СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р10 - 7302

Б.Л. Марковски, Хр.Я. Христов, Н.Б. Янева

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИИ ДЕТЕКТОРОВ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P10 - 7302

Б.Л. Марковски, Хр.Я. Христов, Н.Б. Янева

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИИ ДЕТЕКТОРОВ

Марковски Б.Л., Христов Хр.Я., Янева Н.Б. P10 - 7302

Анализ экспериментальных данных с учетом корреляции детекторов

Рассмотрен случай регистрации данных, когда возможность одновременной регистрации частицы несколькими детекторами отлична от нуля. Найден явный вид функции максимального правдоподобия для такой задачи. Приведены также приближенные формулы, соответствующие "богатым" статистикам и небольшим корреляциям.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Marcovski B.L., Christov Chr.J., Yaneva N.B. P10 - 7302

Analysis of Experimental Data Taking into Account Electron Correlations

The case of data registration with nonzero possibility of simultaneous registration of a particle by more than one detectors has been considered. The explicite maximum likelihood function for such a problem has been found. The approximative formulas corresponding to "rich" statistics and small correlations are given.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

В экспериментах, связанных с измерением спектра эффективных масс, энергетического спектра излучения некоторого источника и т.п., часто показания отдельных детекторов не являются статистически независимыми[1]. Это может обусловливаться многими факторами, но чаще всего связано с возможностью регистрации одной частицы несколькими детекторами, т.е. в нескольких каналах одновременно[2]. Ясно, что такая ситуация возникает, когда функция чувствительности детектора, соответствующего данному каналу, не исчезает полностью вне этого канала. Кроме того, в большинстве случаев вид этих функций точно не известен. Проверка гипотезы относительно искомого спектра методом максимального правдоподобия (ММП) (см., например,[3]) требует нахождения точной функции максимального правдоподобия (ФМП), которая в общем случае не будет, как обычно (см., например,[4]), произведением вероятности регистрации в отдельных каналах.

§ I.

Для определенности будем рассматривать следующую задачу. Источник "0" излучает частицы P данного сорта. Пусть $n(E,t)dEdt$ обозначает вероятность излучения частицы P с энергией в интервале (E , $E+dE$), в интервале времени (t , $t+dt$). Будем предполагать, что эта вероятность не зависит от того, какие частицы уже излучились. Это условие можно считать выполненным, если флюктуации центров в источнике, излучающих за время эксперимента $T = t_2 - t_1$, малы по сравнению с числом излучающих центров.

Задана также система I детекторов D_i $(i = 1, 2, \ldots I)$, регистрирующих частицы P с вероятностью

$$W_i \ (E,t) . \tag{I}$$

Естественно считать, что области чувствительности детекторов перекрывают более или менее плотно весь исследуемый интервал переменной E. При этом будем предполагать, что вероятность регистрации частицы одним детектором не меняет вероятности ее регистрации другими.

Пусть за время T производится эксперимент. Найдем вероятность $W(n_i)$ регистрации n_i частиц детекторами $D_i \ (i=1,2,\dots I)$.

Для удобства рассмотрения введем двухкомпонентную переменную $S=(E,t)$ и разобьем плоскость S на элементарные участки $dS_p \ (p=1,2,\dots P)$, которые занумеруем произвольным, но фиксированным образом. Пусть через

$$W(n_i, J, S_j, k_j, i_{jk}) \prod_{j=1}^{J} dS_{p_j} \tag{2}$$

обозначим вероятность того, что источник излучил J частиц, среди которых регистрировались $\{n_i\}$, притом j-ая частица $P_j \ (j=1,2,\dots J)$ находилась в "участке" dS_{p_j} и попала в k_j детекторов $(k_j = 0,1,\dots I)$ с номерами i_{jk} ($j=1,2,\dots J$, $k=1,2,\dots k_j$) (при $k_j=0$ по определению будем считать, что частица не регистрировалась). Тогда искомую вероятность $W(n_i)$ получим суммированием по всем возможным способам реализации (2) с сохранением чисел n_i регистрируемых частиц.

Числа n_i, k_j и i_{jk} не являются независимыми, так как n_i равно числу тех i_{jk}, которые равны i (условие C), но для нас более удобно считать, что эти переменные независимы, причем, если условие C не выполняется, соответствующая вероятность (2) равна нулю.

