

6390

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



P10 - 6390

Л.М. Сороко, Т.А. Стриж

АЛГОРИТМ ОБРАТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ
В МАТЕМАТИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1972

P10 - 6390

Л.М. Сороко, Т.А. Стриж

АЛГОРИТМ ОБРАТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ
В МАТЕМАТИКЕ

В математике имеется класс некорректно поставленных задач, связанных с восстановлением входного воздействия по результатам измерений на выходе линейных, инвариантных во времени систем. Решение этих задач становится возможным после регуляризации, сводящейся, например, к введению дополнительных условий. Между тем успешные эксперименты по улучшению качества изображений с помощью обратного голографического фильтра /1/, а также собственный опыт авторов по обратной фильтрации в спектроскопии показывают, что разработанный математиками класс некорректно поставленных задач по какой-то причине не встречается в этих экспериментах. В данном сообщении дается формулировка достаточного условия, при выполнении которого некорректно поставленные задачи действительно не могут возникнуть в оптике и спектроскопии. Показано, что эти условия исследователь-экспериментатор автоматически реализует благодаря стремлению получить в ходе эксперимента хотя бы небольшую избыточность получаемых данных.

Сначала формулируется задача обратной фильтрации /9/ и метод регуляризации А.Н. Тихонова /2-3/. Затем излагается фурье-алгоритм реализации обратной фильтрации. Отмечается, что кривая разрешающей способности прибора и уровень шумов ограничивают полное число независимых параметров, которые могут быть устойчиво определены без каких-либо дополнительных условий. Задача восстановления спектра формулируется в терминах энергетических частот. Действие алгоритма иллюстрируется примером. Далее находится достаточное условие корректной постановки

задачи. Отличительной чертой разработанного прямого алгоритма восстановления спектра является предельное быстродействие без потери независимых компонент информации о спектре и без расширения коридора, внутри которого располагается генеральная средняя кривая.

§ 2

Задача восстановления спектра по результатам измерений, полученных с помощью спектрального прибора с известными характеристиками, относится к классу так называемых некорректно поставленных обратных задач математической физики. Смысл термина "некорректный" заключается в том, что самые небольшие изменения в выходном сигнале приводят к неограниченно большим вариациям во входном сигнале /4/. Эта трудность является естественной, если учесть, что речь идет об обращении причинно-следственной связи, т.е. об отыскании неизвестных причин по известным следствиям. А.Н. Тихонов разработал методы регуляризации решения некорректно поставленных задач /2,3,5/. Согласно одному из этих методов вводят некоторое семейство корректно поставленных задач, зависящих от параметра регуляризации α . Последний обладает тем свойством, что при $\alpha \rightarrow 0$ и при одновременном стремлении к нулю погрешностей измерений решение корректной задачи стремится к решению исходной некорректной задачи. Другой метод решения некорректных задач в терминах математической статистики изложен в /6/.

Постановка задачи, принятая в данном сообщении, скорее детерминистская, чем статистическая, хотя структура шумов характеризуется моделью аддитивного квазibelого шума. Если принять во внимание дискретный характер информации, вводимой в ЭВМ, и использовать последние достижения теории информации /10/, то задачу обратной фильтрации удастся сформулировать в терминах конечного числа независимых степеней свободы информации, содержащейся в результатах опыта. После этого сама задача обратной фильтрации становится алгебраической, и в этом случае достаточно выполнить два условия: число неизвестных должно быть не больше числа введенных параметров, а детерминант алгебраической системы нигде не должен обращаться в нуль.

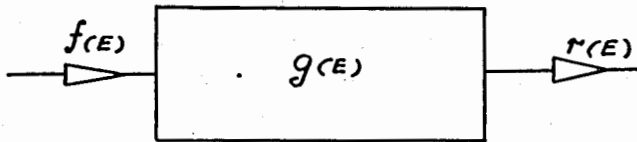


Рис. 1. Схема линейной системы. $f(E)$ - входной сигнал, $g(E)$ - аппаратная функция системы, $r(E)$ - отклик системы на входной сигнал $f(E)$, $r(E) = f(E) \otimes g(E)$.

