матрицы  $F'VF$ , точнее, норме ее ненулевого блока. Докажем лемму: если  $U_1$  и  $U_2$  - диагональные матрицы, а  $F$  -

прямоугольная матрица и  $U_1 > U_2$ , то  $\|F'U_1F\| > \|F'U_2F\|$ . Действительно, для произвольного вектора  $X$  имеем

$$(F'(U_1 - U_2)FX, X) = ((U_1 - U_2)FX, FX) > 0 \quad \text{для} \quad \|FX\| = 1,$$

откуда следует утверждение леммы.

Сравнив (2.7) и (2.8), видим, что во всех  $j$  "выбросов" диагональные элементы матрицы весовых поправок для неробастной м.н.к.-оценки будут строго больше по абсолютной величине, чем такие же элементы для случая робастной м.н.к.-оценки. А отсюда нетрудно вывести, что суммарная норма погрешности неробастной м.н.к.-оценки будет строго больше, чем погрешности робастной м.н.к.-оценки. Теорема доказана.

В остальных случаях приходится прибегать к численному моделированию. Оно показало, что качества робастной м.н.к.-оценки сильно зависят от следующих факторов:

1) качество априорной оценки  $P_0$ ; в частности, она сама должна быть робастной;

2) выбор константы  $c$  и связанная с этим надежность идентификации "выбросов"; чрезмерное завышение  $c$  может привести к пропуску "выбросов", чрезмерное занижение - к объявлению "выбросами" "нормальных" значений;

3) выбор константы  $\beta$ ; уже при  $\beta \geq 1$  ( $c \geq 1$ ) м.н.к.-оценка начинает терять робастность; в то же время нельзя брать и  $\beta=0$ , так как при этом определенно начинает теряться эффективность при обработке данных без "выбросов".

Все это согласуется с результатами численного анализа и других робастных методов<sup>4</sup>. В нелинейном случае, как обычно, строится итерационная процедура. Итерационный процесс дает то преимущество, что можно считать априорной оценкой параметров на предыдущей итерации и уточнять ее в процессе подгонки.

### § 3. Алгоритм и описание программы ROLSM

Итак, минимизируемой величиной является выражение

$$F(x, y, P) = \sum_{j=1}^m W_j \left\{ y(x_j) - f(x_j, P) \right\}^2 + \alpha \sum_{i,j=1}^n r_{ij} (P_i - P_{ia}) (P_j - P_{ja}) \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$P_{il} \leq P_i \leq P_{iu}, \quad (3.2)$$

где все  $W_j$  вычисляются по формуле (2.5), а 2-й член в (3.1) (тихоновский регуляризатор) введен для большей универсальности программы и по желанию может использоваться в тех случаях, когда м.н.к.-матрица плохо обусловлена и нужна тихоновская регуляризация задачи<sup>5</sup>. В

этом случае вектор  $p_a$  - вектор априорной оценки параметров,  $R^{-1}_{ij}$  - матрица априорных ковариаций этих оценок,  $\alpha$  - параметр регуляризации. Если  $\alpha = 0$ , регуляризация не используется.

Сам процесс минимизации (3.1) строится так. За основу был взят алгоритм, реализованный в программе FUMIL1 /6/. Он был дополнен такими чертами (помимо упомянутой регуляризации и робастности), как:

- 1) демпфирование м.н.к.-матрицы, т.е. искусственное повышение ее обусловленности /7/;
- 2) проектирование промежуточных значений искомых параметров на двусторонние ограничения (3.2);
- 3) возможность использовать 2-е производные как для усиления ньютоновского характера минимизации, так и для проверки м.н.к.-матрицы на положительную определенность, и некоторыми другими.

Минимизация осуществляется в 2 стадии:

1) сначала процесс Гаусса-Ньютона (с использованием первых производных по параметрам) либо для решения регуляризованной задачи ( $\alpha \neq 0$ ), либо с демпфированием м.н.к.-матрицы ( $\alpha = 0$ );

2) затем (если есть возможность вычислять вторые производные по параметрам) процесс Ньютона.

В обоих процессах промежуточные значения параметров  $P$  проектируются на симплекс (3.2):

$$\tilde{p}_i = \begin{cases} p_i, & \text{если } p_{il} \leq p_i \leq p_{iu} \\ p_{il}, & \text{если } p_{il} > p_i \\ p_{iu}, & \text{если } p_{iu} < p_i \end{cases}$$

Демпфирование м.н.к.-матрицы состоит в умножении ее ненулевых диагональных элементов на величину  $(1 + \alpha)$ , и замене нулевых на величину  $\alpha$ , где  $\alpha$  - фактор демпфирования /7/.