По общим правилам теории вероятности имеем:

$$\begin{aligned} W(n_i,J,S_j,k_j,i_{jk}) \prod_{j=1}^{J} dS_{p_j} = & \prod_{p=1}^{p_1-1} (1-n(S_p)dS_p)\, n(S_{p_1})dS_{p_1} \prod_{i=1}^{I} v_{1i}(S_{p_1}) \times \\ & \times \prod_{p=p_1+1}^{p_2-1} (1-n(S_p)\,dS_p)\, n(S_{p_2})\,dS_{p_2} \prod_{i=1}^{I} v_{2i}(S_{p_2}) \times \\ & \times \prod_{p=p_{J-1}+1}^{p_J-1} (1-n(S_p)dS_p)\, n(S_{p_J})\,dS_{p_J} \prod_{i=1}^{I} v_{Ji}(S_{p_J}) \prod_{p=p_J+1}^{P} (1-n(S_p)dS_p) , \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$v_{ji} = \begin{cases} W_i(S) & \text{если } i = i_{jk} \ (k=1,2,\dots,k_j) \\ 1 - W_i(S) & \text{если } i \neq i_{jk} \ (k=1,2,\dots,k_j). \end{cases} \tag{4}$$

Для бесконечно малых участков dS_p находим

$$\prod_{p=1}^{p_1-1} (1-n(S_p)dS_p) \dots \prod_{p=p_J+1}^{P} (1-n(S_p)dS_p) = e^{-\sum_{p=1}^{P} n(S_p)dS_p} = e^{-\bar{N}} ; \tag{5}$$

где, по определению,

$$\bar{N} = \iint n(E,t)\, dE\, dt . \tag{6}$$

Следовательно, получаем

$$W(n_i, J, S_{p_j}, k_j, i_{jk}) = e^{-\bar{N}} \prod_{j=1}^{J} \left(n(S_{p_j})\,dS_{p_j} \prod_{i=1}^{I} v_{ji}(S_{p_j})\right) . \tag{7}$$

Теперь дадим несколько определений, позволяющих легче провести суммирование в (7) по всем возможным каналам, так, чтобы в D_i регистрировалось ровно n_i частиц.

I). Набор S из k_j чисел $i_{jk} \ (k=1,2,\dots,k_j)$, задающих номера детекторов, регистрировавших частицу P_j.

2). Последовательность наборов – последовательность из наборов, указывающая, где регистрировалась частица $P_j \ (j=1,2,\dots,J)$.

3). Простое множество последовательностей m – множество всех последовательностей наборов, которые получаются из одной последовательности путем перестановки составляющих ее наборов.

Вводим некоторую переменную a, характеризующую различные наборы S. Ее, например, можно составить из числа элементов k, входящих в рассматриваемый набор, т.е. из числа детекторов, зарегистрировавших частицу, и из индексов его элементов, т.е. из номеров детекторов, в которых она регистрирована, в возрастающем порядке. Очевидно a пробегает только конечное число значений $A=2^I$. Каждое простое множество наборов m задается кратностями ν_a различных между собой наборов, входящих в любую из его последовательностей $(\nu_a = 0, 1, \dots)$. Очевидно,

$$\frac{J!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\nu_3!\dots\nu_A!}$$

дает число последовательностей, участвующих в заданном простом множестве последовательностей.

Просуммируем теперь по всем выборкам участков $dS_{P_j}(j=1,2,\dots,J)$, в которые попали частицы P_j, и по всем последовательностям, соответствующим заданному простому множеству m. Из (7) находим

$$W(\nu) = exp(-\bar{N}) \prod_a^A \frac{1}{\nu_a} N_a^{\nu_a} \tag{8}$$

$$(N_a = \int n(S) \prod_{i=1}^{I} \vartheta_i(S)\, dS \tag{9}$$

и, в соответствии с (4),

$$\vartheta_i(S) = \begin{cases} W_i(S) & \text{если} \quad i \in S_a \\ 1 - W_i(S) & \text{если} \quad i \bar{\in} S_a \end{cases} \tag{I0}$$

Чтобы найти $W(n_i)$, достаточно просуммировать (8) по всем простым множествам, обеспечивающим искомые значения регистрации n_i.

