

Б-484

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



4225/2-74

28/x-74

P10-8167

С.Ф.Бережнев, Г.А.Емельяненко, О.А.Займидорога

**МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОКРАТНОГО  
КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ  
РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД С УЧЕТОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ  
ПОТЕРЬ**

**1974**

**ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ**

P10-8167

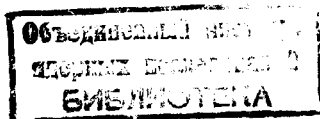
С.Ф.Бережнев,\* Г.А.Емельяненко, О.А.Займидорога

**МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОКРАТНОГО  
КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ  
РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД С УЧЕТОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ  
ПОТЕРЬ**

*Направлено в ПТЭ*

---

\* НИИЯФ, МГУ



При анализе информации, получаемой в современных физических экспериментах, выполняемых электронными методами, часто возникает необходимость учета многократного кулоновского рассеяния /м.к.р./ заряженных частиц в веществе экспериментальной установки /1, 2/. Это нетрудно сделать моделированием м.к.р. методом Монте-Карло. Рассеиватели, каждый из которых может характеризоваться своей радиационной длиной, между координатными детекторами разбиваются на  $n^{(k)} - 1$  тонких слоев, так что на каждом из них выполняется условие:

$${}^{(k)}\Delta E_i \ll {}^{(k)}E_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n^{(k)} - 1, \quad /1/$$

где здесь и всюду далее  ${}^{(k)}E_i$ ,  ${}^{(k)}\Delta E_i = {}^{(k)}E_{i+1} - {}^{(k)}E_i$  - энергия и потери энергии частицы соответственно в /МэВ/ при прохождении ею  $i$ -го слоя  $k$ -го рассеивателя / $k=1, 2, \dots, m$ /.

На границе каждого из  ${}^{(k)}i$  слоев состояние частицы определяется ее положением -  ${}^{(k)}\vec{r}_i$  - координатным вектором и импульсом  ${}^{(k)}\vec{p}_i$  /МэВ/с/. Отметим также, что  ${}^{(k)}\vec{r}_{n^{(k)}}, {}^{(k)}\vec{p}_{n^{(k)}} = ({}^{(k+1)}\vec{r}_1, {}^{(k+1)}\vec{p}_1)$ , т.е. внутренние граничные точки фазового пространства совпадают, если рассеиватели имеют общую границу. Поэтому свойство "марковости" процесса многократного кулоновского рассеивания в каждом из  $m$ -рассеивателей /3/ сохраняется и в случае их комбинации. Полная плотность вероятности прохождения частицы по всем точкам фазового пространства может быть записана поэтому в виде

$$\Phi[(\vec{r}_1^{(1)}, \vec{p}_1^{(1)}, \dots, \vec{r}_n^{(1)}, \vec{p}_n^{(1)}, \dots, \vec{r}_2^{(m)}, \vec{p}_2^{(m)}, \dots, \vec{r}_n^{(m)}, \vec{p}_n^{(m)}) / (\vec{r}_1^{(k)}, \vec{p}_1^{(k)})] = \prod_{k=1}^m \prod_{i=2}^n \phi[(\vec{r}_i^{(k)}, \vec{p}_i^{(k)}) / (\vec{r}_{i-1}^{(k)}, \vec{p}_{i-1}^{(k)})], \quad /2/$$

где  $\phi[(\vec{r}_i^{(k)}, \vec{p}_i^{(k)}) / (\vec{r}_{i-1}^{(k)}, \vec{p}_{i-1}^{(k)})]$  - условная плотность вероятности перехода частицы из одной точки фазового пространства в другую. Будем всюду далее называть ее элементарной плотностью вероятности. Разыгрывая случайные переменные  $(\vec{r}_i^{(k)}, \vec{p}_i^{(k)})$  с плотностью  $\phi[(\vec{r}_i^{(k)}, \vec{p}_i^{(k)}) / (\vec{r}_{i-1}^{(k)}, \vec{p}_{i-1}^{(k)})]$  независимо в каждом слое по методу Монте-Карло, можно, таким образом, проследить весь путь частицы в веществе. Но при этом элементарная вероятность, как известно, является функцией энергетических потерь /радиационных и ионизационных/. Для упрощения процедуры совместного моделирования переменных  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  на каждом из слоев можно воспользоваться условием /1/. При этом элементарная условная вероятность приобретает вид Ферми /4/ для переменной  $\vec{r}$  с постоянной энергией внутри каждого слоя. Моделирование потерь при переходе от одного рассеивающего слоя к другому можно выполнить, например, воспользовавшись /4/.