§ 3

Рассмотрим линейную систему (рис. 1), свойства которой не меняются во времени. Отклик такой системы $r(E)$ на входной сигнал $f(E)$ определяется как самим входным сигналом, так и свойствами системы, которые описываются аппаратной функцией $g(E)$. Соотношение между $f(E)$, $g(E)$ и $r(E)$ выражается интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода с разностным ядром :

$$r(E) = \int f(E') g(E - E') dE' . \quad (1)$$

В технике связи и теории информации это уравнение называется уравнением свертки /11/ ,

$$r(E) = f(E) \otimes g(E) . \quad (2)$$

Сигнал в виде аппаратной функции $g(E)$ появляется на выходе спектрального прибора, если спектр состоит из одиночной бесконечно узкой линии с энергией

$$f_0(E) = \delta(E - E_0) . \quad (3)$$

Между тем даже для такого простого спектра решение уравнения (1) является некорректным. А именно, из-за сглаживающего действия аппаратной функции наличие даже малых ошибок в функции $r(E)$ может

привести к неверному решению. Именно для решения таким образом поставленных задач были разработаны методы регуляризации ^{12-3/}. Некорректно поставленную задачу рассматривают как эффективно недоопределенную. Затем эту задачу доопределяют. Здесь используют различные методы, каждый из которых связан фактически с введением в условие задачи некоторой априорной информации об искомом решении. Различная форма этой априорной информации приводит к различным методам регуляризации. Облегчение решения обратной задачи в спектроскопии, оптике и голографии достигается благодаря двум фактам: а) как правило, известен характер шумов, б) сама система является пассивной, т.е. коэффициент усиления при любых энергетических частотах меньше единицы. Оба эти фактора позволяют сформулировать задачу в рамках конечного числа независимых информационных степеней свободы.

§ 4

Сначала напомним сущность алгоритма Фурье решения обратной задачи в спектроскопии при следующих дополнительных условиях. Во-первых, выбрана модель квазизелого аддитивного шума. Во-вторых, предполагается, что в искомом спектре содержатся преимущественно низкие энергетические частоты и лишь небольшая часть его попадает в область высоких энергетических частот. Наконец, полная дисперсия измеренной кривой разрешающей способности спектрометра меньше, чем полная дисперсия измеренного спектра.

Экспериментально измеренное спектральное распределение, кривая разрешающей способности и искомый спектр связаны интегральным соотношением (1). Для того чтобы решить это уравнение в идеальном случае отсутствия шумов и помех, разложим функции $r(E)$, $g(E)$ и $f(E)$ по системе ортогональных функций ^{19/}. Тогда уравнение свертки (2) в представлении энергетических частот запишется в виде произведения

$$R(\omega) = F(\omega) G(\omega), \quad (4)$$

где $R(\omega)$, $F(\omega)$ и $G(\omega)$ - фурье-образы функций $r(E)$, $f(E)$ и $g(E)$ соответственно. Например,

$$R(\omega) = \int r(E) e^{-i\omega E} dE, \quad (5)$$

где ω — "энергетическая частота". Теперь задача нахождения $F(\omega)$ сводится к операции деления:

$$F(\omega) = \frac{R(\omega)}{G(\omega)}. \quad (6)$$

Искомый спектр находится путем обратного преобразования Фурье:

$$f(E) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{i\omega E} d\omega. \quad (7)$$

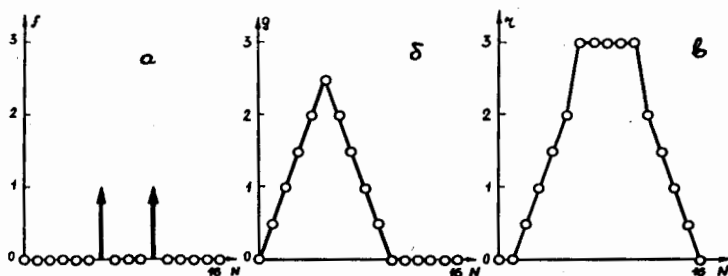


Рис. 2. Пример сглаживания сигнала в спектрометре: а) — входной сигнал $f(N)$, б) — аппаратная функция системы $g(N)$, в) — отклик системы — функция $r(N)$.

