8/IV-7

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P10 - 7681

Б.Словинский

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ ИЗ $K \geq 2$ - ГАММА-КВАНТОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ЯДЕРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Р10 - 7681

Б.Словинский

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ ИЗ $K \geq 2$ - ГАММА-КВАНТОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ЯДЕРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

При экспериментальном исследовании процесса образования нейтральных бозонов, распадающихся на π° -мезоны и гамма-кванты в конечном состоянии /1,2/, а также при изучении множественной эмиссии π° -мезонов, испускаемых в адрон-ядерных взаимодействиях больших энергий /3,4/, возникает необходимость в проведении анализа систем, состоящих из $k \geq 2$ гамма-квантов и сопровождающих случаи реакций, зарегистрированные детектором. Результатом такого анализа должна быть идентификация всех частиц / π° -мезонов, η° -мезонов и др./, в результате распада которых возникли гамма-кванты данной системы. В настоящей работе описан простой алгоритм анализа таких систем.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм основан на предположении, что преобладающим источником исследуемых гамма-квантов являются распады π° - и η° -мезонов на 2 гамма-кванта и что эффективность их регистрации достаточно высока. Предполагается также, что ошибки в определении энергии гамма-квантов не слишком велики /например, не больше 30÷40%/. Тогда процедуру анализа системы, состоящей из $k \geq 2$ гамма-квантов, целесообразно разбить на два следующих этапа.

I. *Выбор оптимальных пар гамма-квантов*

В рамках сделанных предположений любую систему, состоящую из $k \geq 2$ гамма-квантов, можно представить в виде расстановки по оптимальным парам согласно условиям:

$$\sum_{\ell} \sum_{i>j}^{k} \left\{ \left(\frac{m_{\ell} - m_{ij}}{\Delta_{\ell}} \right)^2 + \left(\frac{\cos\theta_{\ell} - \cos\theta_{ij}}{\Delta \cos\theta_{\ell}} \right)^2 \right\} = \min, \qquad /1/$$

$$|m_{\ell} - m_{ij}| < N\,\delta m_{ij}\ , \qquad /2/$$

m_{ij} - эффективная масса пары i,j гамма-квантов, θ_{ij} - угол между направлениями их эмиссии, m_{ℓ} - масса π°- либо η°-мезона, Δ_{ℓ} - полуширина распределения по m_{ij} в районе массы π° либо η° -мезона, $\Delta\cos\theta_{\ell}$ - полуширина распределения ошибок в определении углов θ_{ij} для гамма-квантов от распада π° либо η°-мезона, $\cos\theta_{\ell} = 1 - 2m_{\ell}/E_{ij}$, E_{ij} - полная энергия пары i,j гамма-квантов, $N = 1 - 3$, в зависимости от условий эксперимента, δm_{ij} - ошибка в определении m_{ij}.

При вычислении ошибки δm_{ij} удобно воспользоваться следующим выражением для относительной погрешности $\delta E_{\gamma}/E_{\gamma}$ в определении энергии E_{γ} гамма-квантов в ксеноновой пузырьковой камере:

$$\frac{\delta E_{\gamma}}{E_{\gamma}} = \begin{cases} \{(-7 \cdot A^2 + 10A - 3.25)^2 + 0.01\}^{1/2} \\ \qquad \text{если } 0.7 \leq A \leq 0.9286 \\ 0.1 \\ \qquad \text{если } 0.9286 < A < 1. \end{cases} \qquad /3/$$

$A = \dfrac{R}{R_0}$, R - суммарный пробег электронов в электронно-фотонном ливне, созданном гамма-квантом, на длине развития d, R_0 - аналогичная величина для полностью развивающегося ливня, когда d достаточно велико. Величину R_0 можно найти итерационным методом /5/.

Условие /2/ удобно усилить требованием, чтобы

$$|\theta_{\ell} - \theta_{ij}| = \min . \qquad /2'/$$

Следует подчеркнуть, что в суммировании по i,j в /1/ каждый гамма-квант участвует только один раз. Если изучаемая система состоит из нечетного числа гамма-квантов, то остающемуся гамма-кванту целесообразно присвоить всегда одно и то же, достаточно большое значение выражения, заключенного в фигурные скобки /1/. Это эквивалентно добавлению фиктивного гамма-кванта, не нарушающего внутренней корреляции между зарегистрированными гамма-квантами. Системе, состоящей из k гамма-квантов, соответствует n сумм типа /1/, причем

$$n = \begin{cases} (k-1)!!\ , \text{если } k\text{—четное}, \\ (k-2)!!, \text{ если } k\text{—нечетное}. \end{cases} \qquad /4/$$

Если для пары i,j гамма-квантов условие /2/ не выполняется, то выражению в фигурных скобках суммы /1/ целесообразно приписать достаточно большое, всегда одно и то же, число. Однако при этом следует помнить, что точность определения энергии гамма-квантов должна быть достаточно высокой. Таким образом, оказывается возможным выделять распады типа $\eta^{\circ} \to \pi^{\circ}\gamma\gamma$ и др.

Выражение /1/ легко обобщить на случай эмиссии любых других частиц известной массы, распадающихся на гамма-кванты.

II. *Коррекция энергии гамма-квантов*

Предположим дополнительно, что относительная ошибка в измерении углов θ_{ij} значительно меньше относительной ошибки в определении энергии гамма-квантов. Для ксеноновой пузырьковой камеры этого, как правило, нетрудно достигнуть. Поэтому в дальнейшем ошибкой $\Delta\cos\theta_{ij}$ можно пренебречь.