Каждому простому множеству, заданному кратностями ν_a, соответствуют вполне определенные значения регистраций n_i. А именно, если введем целочисленную функцию

$$n_i(a) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad i \in S_a \\ 0 & \text{если} \quad i \bar{\in} S_a \end{cases},$$

то, очевидно,

$$n_i = \sum_a^A \nu_a n_i(a).$$

Обозначим через M_c совокупность тех простых множеств m, которым соответствуют искомые, фигурирующие в (2), значения регистраций n_i. Тогда искомая вероятность будет задаваться через

$$W(n_i) = \sum_{\nu_a}^{M_c} W(\nu_a) = e^{-\bar{N}} \sum_{\nu_a}^{M_c} \prod_a^A \frac{1}{\nu_a!} N_a^{\nu_a} \tag{II}$$

В качестве проверки этого результата можно вычислить полную вероятность

$$\sum_{n_i} W(n_i) = e^{-\bar{N}} \sum_{\nu_a=0}^{\infty} \prod_{a=1}^{A} \frac{1}{\nu_a!} N_a^{\nu_a} = e^{-\bar{N}} \prod_a^A \sum_{\nu_a=0}^{\infty} \frac{1}{\nu_a!} N_a^{\nu_a} =$$

$$= e^{-\bar{N}} \prod_a^A e^{N_a} = e^{-\bar{N} + \sum_a^A N_a}.$$

Из (6), (9) и (I0) находим

$$\sum_a^A N_a = \bar{N} \tag{I2}$$

и, следовательно, полная вероятность равна I, как и должно быть.

Накладывая некоторые ограничения на N_a, суммирование по совокупности M_c можно провести в явном виде.

Самый простой случай получим, если предположить, что каждая частица регистрировалась не более чем одним детектором. Для этого необходимо и достаточно

$$W_i(s)\, W_j(s) \approx 0$$

для $i \neq j$ и для всех значений s, при которых $n(s) \neq 0$. (Достаточность очевидна, а необходимость следует из неотрицательности W_i и n). Имеем только два типа отличных от нуля величин N_a :

$$N = \int n(s) \prod_{i=1}^{I} (1 - W_i(s))\, ds \approx \int n(s) (1 - \sum_{i=1}^{I} W_i(s))\, ds \,, \qquad (I4)$$

$$N_i = \int n(s)\, W_i(s) \prod_{j \neq i}^{I} (1 - W_j(s))\, ds \approx \int n(s)\, W_i(s)\, ds \,. \qquad (I5)$$

Тогда кратности ν_i будут совпадать с регистрациями n_i и из (8) получаем распределение Пуассона:

$$W(n_i) = e^{-\bar{N} + N} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{1}{n_i!} N_i^{n_i} \right). \qquad (I6)$$

(Ввиду (I2) полная вероятность равна I).

При больших N_i, подставляя $n_i = N_i + \Delta n_i$ и имея в виду (I2), с точностью до членов второго порядка по $\frac{\Delta n_i}{N_i}$, получим нормальное распределение Гаусса

$$W(n_i) \approx \frac{1}{(2\pi)^{I/2}} e^{-\bar{N} + N} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{e^{N_i + \Delta n_i}}{(N_i + \Delta n_i)^{N_i + \Delta n_i + 1/2}} N_i^{N_i + \Delta n_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{I/2} \prod\limits_{1}^{I} (N_i^{1/2})} e^{-\bar{N} + N + \sum N_i} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{e^{\Delta n_i}}{\left(1 + \frac{\Delta n_i}{N_i}\right)^{N_i + \Delta n_i + 1/2}} \right) \qquad (I7)$$

$$\approx \frac{1}{(2\pi)^{I/2} \prod\limits_{1}^{I} (N_i^{1/2})}\, e^{-\sum\limits_{1}^{I} \frac{\Delta n_i^2}{2 N_i}}.$$

Рассмотрим теперь следующий, более общий и более интересный случай. Примем, что если детекторы D_i пронумерованы по порядку возрастания переменной E, их функции чувствительности таковы, что практически возможна регистрация одной частицы либо только одним детектором, либо двумя соседними. Легко сообразить, что тогда отличными от нуля будут следующие N_a

$$N = \int n(s) \prod_{i=1}^{I} (1 - W_i(s))\, ds \approx \int n(s) \left(1 - \sum_{i=1}^{I} W_i(s) + \sum_{i=1}^{I-1} W_i(s) W_{i+1}(s)\right) ds$$

$$N_i = \int n(s)\, W_i(s) \prod_{j \neq 1}^{I} (1 - W_j(s))\, ds \approx \int n(s)\, W_i(s) \left(1 - W_{i-1}(s) - W_{i+1}(s)\right) ds \equiv M_i - N'_{i-1} - N'_i$$

$$M_i = \int n(s)\, W_i(s)\, ds \qquad (I8)$$

$$N'_i = \int n(s)\, W_i(s)\, W_{i+1}(s) \prod_{j \neq i, i+1}^{I} (1 - W_j(s))\, ds \approx \int n(s) W_i(s) W_{i+1}(s)\, ds;$$