На рис. 2 и 3 приведен пример, иллюстрирующий прямой процесс сглаживания в спектрометре и обратный процесс восстановления спектра. Исходный спектр состоит из двух бесконечно узких спектральных линий (рис. 2а), а кривая разрешающей способности спектрометра имеет вид треугольного импульса (рис. 2б). Результаты экспериментальных измерений на таком спектрометре приведены на рис. 2в. По условию, шумы в этом примере отсутствуют. На рис. 3 представлены действительная и мнимая части частного (в) от деления фурье-образа $R(\omega)$ на фурье-образ $G(\omega)$, а также результаты обратного преобразования Фурье. Здесь достигается полное и точное восстановление искомого спектра.

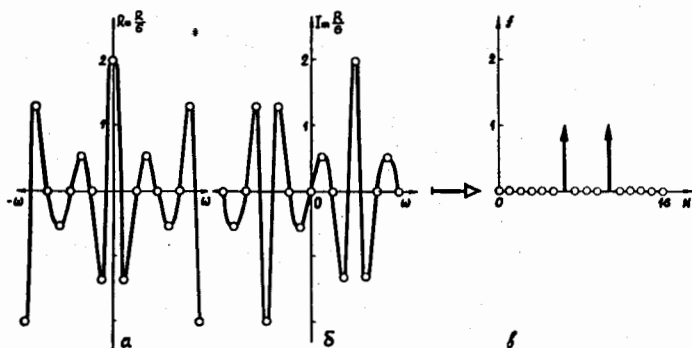


Рис. 3. Фурье-образ отношения R/G : а) - действительная, б) - мнимая компоненты фурье-образа; в) - сигнал f , восстановленный с помощью обратного преобразования Фурье по отношению R/G .

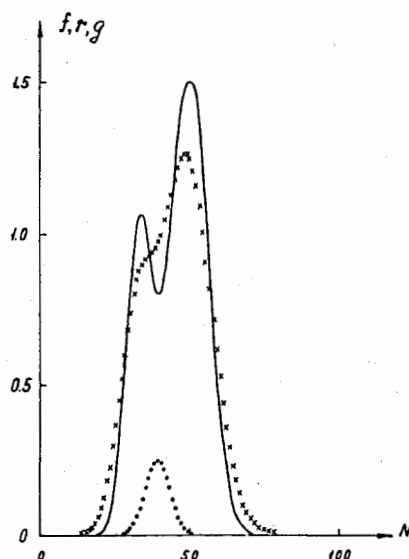


Рис. 4. Сглаживание дублетного спектра. Сплошная кривая - истинный спектр в виде дублета, состоящего из двух гауссианов, точечная кривая - приборная функция в виде синглетного гаусса. Кривая, обозначенная крестиками, - результат свертки истинного спектра с аппаратной функцией.