Задачу коррекции энергии гамма-квантов, возникающих от распадов π°- и η° -мезонов на 2 гамма-кванта, можно свести к нахождению минимального значения функции

$$\chi^2_\ell = \left(\frac{e_i - E_i}{\sigma_i}\right)^2 + \left(\frac{e_j - E_j}{\sigma_j}\right)^2 + 2\alpha f_\ell ,$$

$$f_\ell = 2 e_i e_j (1 - \cos\theta_{ij}) - m^2_\ell , \qquad /5/$$

E_i, E_j - измеренные значения энергии пары i,j гамма-квантов, e_i, e_j - "истинные" значения энергии этих гамма-квантов, α - неопределенный коэффициент, σ_i - ошибка в определении E_i.

Неизвестные величины e_i, e_j и α можно найти из условий:

$$\frac{\partial \chi^2_\ell}{\partial e_i} = 0; \quad \frac{\partial \chi^2_\ell}{\partial e_j} = 0; \quad \frac{\partial \chi^2_\ell}{\partial \alpha} = 0, \qquad /6/$$

которые ведут к следующему уравнению для e_i:

$$e_i^4 \sigma_j^2 - e_i^3 \sigma_j^2 E_i + e_i E_j f_\ell \sigma_i^2 - f_i^2 \sigma_i^2 = 0 . \qquad /7/$$

Уравнение для e_j получается из /7/ перестановкой индексов i и j. Нужное решение для e_i нетрудно найти численным путем, т.к. оно должно находиться в небольшой окрестности измеренного значения энергии E_i. Целесообразно при этом решить уравнение /7/ для гамма-кванта с большим значением измеренной энергии, а при нахождении значения "истинной" энергии второго гамма-кванта воспользоваться равенством:

$$m^2_\ell = 2 e_i e_j (1 - \cos\theta_{ij}).$$

При этом можно избежать значительных искажений, вызванных грубыми ошибками в измерении энергий гамма-квантов.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Точность коррекции энергии гамма-квантов можно оценить, вычислив матрицу ошибок после коррекции [6]:

$$G_e^{-1} = \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial E}\right) G_E^{-1} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial E}\right)^T = \begin{pmatrix} \sigma^2_{ii} & \sigma^2_{ij} \\ \sigma^2_{ji} & \sigma^2_{jj} \end{pmatrix} , \qquad /8/$$

$G_E^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & 0 \\ 0 & \sigma_j^2 \end{pmatrix}$ - матрица ошибок до коррекции,

$\left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial E}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_i}{\partial E_i} & \frac{\partial e_i}{\partial E_j} \\ \frac{\partial e_j}{\partial E_i} & \frac{\partial e_j}{\partial E_j} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial E}\right)^T$ - транспонированная матрица.

Из /7/ и /8/ находим:

$$\sigma^2_{ii} = A^2_{ii} \cdot \sigma^2_i + A^2_{ij} \cdot \sigma^2_j ,$$

$$\sigma^2_{ij} = \sigma^2_{ji} = A_{ii} A_{ij} \sigma^2_i + A_{jj} A_{ji} \sigma^2_j ,$$

$$A^{-1}_{ii} = 1 - \frac{f}{e_i^3}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j}\right)^2 \left(2E_j - 3\frac{f_\ell}{e_i}\right), \qquad /9/$$

$$A^{-1}_{ji} = \frac{1}{f_\ell}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_j}\right)^2 e_j (2E_j - 3e_j) - \frac{f_\ell}{e_j^3}.$$

Величины A_{jj}, A_{ij} и σ_{jj} получаются заменой индексов i и j. Было оценено, что в среднем процедура коррекции улучшает точность определения энергии гамма-квантов, регистрируемых в ксеноновой пузырьковой камере [1-5], на ~ 40%, т.е.

$$\langle \sigma_{ii} \rangle \sim 0.6 \langle \sigma_i \rangle .$$

Путем моделирования на ЭВМ распадов π^0 - и η^0 -мезонов на 2 гамма-кванта с последующим искажением энергий гамма-квантов в условиях, имитирующих реальный эксперимент [1–5], было найдено, что описанная процедура улучшает точность определения энергии гамма-квантов в среднем примерно на порядок, т.е.

$$<\sigma_{ii}> \leq 0.1 <\sigma_i>.$$

В заключение автор выражает признательность профессорам З.С.Стругальскому и М.И.Соловьеву за интерес к работе и поддержку, а также канд. физ.-мат. наук Л.С.Охрименко и доктору математики А.Томашевичу за полезные замечания и интересные дискуссии.

Литература

1. Z.S.Strugalski, I.V.Chuvilo, T.Gemesy, I.A.Ivanovskaya, Z.Jabłoński, T.Kanarek, S.Krasnovski, L.S.Okhrimenko, G.Pinter, B.Słowiński.
   Сообщение ОИЯИ, Е3-5349, Дубна, 1970.
2. Б.Словинский, З.С.Стругальский. Препринт ОИЯИ, Р1-6408, Дубна, 1972.
3. Б.Словинский, З.С.Стругальский. Сообщение ОИЯИ, Р1-6557, Дубна, 1972.
4. Б.Словинский, З.С.Стругальский. Сообщение ОИЯИ, Р1-7439, Дубна, 1973.
5. И.А.Ивановская, Т.Канарек, Л.С.Охрименко, Б.Словинский, З.С.Стругальский, И.В.Чувило, З.Яблонский. ПТЭ, №№2, 39 /1968/.
6. B.Ronne. Proceedings of the 1964 Easter School for Physicists. CERN 64-13, v. 1, 87 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 января 1973 года.