причем (I2) сводится к

$$\bar{N} = N + \sum_{i=1}^{I} N_i + \sum_{i=1}^{I-1} N'_i \,. \qquad (I9)$$

Вместо (I3) будем иметь

$$W_i(s)\, W_j(s) = 0 \,, \qquad \text{для} \quad |i - j| > 1 \quad (i, j = 1, \dots, I) \qquad (20)$$

Тогда (II) приводит к

$$W(\nu, \nu_i, \mu_i) = \sum_{\nu, \nu_i}^{M_c} e^{-\bar{N}} \frac{1}{\nu!} N^{\nu} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{1}{\nu_i!} N_i^{\nu_i} \right) \prod_{i=1}^{I-1} \left(\frac{1}{\mu_i!} N_i'^{\mu_i} \right), \qquad (2I)$$

где ν равно числу частиц незарегистрированных, ν_i – регистрированных только детектором D_i и μ_i – только детекторами D_i и D_{i+1}. Для того чтобы получить теперь искомую вероятность $W(n_i)$, воспользуемся условием C, которое здесь сводится к

$$n_i = \nu_i + \mu_i + \mu_{i-1}.$$

Суммирование по ν производится немедленно, и, выражая ν через μ_i, находим

$$W(n_i) = \sum_{(\mu_i)=0}^{n_i-\mu_{i-1}-\mu_i \geq 0} e^{-\bar{N}+N} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{N_i^{\,n_i-\mu_{i-1}-\mu_i}}{(n_i-\mu_{i-1}-\mu_i)!} \right) \prod_{i=1}^{I-1} \frac{N_i'^{\,\mu_i}}{\mu_i!}$$

$$(\mu_0 = \mu_I = 0)$$

Дальше наша цель – совершить суммирование по μ_i и привести результат к одномерному гауссовскому распределению, предполагая, что все числа N, N_i и N_i' большие, точнее, что они растут, причем отношения N_i'/N_i, N_i'/N_{i+1} остаются конечными. Такой случай можно реализовать, например, если $n(s)$ и $W_i(s)$ от t не зависят, а время эксперимента $T = t_2 - t_1$ растет. Имея в виду, что самые существенные члены в $W(n_i)$ получим при $\mu_i \approx N_i'$ и $n_i - \mu_i - \mu_{i-1} \approx N_i$, применяем формулу Стирлинга ко всем факториалам и получаем

$$W(n_i) \approx \frac{e^{-\bar{N}+N}}{(2\pi)^{I-1/2}} \sum_{\mu_i} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{N_i^{\,n_i-\mu_i'}\, e^{n_i-\mu_i'}}{n_i^{\,n_i-\mu_i'+1/2} \left(1-\frac{\mu_i'}{n_i}\right)^{n_i-\mu_i'+1/2}} \right) \prod_{1}^{I-1} \frac{e^{\mu_i} N_i'^{\,\mu_i}}{\mu_i^{\,\mu_i+1/2}} .$$

$$(\mu_i' = \mu_{i-1} + \mu_i \;;\quad i = 1, 2, \ldots, I)$$

Подставляем еще

$$\mu_i = N_i' + \lambda_i' \;;\quad \lambda_{i-1}' + \lambda_i' = \varkappa_i' \;;\quad N_{i-1}' + N_i' = M_i' \;;\quad n_i = M_i' + m_i$$

и с точностью до членов порядка $\lambda_i'^2/N_i'$ находим

$$W(n_i) \approx \frac{e^{-\bar{N}+N+\sum_{i=1}^{I-1} N_i'}}{(2\pi)^{I-1/2} \prod_{1}^{I-1} (N_i'^{\,1/2})} \prod_{i=1}^{I} \frac{N_i^{\,m_i} e^{m_i}}{m_i^{\,m_i+1/2}} R, \tag{22}$$