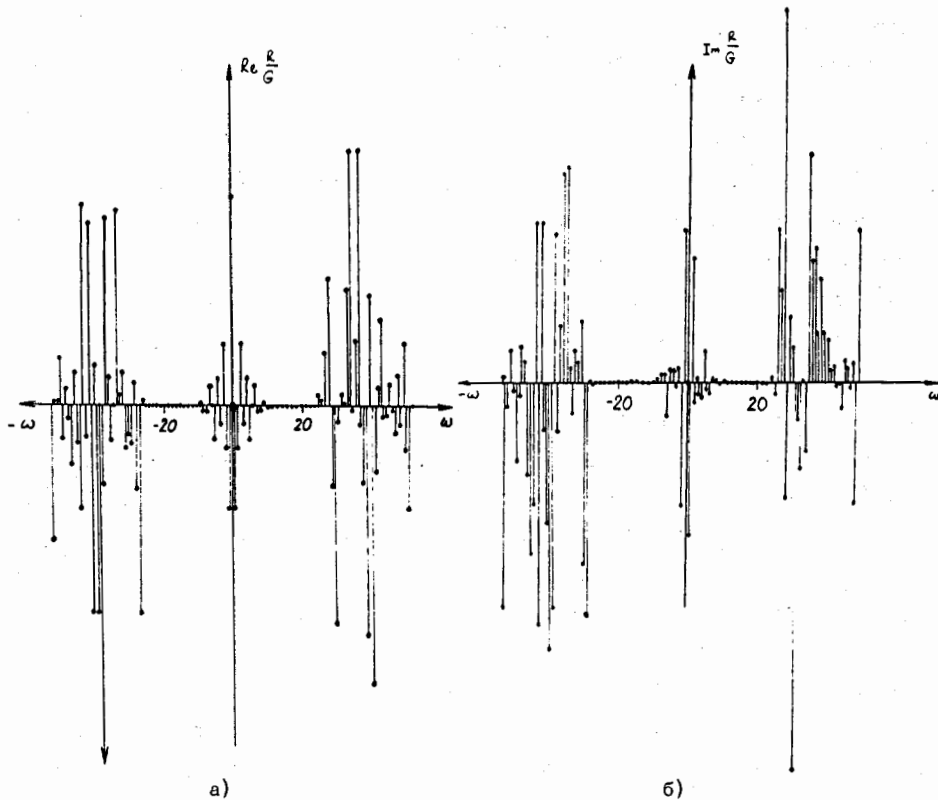


Рис. 5. Действительная а) и мнимая б) части соотношения $R(\omega)/G(\omega)$, где $R(\omega)$ и $G(\omega)$ — фурье-образы $r(E)$ и $g(E)$ (рис. 4) соответственно. Область частот $|\omega| > 24$ является неинформационной.

Теперь более сложный случай. На рис. 4 дан исходный спектр. На рис. 5а и 5б приведены действительная и мнимая части функции $R(\omega)/G(\omega)$. В области высоких энергетических частот ($|\omega| > 24$) после "спокойной" области появляется случайный частокол, являющийся "шумом" неопределенности деления типа нуль на нуль. В области высоких энергетических частот значения $R(\omega)$ и $G(\omega)$ весьма малы. О том, что этот частокол является "шумом" неопределенности деления типа нуль на нуль, свидетельствует то, что здесь не наблюдается естественных свойств симметрий, которыми обладает фурье-образ действительнзначной функции. Напомним, что действительная часть фурье-образа действительнзначной функции симметрична относительно нулевой энергетической частоты, а мнимая часть

фурье-образа этой функции - антисимметрична относительно той же точки. Из рис. 5 видно, что область высоких энергетических частот никакими свойствами симметрии не обладает.

Второе существенное условие, которое использовано в разработанном алгоритме, - это условие пассивности системы. Поскольку предметом наблюдения является энергетический спектр системы, характеризующейся конечным временем жизни, то фурье-образ спектра как функция энергетической частоты, или времени, имеет огибающую, которая описывается либо экспонентой с постоянным декрементом распада, либо, в случае когерентного взаимодействия пересекающихся уровней, осцилляторной экспонентой с биениями. Как правило ^{/7/}, фурье-образ спектра в зависимости от энергетических частот обладает характерной экспонентой распада во времени. В этом состоит свойство пассивности спектра. Что касается спектрометра как прибора наблюдения, то он также является пассивной системой. Отсюда следует вывод, что реальные генерации в области высоких энергетических частот, или, что то же, при больших значениях задержек во времени относительно начала распада, возникнуть не могут. Иначе говоря, область высоких энергетических частот, следующая за "спокойной" областью, не может содержать никакой реальной информации об изучаемом спектре. Всю область энергетических частот разбиваем на две области: информационную, где содержится полезная информация о спектре, и безыформационную, где полезной информации нет ^{/7/}.