Становится поэтому очевидным, что способ уточнения параметров случайных траекторий отдельных заряженных частиц, включающий моделирование м.к.р. в большом числе тонких слоев, на которые разбиваются рассеивающие среды, даже для современных электронных вычислительных машин становится затруднительным.

В данной работе предлагается простой способ моделирования искажения траекторий заряженных частиц из-за многократного кулоновского рассеяния в толстых средах.

Приводится, в отличие от /5/, явный вид распределения переменных, характеризующих многократное кулоновское рассеяние в толстых средах с учетом энергетических потерь.

Итак, пусть непрерывная слоистая среда состоит из  $m$  толстых рассеивателей, характеризующихся различными радиационными длинами. Пусть также задано началь-

ное распределение  $\phi(\vec{r}_1^{(1)}, \vec{p}_1^{(1)})$  или координаты точки вхождения частицы в первую рассеивающую среду и ее начальный импульс. Разбиваем каждую из сред на тонкие слои, как это было указано выше, чтобы выполнялись условия /1/. Находим в граничных точках каждого такого слоя значения энергии и импульса частицы. Это можно сделать путем моделирования, например, /4/, энергетических потерь, если необходимо, или вычислением средних ионизационных потерь /4/ в каждом из тонких слоев. Получим теперь явный вид функции распределения \* /2/. В выбранной системе координат переменные  $y$  и  $z$  - проекции случайных боковых смещений траектории частицы из-за м.к.р. в плоскостях XOY и XOZ соответственно на ось OY и OZ. Обозначим проекции угла многократного рассеяния  $\vec{p}_i^{(k)} \wedge \vec{p}_{i+1}^{(k)} = \theta$  м.к.р. на выбранные плоскости соответственно  $(k) \delta_i^{(y)}$  и  $(k) \delta_i^{(z)}$ . Боковые смещения и угловые отклонения полностью описывают процесс м.к.р. Можно рассматривать /4/ м.к.р. независимо в каждой из этих двух взаимно-ортогональных плоскостей \*\*.

Поэтому далее рассуждения будем проводить относительно одной из указанных плоскостей /например, XOY /, опуская при этом индекс (y) или (z) у соответствующей переменной. При сформулированных выше предположениях м.к.р. в тонких слоях описывается распределением Ферми /4/

\* Не теряя общности рассуждений, можем считать, что изучается рассеяние при высоких энергиях в плоско-параллельной пластине, перпендикулярной направлению  $(1) \vec{p}_1$ . При этом правая декартова система координат выбирается таким образом, чтобы ее начало совпадало с точкой  $O(1) x_1, (1) y_1, (1) z_1 = O(0) \vec{r}_1$  и ось OX была бы направлена по  $(1) \vec{p}_1$ . Эффективная толщина рассеивающих слоев в такой координатной системе, естественно, измеряется вдоль OX.

\*\* Фитирование параметров траектории заряженных частиц в указанных выше экспериментах также обычно производят независимо в двух плоскостях.

$$\phi[(^{(k)}y_i, ^{(k)}\delta_i), ^{(k)}\ell_i / 0, ^{(k)}\Sigma_i] = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta_s^2 (^{(k)}\ell_i^2)} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{4}{\theta_s^2} \left( \frac{(^{(k)}\delta_i^2}{(^{(k)}\ell_i^2)} - \frac{3(^{(k)}y_i(^{k)}\delta_i)}{(^{(k)}\ell_i^2)} + \frac{3(^{(k)}y_i^2)}{(^{(k)}\ell_i^3)} \right) \right], \quad /3/$$