где $$R = \sum_{\lambda_i'=-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{m_i}{N_i}\right)^{\varkappa_i'} e^{-\sum_{i=1}^{I} \frac{\varkappa_i'^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\lambda_i'^2}{2N_i'}} = \sum_{\lambda_i'} e^{-S(\lambda_i')}$$

$$S(\lambda_i') = \sum_{i=1}^{I-1} \frac{\lambda_i'^2}{2N_i'} + \sum_{i=1}^{I} \frac{\varkappa_i'^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^{I} \varkappa_i' \ln \frac{m_i}{N_i}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{I} \varkappa_i' \ln \frac{m_i}{N_i} = \sum_{1}^{I-1} \lambda_i' \tau_i, \tag{23}$$

где

$$\tau_i = \ln \frac{m_i\, m_{i+1}}{N_i\, N_{i+1}} \tag{24}$$

и что

$$\sum_{i=1}^{I-1} \frac{\lambda_i'^2}{N_i'} + \sum_{i=1}^{I} \frac{\varkappa_i'^2}{m_i} = \sum_{i,j=1}^{I-1} \lambda_i' g_{ij} \lambda_j',$$

где

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N_i'} + \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} & \text{для } i = j, \\ \frac{1}{m_i} & \text{для } i = j+1, \\ \frac{1}{m_j} & \text{для } j = i+1, \\ 0 & \text{для } |i-j| > 1 . \end{cases} \tag{25}$$

Подставляем в (22) и суммируем по λ_i', заменив сумму интегралом. Пользуясь формулой

$$\int e^{-\frac{1}{2} x \cdot \alpha \cdot x + ax} (dx) = \frac{(2\pi)^n}{(\det \alpha)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2} a \alpha^{-1} a}, \tag{26}$$

где a и x – n-мерные векторы, а α – n-мерный тензор, получим:

$$W(n_i) = \frac{e^{-\bar{N}+N+\sum_{i=1}^{I-1} N_i'}}{(2\pi)^{I/2} \sqrt{\det g}\, \prod_{i=1}^{I-1} N_i'^{\frac{1}{2}}}\, e^{\frac{1}{2}\tau g^{-1} \tau} \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{N_i^{\,m_i} e^{m_i}}{m_i^{\,m_i+1/2}} \right), \tag{27}$$

где τ – вектор, а g – тензор размерностью $I-1$ с компонентами (24) и (25) соответственно.

Чтобы свести это распределение к гауссовскому, положим еще

$$n_i = N_i + N'_{i-1} + N'_i + \Delta n_i \quad ; \quad (N'_0 = N'_I = 0). \tag{28}$$

Из (27) видно, что функция $W(n_i)$ существенно отлична от нуля при $\Delta n_i \ll N_i + N'_{i-1} + N'_i$ и тогда (24) и (25) сводятся к

$$\tau_i = \frac{\Delta n_i}{N_i} + \frac{\Delta n_{i+1}}{N_{i+1}}, \tag{29}$$

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N'_i} + \frac{1}{N_i} + \frac{1}{N_{i+1}} & \text{если} \quad i = j, \\ \frac{1}{N_i} & \text{если} \quad i = j+1, \\ \frac{1}{N_j} & \text{если} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{если} \quad |i-j| > 1. \end{cases} \tag{30}$$

Учитывая (28), находим

$$\prod_{i=1}^{I} \frac{N_i^{m_i} e^{m_i}}{m_i^{m_i+1/2}} = \prod_{i=1}^{I} \frac{N_i^{N_i+\Delta n_i} e^{N_i+\Delta n_i}}{(N_i+\Delta n_i)^{N_i+\Delta N_i+\frac{1}{2}}} \approx \frac{e^{\sum_1^I N_i}}{\prod_{i=1}^{I}(N_i^{1/2})} e^{-\sum_1^I \frac{\Delta n_i^2}{2N_i}},$$

и, следовательно,

$$W(n_i) = \frac{1}{(2\pi)^{I/2}\sqrt{\det g}\,\prod_{i=1}^{I}(N_i^{1/2})\prod_{i=1}^{I-1}(N_i'^{1/2})}\, e^{-\sum_1^I \frac{\Delta n_i^2}{2N_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{I} \Delta n_i \sigma_{ij} \Delta n_j}, \tag{31}$$

где

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N_i N_j}\left(g^{-1}_{i-1,j-1} + g^{-1}_{i-1,j} + g^{-1}_{i,j-1} + g^{-1}_{i,j}\right) \tag{32}$$

($g^{-1}_{ij} = 0$ если некоторый из индексов равен нулю или I).