Выходными величинами программы являются:

- 1) оценки параметров, матрица ковариаций этих оценок и факторы корреляции;
- 2)  $F$  - значение функционала (3.1), отношения  $m^+/m$  и  $F^+/F$ , где  $m^+$  - число точек, в которых  $|n_j| \leq c$ , а  $F^+$  - сумма положительных вкладов в  $I$ -й член выражения (3.1); все эти величины позволяют контролировать качество аппроксимации.

Обращение к программе ROLSM имеет вид:

CALL ROLSM(SB, RB, P, AM1, AMD, Y, F, OP, RM, N, ANP, AR).

Здесь:

SB - массив управляющих данных,

SB(1)=n, SB(2)=m, SB(3)=k+2,

k - размерности вектора  $x$ ,

SB(4) = шаг, с которым выбираются (циклически) точки  $x$ ,

SB(5) = верхнее число итераций Гаусса-Ньютона,

SB(6) = требуемая точность минимизации - скалярное произведение: вектор невязок на вектор поправок,

SB(7) = требуемое отношение  $F$  к числу степеней свободы,

SB(8), SB(9) - нижнее и верхнее число итераций Ньютона,

SB(10)=1(0) - м.н.к.-матрица (не) должна проверяться на положительную определенность,

SB(11)= $\lambda$  - величина шага в итерациях ( $0 < \lambda \leq 1$ )

SB(12)= $\alpha$  - демпфирующий фактор,

SB(13)=1(0) - промежуточные результаты (не) должны выдаваться на печать,

SB(14)= $\alpha$  - параметр регуляризации,

SB(15)=c, SB(16)=a - константы робастной минимизации,

P - массив, содержащий перед минимизацией начальные значения параметров (первые  $N$  чисел), их нижние границы (следующие  $N$  чисел), их верхние границы (следующие  $N$  чисел); после минимизации первые  $N$  чисел будут результирующими значениями параметров. Если некоторые нижние границы равны верхним, соответствующие параметры фиксируются,

N - число параметров,

ANP - массив числовых данных,  $(k+2)m$  чисел, представляет собой последовательность из  $m$  групп чисел,  $j$ -ая группа содержит:  $Y(j), W(j), X_1(j), \dots, X_k(j)$ .

AR - имя арифметической процедуры (должно быть объявлено в EXTERNAL) для вычисления значений функции, ее производных и (если возможно) вторых производных.

Первый оператор должен иметь вид:

SUBROUTINE AR(SB, RB, P, AM1, F, N, ANP, K, X, R)

Здесь параметры те же, что и для ROLSM. AR должна в зависимости от режима R вычислить: в  $k$ -ой точке:  $I|_{R=1}$ , значение функции и первых производных для процесса Гаусса-Ньютона,

2)  $R=2$ , дополнительно значения вторых производных,

3)  $R=3$ , то же, что и при  $R=1$ , для вычисления матрицы ковариаций.

Для этого AR берет  $k$ -ую группу из массива ANP (если размерность  $X$  равна 1, аргумент можно брать из  $X$ ) и значения текущих параметров из массива P, производит нужные вычисления и помещает:

1) значение функции в ячейку  $x_j$ ,

2) первые производные в массив F,

3) вторые производные в левую половину матрицы  $AM1(i, j)$ ,  $i \geq j$

RB - массив результирующих данных:

- RB(1)=1(Q) - процесс (не) сошелся,  
 RB(2)=0(t) - есть (нет) параметры на границе,  
 RB(3)=AFD - число степеней свободы,  
 RB(4) = достигнутая точность минимизации,  
 RB(5) - число использованных гаусс-ньютоновских итераций,  
 RB(6) - число " " ньютоновских итераций,  
 RB(7)=1(O) - м.н.к.-матрица (не) обращается,  
 RB(8) - хи-квадрат, деленный на число степеней свободы,  
 RB(9) - стандартное отклонение хи-квадрата при данном числе степеней свободы,  
 RB(10) -  $F^*$   
 RB(11) -  $m^+$   
 RB(12) - значение 2-го члена в (3.1) .