которое является двумерным гауссовым распределением с нулевыми средними, коэффициентом корреляции  $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и ковариационной матрицей /3/

$$^{(k)}\Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma(^{(k)}y_i) & \rho\sigma(^{(k)}y_i)\sigma(^{(k)}\delta_i) \\ \rho\sigma(^{(k)}\delta_i)\sigma(^{(k)}y_i) & \sigma(^{(k)}\delta_i) \end{bmatrix} = (^{(k)}y_i^2) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} (^{(k)}\ell_i^3) & \frac{1}{2} (^{(k)}\ell_i^2) \\ \frac{1}{2} (^{(k)}\ell_i^2) & (^{(k)}\ell_i) \end{bmatrix}, \quad /4/$$

здесь и всюду далее  $^{(k)}\ell_i = (^{(k)}x_{i+1} - ^{(k)}x_i)$  - длина пройденного пути в  $^{(k)}i$  слое,

$$(^{k)}\gamma_i^2 = \frac{(21.2)^2}{2} \cdot \frac{1}{(^{k)}X_{\text{рад.}}} \cdot \frac{(^{k)}E_{i+1} (^{k)}E_i)}{(^{(k)}p_{i+1} (^{k)}p_i)^2}$$

для всех  $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $i = 1, 2, \dots, n^{(k)} - 1$ ,  $X_{\text{рад.}}$  - радиационная длина.

При заданном способе разбиения /1/ и вычисленных значениях подпоследовательностей  $^{(k)}\gamma_i$  полностью определяются подпоследовательности матриц  $^{(k)}\Sigma_i$ .

Для упрощения дальнейших рассуждений введем последовательную нумерацию наборов переменных  $\{^{(k)}y_i, ^{(k)}\delta_i, ^{(k)}\ell_i, ^{(k)}\gamma_i, ^{(k)}\Sigma_i\}$ , описывающих м.к.р., т.е. будем каждую переменную набора нумеровать одним индексом /например,  $\{y_j, \delta_j, \ell_j, \gamma_j, \Sigma_j\}_1^N$ , т.е.

$$j = 1, 2, \dots, n^{(1)} - 1; n^{(1)}, n^{(1)} + 1, \dots, n^{(1)} + n^{(2)} - 2; \dots;$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} n^{(k)} - (m-1) + 1, \dots, \sum_{k=1}^m n^{(k)} - m.$$

Теперь можем записать /3/ явный вид условной плотности вероятности /2/ прохождения частицы по всем точкам фазового пространства  $\{y_j, \delta_j, \ell_j, \gamma_j\}$  с учетом марковости м.к.р.

$$\Phi[(y_j, \delta_j, \ell_j)_1^N / (\vec{r}_1, \vec{p}_1)] = (2\pi)^{-N} |_{(1)}\Sigma|^{-1/2} \times \quad /5/$$

где  $\exp\left[-\frac{1}{2} (y, \Delta)_{(1)}\Sigma^{-1} (y, \Delta)^T\right],$

$(y, \Delta) = (y_1, \delta_1; y_2, \delta_2; \dots; y_N, \delta_N)$  -  $(2N)$ -компонентный случайный вектор боковых смещений и угловых отклонений в каждом элементарном слое вещества;  $_{(1)}\Sigma$  - квазидиagonalная дисперсионная матрица размерности  $[2N, 2N]$ , у которой по диагонали стоят матрицы  $[2, 2]$  вида /4/,  $|_{(1)}\Sigma|$  - детерминант матрицы  $_{(1)}\Sigma$ ,  $T$  - знак транспонирования.

$$_{(1)}\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & & 0 \\ & \Sigma_2 & & \\ & & \Sigma_3 & \\ 0 & & & \Sigma_N \end{bmatrix}$$

Выполним перестановки в случайном векторе  $(y, \Delta)$  /5/, в результате которых первыми  $N$  компонентами окажутся  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  - боковые смещения, а вторыми - угловые отклонения  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$ . Подобные перестановки можно выполнить с помощью следующего невырожденного ортогонального линейного преобразования

$$(y_1, y_2, \dots, y_N; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)^T = C \cdot (y_1, \delta_1; y_2, \delta_2; \dots; y_N, \delta_N)^T,$$

/6/

где элементы матрицы преобразования  $C$  имеют вид

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 2i - 1, i = 1, 2, 3, \dots, N \\ 1, & \text{если } j = 2(i - N), i = N + 1, N + 2, \dots, 2N \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad /7/$$

В силу ортогональности  $C^{-1} = C^T$ .