Выражение (31) можно записать еще в форме

$$W(n_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}\Delta n . \tau . \Delta n\right] \Big/ \left[(2\pi)^{I/2}\sqrt{\det g}\prod_{i=1}^{I}(N_i^{1/2})\prod_{i=1}^{I-1}(N_i'^{1/2})\right], \tag{33}$$

где Δn – одномерный вектор с компонентами Δn_i, а элементы тензора τ задаются через

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N_i} - \sigma_{ii} & \text{для} \quad i = j, \\ -\sigma_{ij} & \text{для} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{34}$$

Если предположить, что отношения N'_i/N_i и N'_i/N_{i+1} малы, ограничиваясь точностью до членов второй степени, получим

$$\det g = \left(1 + \sum_{i=1}^{I} \frac{N'_{i-1} + N'_i}{N_i} - \sum_{i=2}^{I-1} \frac{N'_{i-1} N'_i}{N_i^2}\right) \prod_{i=1}^{I-1} \frac{1}{N'_i},$$

$$g^{-1}_{ij} = \begin{cases} N'_i\left(1 - \frac{N'_i}{N_i} - \frac{N'_i}{N_{i+1}}\right) & \text{если} \quad i = j, \\ -N'_{i-1} N'_i / N_i & \text{если} \quad j = i-1, \\ -N'_{j-1} N'_j / N_j & \text{если} \quad i = j-1, \\ 0 & \text{если} \quad |i-j| > 1. \end{cases} \tag{35}$$

Так что, подставляя (35) в (32) и (34), мы можем найти σ и τ, а следовательно, и $W(n_i)$, согласно (31), или, если предпочтем, то согласно (33).

Еще проще становится распределение (33), если ограничиться членами первого порядка по N'_i/N_i и N'_i/N_{i+1}. Тогда

$$\det g = \prod_{i=1}^{I-1} \frac{1}{(N'_i)} \left(1 - \sum_{i=1}^{I} \frac{N'_{i-1} + N'_i}{N_i}\right), \tag{36}$$

$$g^{-1}_{ij} = \begin{cases} N'_i & \text{для} \quad i = j, \\ 0 & \text{для} \quad i \neq j. \end{cases}$$

$$W(n_i) = \frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{I}\left(1-\frac{N'_{i-1}+N'_i}{N_i}\right)\frac{\Delta n_i^2}{2N_i}+\sum\limits_{i=1}^{I-1}\frac{N'_i\Delta n_i\Delta n_{i+1}}{N_i N_{i+1}}}}{(2\pi)^{I/2}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{I}\frac{N'_{i-1}+N'_i}{2N_i}\right)\prod\limits_{i=1}^{I}N_i^{1/2}}. \qquad (37)$$

Для контроля сделанных приближений можно проверить, что нормировка распределений вероятности (32), (33), а также и тех, которые получаются подстановками (35) и (36), правильны.

§ 2.

До сих пор мы решали прямую задачу – если заданы спектр $n(s)$ и чувствительности $W_i(s)$, найти $W(n_i)$. Метод максимального правдоподобия дает ответ на обратную задачу – восстановить $n(s)$ и $W_i(s)$ по заданным экспериментальным значениям n_i.

Будем считать, что класс функций $n(s,\alpha_q)$ и $W_i(s,\alpha_q)$; $(q=1,2,\ldots,Q)$, в котором ищем функции $n(s)$ и $W_i(s)$, задан. Требуется найти оптимальные значения α_q^* параметров α_q, при которых вероятность получения экспериментальных значений n_i будет максимальной.

Рассмотрим два примера, имеющие отношение к анализу данных из области ядерной спектроскопии и ядерных реакций. В обоих примерах $n(s)$ и $W_i(s)$ от t не зависят и $n(s)$ представляет конечную комбинацию брайт-вигнеровских кривых:

$$n(E) = \sum_{p=1}^{P}\frac{D_p}{(E-A_p)^2+B_p^2}, \quad (B_p>0). \qquad (38)$$

В первом примере каждый детектор чувствителен в определенном интервале и там его чувствительность постоянна:

$$W_i(E) = d_i\,\theta(E-a_i)\,\theta(b_i-E),$$
$$(0<d_i\le 1;\quad a_i<b_i;\quad a_i>a_{i-1};\quad b_i>b_{i-1}). \qquad (39)$$