В данном примере (рис. 5) информационная область простирается не дальше, чем $|\omega|_{\text{пред.}} = 24$. Если ограничиться компонентами фурье-образа до $|\omega| \leq 24$ вместо $|\omega_0| = 64$, то оказывается, что исходная функция $f(E)$ восстанавливается по этому усеченному массиву энергетических частот с относительной точностью около 10^{-4} .

§ 5

Однако в реальном эксперименте присутствуют ошибки и помехи, которые накладываются на полезный сигнал. Чтобы учесть эффекты ошибок и помех, объединяемых общим термином "шумы", была выбрана модель квазизелого аддитивного шума. Это означает, что фурье-образ шумов за-

полняет все энергетические частоты и очень медленно спадает в область высоких энергетических частот. Это эквивалентно предположению о том, что значение ошибки измерений в данной точке не зависит от значения ошибок в любой другой, в том числе в соседних точках. Такое предположение очень хорошо реализуется в опыте, если ошибка измерений является статистической. Систематические ошибки и ошибки, тесно скоррелированные между точками, вообще не поддаются общему рассмотрению. Наконец, в выбранной модели шума неявно предполагается, что величина ошибки измерений не коррелирует со значениями самой функции. Это не соответствует действительным условиям измерения, т.к., например, статистическая ошибка определяется значением функции. Однако, если вариации искомой функции малы, то огрубление, вносимое принятой моделью шумов, незначительно.

Почти постоянство спектра шумов в области энергетических частот позволяет просто найти информационную область. В безынформационной области полезный сигнал считается равным нулю. Такая потеря информации неизбежна в разработанном алгоритме, так как извлечь полезный сигнал там, где шумы его полностью перекрывают, невозможно без использования априорной информации о полезном сигнале. Отсутствие такой априорной информации в разработанном алгоритме является его наиболее существенной чертой. Именно это обстоятельство позволяет придать алгоритму восстановления структуру прямого алгоритма, а вычисления на ЭВМ проводить с помощью быстрых алгоритмов.

Поскольку информация, используемая при решении задачи, содержится как в функции $R(\omega)$, так и в функции $G(\omega)$, нельзя допустить, чтобы $R(\omega)$ обращалось в нуль при более высоких энергетических частотах, чем $G(\omega)$. ($G(\omega)$ стоит в знаменателе (6) !). Отсюда вытекает достаточное условие решения задачи восстановления спектра. А именно:

$$\omega_{\text{инф}}^{G} > \omega_{\text{инф}}^{R} \quad . \quad (8)$$

Здесь $\omega_{\text{инф}}^{G,R}$ — энергетические частоты на границах информационных областей функций $G(\omega)$ и $R(\omega)$ соответственно.

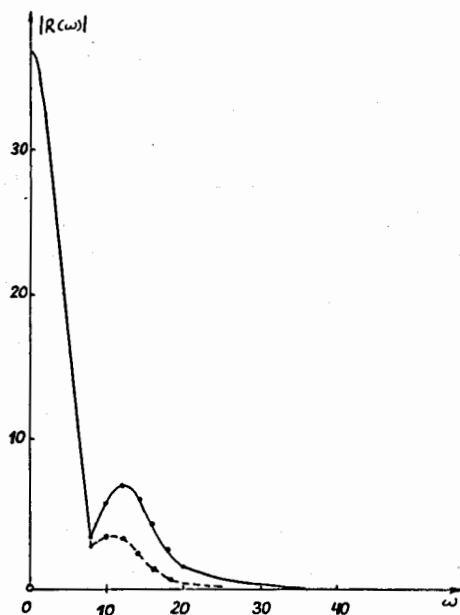


Рис. 6. Фурье-образ истинного спектра (сплошная кривая) и отклика системы $r(E)$ (пунктирная кривая), приведенных на рис. 4 в отсутствие шума.