Преобразование /6/ не меняет значения квадратичной формы в показателе экспоненты /5/. Однако матрица  $(1)\Sigma$  при этом принимает вид /3/ :

$$(2)\Sigma = C \cdot (1)\Sigma \cdot C^T = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & 0 & \rho\sigma_{y_1}\sigma_{\delta_1} & 0 \\ & \sigma_{y_2}^2 & \rho\sigma_{y_2}\sigma_{\delta_2} & \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ & & \sigma_{y_N}^2 & \rho\sigma_{y_N}\sigma_{\delta_N} \\ \rho\sigma_{y_1}\sigma_{\delta_1} & 0 & \sigma_{\delta_1}^2 & 0 \\ \rho\sigma_{y_2}\sigma_{\delta_2} & & \sigma_{\delta_2}^2 & \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ & & \rho\sigma_{y_N}\sigma_{\delta_N} & \sigma_{\delta_N}^2 \end{bmatrix} \quad /8/$$

Выполним теперь /3/ невырожденное линейное преобразование случайного вектора  $(y_1, y_2, \dots, y_N; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$

$$Y_i = \sum_{j=1}^i y_j + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^j \ell_{j+1} \delta_k \quad /9/$$

$$\delta_i = \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Нетрудно видеть, что в /9/ случайные переменные  $Y_i$  соответствуют полным смещениям из-за м.к.р. траектории заряженной частицы вдоль оси OY в выбранной системе координат, накопленным по прохождению последовательности  $i$  тонких рассеивателей ( $j = 1, 2, \dots, i$ ).  $\delta_i$  - попрежнему случайный угол м.к.р. в элементарном  $i$ -рассеивателе. Применяя теорему /т. 2.4.1 /6/ / к /9/, /8/, /5/, находим /3/ совместное нормальное распределение вектора  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N) = (Y, \Delta)$

$$\Phi[(Y, \Delta) / 0, (3)\Sigma] = (2\pi)^{-N} |(3)\Sigma|^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{1}{2} (Y, \Delta) \cdot (3)\Sigma^{-1} (Y, \Delta)^T\right], \quad /10/$$

где

$$(3)\Sigma = \begin{bmatrix} E_{\Delta} & L_{\Delta} \\ 0 & E \end{bmatrix} \cdot (2)\Sigma \cdot \begin{bmatrix} E_{\Delta}^T & 0 \\ L_{\Delta}^T & E \end{bmatrix},$$

$$(2)\Sigma = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(D\ell)^3 & \frac{1}{2}(D\ell)^2 \\ \frac{1}{2}(D\ell)^2 & D\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix} D\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 & & & \\ & \ell_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ell_N \end{bmatrix} \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_N \end{bmatrix} \quad /11/$$

$$E_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad L_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \ell_2 & 0 & & \\ \sum_{k=2}^3 \ell_k & \ell_3 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \sum_{k=2}^N \ell_k & \sum_{k=3}^N \ell_k & \dots & \ell_N \end{bmatrix}$$

От /10/ перейдем, наконец, к распределению величин  $(Y, \theta)$ , воспользовавшись преобразованием вида:

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{0, 0, \dots, 0, 0}_{N-1}, 1, 0, \dots, 0 \\ \underbrace{0, 0, \dots, 0, 0, 0}_{N}, 1, 1, \dots, 1 \end{bmatrix} \cdot (Y_1, Y_2, \dots, Y_N, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)^T \quad /12/$$