Тогда, согласно (I8), находим

$$M_i = T d_i\int_{a_i}^{b_i}n(s)\,ds, \qquad N'_i = T d_i d_{i+1}\int_{a_{i+1}}^{b_i}n(s)\,ds,$$

причем интегралы типа $\int_{a_{i+1}}^{b_i}n(s)\,ds$ равны нулю, если $b_i<a_{i+1}$.
Подставляя (38), находим

$$M_i = T d_i\sum_{p=1}^{P}\left(F_p(b_i)-F_p(a_i)\right), \qquad (40)$$

$$N'_i = T d_i d_{i+1}\sum_{p=1}^{P}\left[F_p(b_i)-F_p(a_{i+1})\right], \qquad (41)$$

при этом

$$F_p(x) = \frac{D_p}{B_p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-A_p}{B_p}, \qquad (42)$$

а разности типа $F_p(b_i)-F_p(a_{i+1})$ равны нулю, если $b_i>a_{i+1}$.
С учетом (I8), (I9) получим

$$N_i = T\left[d_i\sum_{p=1}^{P}\left(\frac{D_p}{B_p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_i-A_p}{B_p}-\frac{D_p}{B_p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_i-A_p}{B_p}\right)-\frac{N'_{i-1}}{T}-\frac{N'_i}{T}\right] \qquad (43)$$

$$N'_i = T d_i d_{i+1}\sum_{p=1}^{P}\left(\frac{D_p}{B_p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b_i-A_p}{B_p}-\frac{D_p}{B_p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_{i+1}-A_p}{B_p}\right). \qquad (44)$$

Во втором примере $n(s)$ задается (38), которую для удобства перепишем в следующем виде

$$n(E) = \sum_{p=1}^{P}\frac{D_p}{(E-C_p)(E-\bar{C}_p)}.$$

Функции чувствительности будем предполагать в виде

$$W_i(E)=\frac{d_i}{(E-c_i)^{n+1}(E-\bar{c}_i)^{n+1}}=\frac{d_i}{[(E-a_i)^2+b_i^2]^{n+1}}. \qquad (45)$$

Отметим, что с возрастанием n вероятность одновременной регистрации одной частицы в нескольких более удаленных детекторах падает и, что если n растет неограниченно, при фиксированных значениях положения a_i и высоты $g_i=d_i/b_i^{2n+2}$ максимума, а также площади

$$S_i=2\pi(2n)!\,d_i/((n_i!)^2(2b)^{2n+1}$$

кривая $W_i(E)$ (45) будет стремиться к гауссовской:

$$W_i(E)=g_i\exp[-\pi g_i^2(E-a_i)^2/S_i^2].$$

Ввиду (I8) и (45) находим

$$M_i=\sum_1^P M_{iP}, \qquad N_i'=\sum_{p=1}^P N_{iP}', \qquad (46)$$

где (опуская для краткости индексы i и P и обозначая штрихом величины с индексом i +I)

$$M=\int n(s)\,W(s)\,ds=dDT\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{(E-C)(E-\bar{C})(E-c)^{n+1}(E-\bar{c})^{n+1}},$$

$$N=\int n(s)\,W(s)\,W'(s)\,ds=$$

$$=dd'DT\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{(E-C)(E-\bar{C})[E-c)^{n+1}(E-\bar{c})^{n+1}(E-c')^{n+1}(E-\bar{c}')^{n+1}}.$$

Эти интегралы вычисляются с помощью теоремы вычетов. Для полюсов C и C' кратностью $n+1$ вычисление вычетов сводится к нахождению n -ой производной подинтегрального выражения. Эту производную можно найти путем применения формулы Лейбница, а

одну из получившихся сумм записать в замкнутом виде. Тогда получаем

$$M=2\pi dDT\,(i\,\mathrm{Res}\,C+i\,\mathrm{Res}\,c),$$

$$i\,\mathrm{Res}\,C=\frac{1}{2B[(C-c)(C-\bar{c})]^{n+1}} \qquad (47)$$

$$i\,\mathrm{Res}\,c=1/(2Bn!)\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!\,i^{n-m}}{m!\,(2b)^{n+m+1}}\left[\frac{1}{(c-C)^{n-m+1}}-\frac{1}{(c-\bar{C})^{n-m+1}}\right],$$