Поясним работу алгоритма на примере. На рис. 6 приведен фурье-образ $R(\omega)$ функции отклика $r(E)$ спектрометра на искомый спектр $f(E)$ в отсутствие шумов. Пунктирная кривая - фурье-образ отклика, сплошная кривая - фурье-образ искомого спектра. На рис. 7 дан фурье-образ $R(\omega)$ - функции $r(E)$ при различных уровнях аддитивных шумов. Видно, что с уменьшением мощности шума информационная область расширяется и появляется возможность выявить в спектре более мелкую структуру.

Разработанный алгоритм был использован для восстановления искомого спектра по свертке, искаженной шумами (рис. 8). Результат восста-

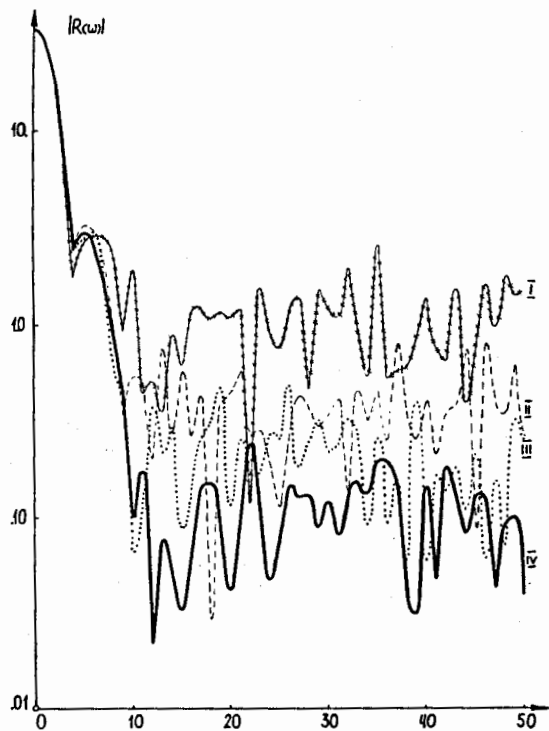


Рис. 7. Фурье-образ отклика системы $r(E)$, искаженный аддитивными шумами с различным отношением сигнала к шуму S/N . Кривая I $N/S = 0,1$, кривая II $N/S = 0,04$, кривая III $N/S = 0,02$, кривая IV $N/S = 0,01$.

новления в условиях "перекоррекции" ($\omega_{\text{инф}} = 14$, пунктирная кривая) и в оптимальных условиях ($\omega_{\text{инф}} = 8$, точечная кривая) приведен на рис. 9. Там же дан истинный спектр (сплошная кривая) и обозначен коридор ошибок, обусловленных шумом. Все вычисления были выполнены с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье^{18/} по программе FFT. Спектр, состоящий из 256 точек, восстанавливается за 28 сек времени работы ЭВМ CDC-1604A. Результаты расчета следует рассматривать как одно из возможных приближений к истинному спектру. По мере привлечения дополнительных условий и других априорных данных степень приближения к истинному спектру будет улучшаться.