Найденные параметры - в массиве P (первые N чисел)

- AM1 - матрица ковариаций,  $N \times N$  чисел  
 F - массив ошибок ( N чисел),  
 Y - массив факторов корреляций ( N чисел),  
 AMD - рабочий массив ( N чисел),  
 OP - априорные оценки параметров ( N чисел),  
 RM - априорная обратная матрица ковариаций  $N \times N$  чисел.

Работа программы иллюстрируется рис. 2 и 3.

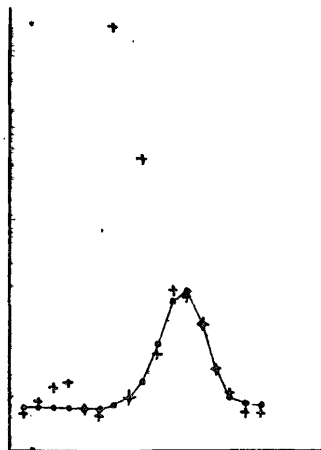


Рис.3.

Полная робастная подгонка ( $v = 0$ ). Погрешности параметров в этом случае будут наименьшими, но, как сказано в тексте, при обработке "незасоренных" данных такая подгонка ведет к некоторой потере эффективности.

### Литература

1. Устойчивые статистические методы оценки данных. Пер. с англ. под ред. Н.Г.Волкова, М., "Машиностроение", 1984.
2. Хьюбер П.Дж. Робастность в статистике. М., "Мир", 1984.
3. Злоказов В.Б. ОИЯИ, Р10-86-502, Дубна, 1986.
4. Астапов Л.А. и др. ОИЯИ, Р5-85-492, Дубна, 1985.
5. Арсенин В.Л., Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. М., "Наука", 1979.
6. Силин И.Н. ОИЯИ, II-3362, Дубна, 1967.
7. Александров Л. ОИЯИ, Р5-10365, Дубна, 1977.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Злоказов В.В.

P10-86-618

ROLSM - программа для робастной минимизации квадратичного функционала, нелинейно зависящего от параметров

Описаны метод и программа робастной минимизации функционалов типа  $\sum_x w(x) <y(x) - f(x, P)>^2$ , ориентированная преимущественно на анализ регрессий  $f(x, P)$ , нелинейно зависящих от параметров  $P$ . Робастность достигается пересчетом весов  $w(x)$  на каждой итерации процесса минимизации по правилу:

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} w(x), & \text{если } |h(x)| \leq c, \\ ((1 + \beta) / (\frac{1}{c^2} h^2(x) + \beta)) w(x), & \text{если иначе,} \end{cases}$$

где  $h(x) = (y(x) - f(x, P_0)) \cdot \sqrt{w(x)}$ ;  $P_0$  - вектор параметров на предыдущей итерации,  $c$  и  $\beta$  - заданные константы. При  $\beta = 0$  мы имеем предельно робастную методику, при  $\beta \gg 0$  метод переходит в обычный м.н.к., при  $\beta \sim 0,5$  он является комбинированным, что обеспечивает устойчивость минимизации по отношению к отдельным выбросам, и позволяет не терять эффективность, присущую м.н.к., при обработке "незасоренных" данных.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Zlokazov V.V.

P10-86-618

ROLSM - A Program for the Robust Minimization of a Quadratic Functional Which Non-Linearly Depends on Parameters

A method and a program for the robust minimization of the functionals of the type  $\sum_x w(x) <y(x) - f(x, P)>^2$  are described. These are mainly oriented to the analysis of regressions  $f(x, P)$ , depending non-linearly on the parameters  $P$ . The robustness is achieved due to the recalculation of the weights  $w(x)$  at each iteration of the minimization process according to the rule:

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} w(x), & \text{if } |h(x)| \leq c \\ ((1 + \beta) / (\frac{1}{c^2} h^2(x) + \beta)) w(x), & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $h(x) = (y(x) - f(x, P_0)) \cdot \sqrt{w(x)}$ ,  $P_0$  is a parameter vector of the previous iteration, and  $c$  and  $\beta$  are the constants given. If  $\beta=0$ , we have the most robust procedure; if  $\beta \gg 0$ , the method turns into a usual least square method; and if  $\beta \sim 0,5$ , the method combines both, which provides for the minimization stability with respect to single outliers, and keeps the efficiency of the L.S.M., while normal data are processed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR, Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1986