Очевидно,  $Y$  - полное боковое смещение и  $\theta$  - полное угловое отклонение из-за м.к.р. после прохождения частицей  $N$  элементарных рассеивателей. Причем ранг матрицы преобразования /12/ равен 2. Следовательно, на основании теоремы /т. 2.4.4 /6/ / распределение случайных величин  $(Y, \theta)$  является нормальным с нулевыми средними и дисперсионной матрицей  $D_{(3)}\Sigma \cdot D^T$ , где  $D$  - матрица преобразования /12/, а  $(3)\Sigma$  определена в /11/. Перемножив указанные матрицы, в результате получаем

$$\Sigma = D \cdot {}_{(3)}\Sigma \cdot D^T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 \ell_i \left[ \frac{1}{3} \ell_i^2 + \left( \sum_{j=i+1}^N \ell_j \right) \cdot \left( \sum_{j=i}^N \ell_j \right) \right] & \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 \ell_i \left( \frac{1}{2} \ell_i + \sum_{j=i+1}^N \ell_j \right) \\ \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 \ell_i \left( \frac{1}{2} \ell_i + \sum_{j=i+1}^N \ell_j \right) & \sum_{i=1}^N \gamma_i^2 \ell_i \end{bmatrix} \quad /13/$$

Выражение /13/ для дисперсионной матрицы получено нами при зведенной выше последовательной нумерации элементарных рассеивающих слоев. Для удобства дальнейшего анализа выделим суммирование по отдельным однородным средам, сохраняя последовательную нумерацию элементарных слоев в каждой из них. Для этого введем

следующие обозначения:  $s_k = \sum_{j=1}^{k-1} n^{(j)} - (k-2)$  - номер

первого элементарного рассеивающего слоя  $k$ -той сре-

ды,  $t_k = \sum_{j=1}^k n^{(j)} - k$  -- номер последнего слоя  $k$ -той

среды.

$$\text{Тогда } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & R \sigma_Y \sigma_\theta \\ R \sigma_Y \sigma_\theta & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix},$$

где:

$$\sigma_Y^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=s_k}^{t_k} \gamma_i^2 \ell_i \left[ \frac{1}{3} \ell_i^2 + \left( L - \sum_{\eta=1}^i \ell_\eta \right) \left( L - \sum_{\eta=1}^{i-1} \ell_\eta \right) \right]$$

$$\sigma_\theta^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=s_k}^{t_k} \gamma_i^2 \ell_i \quad /13' /$$

$$R \sigma_Y \sigma_\theta = \sum_{k=1}^m \sum_{i=s_k}^{t_k} \gamma_i^2 \ell_i \left[ \frac{1}{2} \ell_i + \left( L - \sum_{\eta=1}^i \ell_\eta \right) \right],$$

где, как условились выше,  $m$  - число толстых рассеивающих сред,  $(n^{(j)} - 1)$  - число элементарных слоев, на которые разбивается  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) - среда, чтобы выполнялось условие /1/, а  $L$  - суммарная длина всех рассеиваю-

щих сред  $L = \sum_{\eta=1}^{t_m} \ell_\eta$ . Коэффициент корреляции величин

$Y$  и  $\theta$  равен

$$R = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{i=s_k}^{t_k} \gamma_i^2 \ell_i \left[ \frac{1}{2} \ell_i + \left( L - \sum_{\eta=1}^i \ell_\eta \right) \right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{i=s_k}^{t_k} \gamma_i^2 \ell_i \cdot \sum_{k=1}^m \sum_{i=s_k}^{t_k} \gamma_i^2 \ell_i \left[ \frac{1}{3} \ell_i^2 + \left( L - \sum_{\eta=1}^{i-1} \ell_\eta \right) \left( L - \sum_{\eta=1}^i \ell_\eta \right) \right]}}$$

/14/

Зная дисперсионную матрицу /13'/, можно моделировать полное угловое отклонение  $\theta$  и полное боковое смещение  $Y$  траекторий заряженных частиц, обусловленные м.к.р. в толстых /в смысле невыполнения условия /1// средах. Для этого полезно выполнить предварительно переход к каноническим переменным  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_\theta} \\ -\frac{1}{\sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \end{bmatrix} \quad /15/$$

Нетрудно видеть, что обратное преобразование имеет вид

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta) \quad /16/$$

$$\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta).$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  - некоррелированные нормально распределенные /6/ случайные величины со стандартными отклонениями

$$\sigma_\alpha = \sqrt{1 + R} \quad \text{и} \quad \sigma_\beta = \sqrt{1 - R}.$$

Некоторый самостоятельный интерес представляет качественный анализ поведения коэффициента корреляции  $R$  в зависимости от структуры рассеивателя.