$$N'=2\pi dd'DT\,(i\,\mathrm{Res}\,C+i\,\mathrm{Res}\,c+i\,\mathrm{Res}\,c'),$$

$$i\,\mathrm{Res}\,C=\frac{1}{2B[(C-c)(C-\bar{c})(C-c')(C-\bar{c}')]^{n+1}}, \qquad (48)$$

$$i\,\mathrm{Res}\,c=\frac{1}{2B(n!)^3}\sum_{k,l,m=0}^{k+l+m\le n}\cdot\frac{(n+k)!\,(n+l)!\,(n+m)!}{k!\,l!\,m!}\times$$

$$\times\frac{i^{n-m}}{(c-c')^{n+k+1}(c-\bar{c}')^{n+l+1}\,(2b)^{n+m+1}}\left[\frac{1}{(c-C)^{n-k-l-m+1}}-\frac{1}{(c-\bar{C})^{n-k-l-m+1}}\right]$$

$$i\,\mathrm{Res}\,c'=\frac{1}{2B(n!)^3}\sum_{k,l,m=0}^{k+l+m\le n}\frac{(n+k)!\,(n+l)!\,(n+m)!}{k!\,l!\,m!}\times$$

$$\frac{i^{n-m}}{(c'-c)^{n+k+1}(c'-\bar{c})^{n+l+1}(2b)^{n+m+1}}\left[\frac{1}{(c'-C)^{n-k-l-m+1}}-\frac{1}{(c'-\bar{C})^{n-k-l-m+1}}\right].$$

В обоих примерах роль параметров d_q играют $A_p, B_p, D_p, a_i, b_i, d_i$; $(Q=3P+3I)$. Если число детекторов I большое, число параметров становится большим, и достоверность результата падает. Поэтому в таких случаях целесообразно считать, что a_i, b_i, c_i, d_i зависят полиномиально от i:

$$a_i=\sum_{k=0}^{K}\alpha_k i^k,\quad b_i=\sum_{k=0}^{K}\beta_k i^k,\quad c_i=\sum_{k=0}^{K}\gamma_k i^k,\quad d_i=\sum_{k=0}^{K'}\delta_k i^k,$$

где K и K' - невысокие степени (например, K =I, K' =0).

Теперь параметрами α_q будут $A_p, B_p, D_p, \alpha_k, \beta_k, \xi$ или $C_p, D_p, \gamma_k, \delta_k$; $(Q = 3P + 2K + K' + 3)$, число которых не зависит от I.

Чтобы определить параметры α_q, следуя ММП, мы должны, прежде всего, выразить величины N_i и N_i' в (31) или проще – в (37) через параметры α_q. Для этого можно использовать (40) и (41), или (46), (47) и (48), или другие формулы того же типа. Получаем функцию $W(n_i, \alpha_q)$. Образуем ФМП:

$$W^*(\alpha_q) = \frac{W_0(\alpha_q)\, W(\alpha_q)}{\int W_0(\alpha_q)\, W(\alpha_q)\, (d\alpha_q)}, \tag{49}$$

где $W_0(\alpha_q)$ – функция априорного распределения параметров α_q. (В большинстве практических задач она несущественна и ее можно считать постоянной. Приравнивая нулю логарифмические производные от (49), получим искомые уравнения для оптимальных значений параметров α_q (Знаменатель в (49) при этом несущественен).

Если имеем серию из n опытов, $W(\alpha_q)$ в (48) заменяется произведением функций, получаемых из $W(n_i, \alpha_q)$ вводом соответствующих значений n_i.

Оценку правильности выбора для подстановки функций $n(s)$ и $W_i(s)$ можно получить, исследуя рост дисперсии распределения $W^*(\alpha_q)$ (49), когда число опытов растет.

Решение этой задачи найдет практическое применение для расчета на ЭВМ конкретных примеров из ядерной спектроскопии и физики ядерных реакций.

Авторы выражают свою благодарность Е.П.Жидкову за внимание к работе.

Литература:

1. В.И.Гольданский, А.В.Куценко, М.И.Подгорецкий. Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц. М., Физматгиз, 1959, гл.IV, §I.
2. В.И.Калашников, М.С.Козодаев. Детекторы элементарных частиц, М., "Наука", 1966, гл.IV, §9.
3. H.Cramer, Mathematical methods of statistics, (Princeton Univ. Press. 1946).
4. Н.П.Клепиков, С.Н.Соколов. Анализ и планирование эксперимента методом максимального правдоподобия. "Наука", М. 1964, гл.I и II.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июля 1973 года.