Однако, очевидно, что все последующие приближения будут лежать в пределах коридора ошибок. Ширина этого коридора определяется мощ-

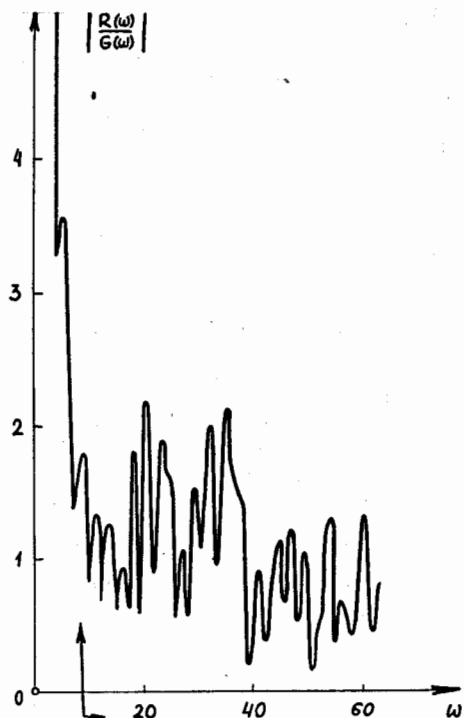


Рис. 8. Фурье-образ отклика, искаженного аддитивными шумами. Стрелкой показана граница информационной области.

ностью шумов, значение которой однозначно находится с помощью разработанного алгоритма.

Заключение

Разработан быстрый алгоритм восстановления искомого спектра по результатам спектрометрических измерений и по кривой разрешающей способности спектрометра с привлечением модели аддитивного квазизелого шума. Алгоритм обходит проблему некорректности и не использует априорной информации о структуре искомого спектра. Достаточное условие некорректности алгоритма обратной фильтрации сводится к тому, чтобы ин-

формационная область кривой разрешающей способности спектрометра простиралась до более высоких энергетических частот, чем информационная область результатов измерений самого спектра.

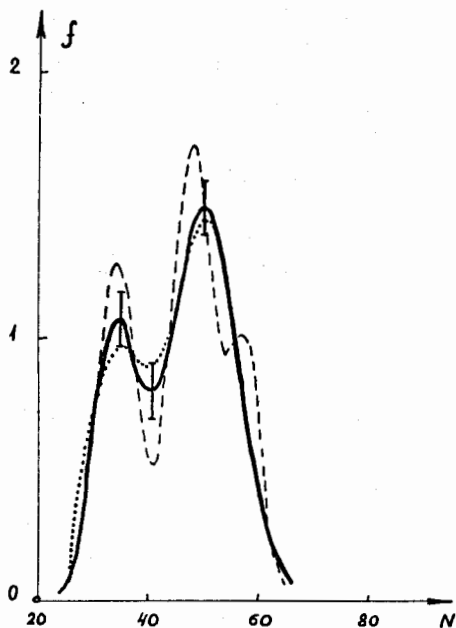


Рис. 9. Результат восстановления функции $f(E)$ с помощью метода Фурье.

Литература

1. J. Tsujiuchi, G.W. Stroke. Optical Image Deblurring Methods. Applications of Holography, Plenum Press, New York, 1971, p. 259 ÷ 308.
2. А.Н. Тихонов. Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации. Докл. АН СССР, 151, №3, 501 (1963).
3. А.Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленной задачи. Докл. АН СССР, 153, №1, 42 (1963).
4. Я.И. Хургин, В.П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. ФМ., Москва, 1962.

5. А.Н. Тихонов, В.Б. Гласко. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Ж. вычисл. математ. и математ. физики, 4, №3, 564 (1964).
6. В.Ф. Турчин, В.П. Козлов, М.С. Малкевич. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач. УФН, 102, вып. 3 (1970).
7. В.М. Дубовик, Б.Л. Марковски, Л.М. Сороко, Т.А. Стриж. Определение информационной области спектра при анализе экспериментальных данных методом Фурье. Сообщение ОИЯИ, P1-6071, Дубна, 1971.
8. J.W.Cooley, J.W.Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. of Comput., 19, pp. 297-301, April 1965.
9. Л.М. Сороко. Фурье-алгоритм обработки спектральной информации. Сообщение ОИЯИ, 1-5030, Дубна, 1970.
10. H.C.Andrews. Computer Techniques in Image Processing. Academic Press, 1970.
11. А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике, МИР, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1972 года.