Пусть среда, в которой происходит м.к.р., однородна, и энергетическими потерями частицы в этом веществе можно пренебречь /т.е. выполнено условие /1//. В этом случае

$$\gamma_i^2 = \text{const} = \frac{(2l, 2)^2}{2} \cdot \frac{1}{X_{\text{рад.}}} \cdot \frac{E^2}{p^4}$$

Из /13/ легко получить, что

$$\sigma_Y^2 = \gamma^2 \cdot \frac{L^3}{3}, \quad \sigma_\theta^2 = \gamma^2 \cdot L, \quad R\sigma_Y\sigma_\theta = \gamma^2 \frac{L^2}{2}, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

что, как и следовало ожидать, соответствует распределению Ферми. Это верно только для однородной рассеивающей среды. Для рассеивающей среды, состоящей из двух слоев разной толщины и с различными радиационными длинами  $^{(1)}X_{\text{рад.}}$  и  $^{(2)}X_{\text{рад.}}$ , коэффициент корреляции между величинами  $Y$  и  $\theta$  равен

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2u \cdot ^{(1)}X_{\text{рад.}}^{-1}}{(u + 4 \cdot ^{(1)}X_{\text{рад.}}^{-1})^2}}}, \quad \text{где } u = \frac{1}{^{(2)}X_{\text{рад.}}} - \frac{1}{^{(1)}X_{\text{рад.}}}$$

/17/

Таким образом, коэффициент корреляции  $R$  меняется в зависимости от радиационных длин слоев вещества, из которых состоит рассеивающая среда.

Из /14/ следует, что имеется возможность подбирать слои с различными радиационными длинами и в такой последовательности, чтобы  $R \rightarrow 1$ , или чтобы  $R \rightarrow 0$ .

Отметим также, что для однородного вещества энергетические потери приводят к уменьшению корреляции величин  $\theta$  и  $Y$ . И, наконец, в заключение приведем численные значения величин  $\sigma_Y$ ,  $\sigma_\theta$  и  $R$  для некоторых наборов рассеивающих сред, вычисленные по приведенным выше формулам с учетом энергетических потерь.

Таблица I

Элементы дисперсионной матрицы $\sigma_Y$ , $\sigma_\theta$ и $R$ для случая прохождения $\mu$ -мезона с импульсом 30 ГэВ/с через заданную систему сред, рассчитанные с учётом энергетических потерь.				
Полное число рассеивателей	номер рассеивателя	вещество	длина (мм)	радиационная длина (мм)
I	I	Pb	2000	5,8
$\sigma_Y = 11,1$ мм, $\sigma_\theta = 9,9$ мрад, $R = 0,856$				
I	I	Pb	10000	5,8
$\sigma_Y = 148,8$ мм, $\sigma_\theta = 34,4$ мрад, $R = 0,782$				
Y	1	Al	20	89 4750000
	2	He	0,1	
	3	Al	20	
	4	He	0,1	
	5	Al	20	
	6	He	0,1	
	7	Al	20	
$\sigma_Y = 0,0033$ мм, $\sigma_\theta = 0,06$ мрад, $R = 0,939$				
7	1	Al	0,1	
	2	He	20	
	3	Al	0,1	
	4	He	20	
	5	Al	0,1	
	6	He	20	
	7	Al	0,1	
$\sigma_Y = 0,0013$ мм, $\sigma_\theta = 0,06$ мрад, $R = 0,464$				

Литература

1. К.Ф.Альбрехт и др. ОИИИ, 1-7305. Дубна, 1973.
2. M.G.Albrow et al. Nucl.Phys., B44, 1, 1972.
3. Г.А.Емельяненко. ОИИИ, P10-5279, Дубна, 1970.
4. Б.Росси. Частицы больших энергий. ГИТТЛ. М., 1955.
5. К.Ф.Альбрехт и др. ОИИИ, 1-7549, Дубна, 1973.
6. Г.Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ. Физматгиз, М., 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел 1 августа 1974 года.