СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р10 - 5913

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Г.А. Емельяненко

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ И ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

1971

P10 - 5913

Г.А. Емельяненко

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ И ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

Оценки кинематических параметров частиц тяжелее электрона будем получать, исходя из требования максимальности обобщенной функции правдоподобия /I/:

$$n(W/0, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}n} \cdot |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \cdot exp[-\tfrac{1}{2} W^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot W] , \quad (I.I)$$

где

$$W = \begin{bmatrix} Y - \langle Y(\theta^k) \rangle = \Delta Y \\ \Delta \\ \mathcal{E} \end{bmatrix}$$

$Y - n$ – мерный вектор измерений y – координат точек на треке, $\langle Y \rangle$ – вектор средних значений для Y, $\theta^k \in R_m$ – кинематическое пространство, Δ – вектор параметров (случайных угловых отклонений из-за многократного кулоновского рассеяния), $\mathcal{E}$ – вектор параметров (случайных измерительных ошибок в точках на треке), Σ – ковариационная матрица, явный вид которой получен в /I/. Причем, как видели, Σ полностью определяется заданием матрицы измерительных ошибок ${}_{33}\Sigma$ и $\theta_s^2 = \theta_s^2 (\theta^q \in R_m, q \in J)$ в начале $q+1$ итерации по ММП. При условии, что начальная гипотеза $(\theta^0 \in R_m)$ принадлежит довольно малой окрестности неизвестной точной гипотезы, воспользуемся /2/ линеаризацией $\langle Y \rangle$ по малым поправкам к искомым параметрам

$$\langle Y(\theta^k) \rangle = \Xi(\theta^{k-1}) \cdot \Delta\theta^k + H(\theta^{k-1}) , \quad (I.2)$$

где $\theta^k = \theta^{k-1} + \Delta\theta^k$, $\theta^{k-1} = [\theta_1^{k-1}, \theta_2^{k-1}, \ldots, \theta_m^{k-1}]$ – значения кинематических параметров в $k-1$ итерации;

$\Xi(\theta^{k-1})$ – матрица соответствующего интегрального оператора[2], вычисленная при значениях искомых параметров в $\kappa-1$ итерации; $\mathcal{H}(\theta^{\kappa-1})$ – вектор (столбец), который определяет основной вклад в $\langle Y \rangle$, обусловленный искривлением траектории за счет магнитного поля, вычисленный при значениях параметров в $\kappa-1$ итерации.

Далее воспользовавшись результатами[I] и необходимыми условиями минимума квадратичной формы в показателе экспоненты в (I.I), получаем следующую систему $2n+m$ неоднородных линейных уравнений (уравнений правдоподобия) относительно оценок векторов $\widetilde{\Delta\theta^{\kappa}}$, $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned}
&\Omega\cdot\widetilde{\Delta\theta^{\kappa}} + [R\,\Xi]^T\cdot\widetilde{\Delta} + [K\cdot\Xi]^T\cdot\widetilde{\mathcal{E}} = [K\cdot\Xi]^T\cdot[Y-\mathcal{H}]\\
&[R\cdot\Xi]\cdot\widetilde{\Delta\theta^{\kappa}} + F\cdot\widetilde{\Delta} + R\cdot\widetilde{\mathcal{E}} = R\cdot[Y-\mathcal{H}]\\
&[K\cdot\Xi]\cdot\widetilde{\Delta\theta^{\kappa}} + R^T\cdot\widetilde{\Delta} + [{}_{33}\Sigma^{-1}+K]\cdot\widetilde{\mathcal{E}} = K\cdot[Y-\mathcal{H}],
\end{aligned}\qquad (I.3)$$

где ввели обозначения

$$\begin{aligned}
&\Omega = \Xi^T\cdot K\cdot\Xi\;;\; R = {}_{22}\Sigma^{-1}\cdot{}_{21}\Sigma\cdot K\;;\; F = {}_{22}\Sigma^{-1} + R\cdot K^{-1}\cdot R^T\\
&K = [{}_{11}\Sigma - {}_{12}\Sigma\cdot{}_{22}\Sigma^{-1}\cdot{}_{21}\Sigma]^{-1},
\end{aligned}\qquad (I.4)$$

а также воспользовались матрицами ${}_{11}\Sigma$, ${}_{12}\Sigma$, ${}_{21}\Sigma$, элементы которых имеют вид[3]

$$\begin{aligned}
&{}_{11}\Sigma_{ij} = \frac{\theta_s^2}{12}\begin{cases} x_i^2\cdot(3x_j - x_i), & i\le j,\; j=1,2,\dots,n\\ x_j^2\cdot(3x_i - x_j), & j\le i,\; i=1,2,\dots,n\end{cases}\\
&{}_{12}\Sigma_{ij} = {}_{21}\Sigma_{ji} = \frac{\theta_s^2}{4}\begin{cases} 0, & j>i\\ (x_j - x_{j-1})(2x_i - x_j - x_{j-1}), & i\ge j\end{cases}\\
&{}_{22}\Sigma_{ij} = \frac{\theta_s^2}{2}\begin{cases} 0, & |i-j|>0\\ x_i - x_{i-1}, & 1\le i=j\le n\end{cases}
\end{aligned}\qquad (I.5)$$

В (I.5) X – абсцисса координаты точки на треке в выбранной системе координат[4], $\theta_s^2 = const\,\frac{M^2+P^2}{P^4}$, где M, P – масса и импульс[4] частицы.

При решении системы (I.3) воспользуемся основными результатами[3]. После громоздких вычислений получаем

$$\widetilde{\Delta\theta}^K = [\Xi^T\cdot[{}_{33}\Sigma + {}_{11}\Sigma]^{-1}\,\Xi]^{-1}\cdot[\Xi^T\cdot[{}_{33}\Sigma + {}_{11}\Sigma]^{-1}]\cdot[Y - \mathcal{H}]$$

$$\widetilde{\Delta} = R^{-T}\cdot[K - {}_{11}\Sigma^{-1}]\cdot G\cdot\widetilde{\Delta Y} \qquad (I.6)$$

$$\widetilde{\mathcal{E}} = G\cdot{}_{33}\Sigma\cdot{}_{11}\Sigma^{-1}\cdot\widetilde{\Delta Y},$$

где $G = {}_{11}\Sigma\cdot[{}_{33}\Sigma + {}_{11}\Sigma]^{-1}$; $\widetilde{\Delta Y} = Y - \mathcal{H} - \Xi(\theta^{K-1})\cdot\widetilde{\Delta\theta}^K$.

Как следует из (I.6), обобщенная модель (I.I) приводит к несмещенным[5] оценкам кинематических параметров, совпадающим с оценками, полученными в "классической" модели[5], в случае линейно параметризованных гипотез.

При этом решение $\widetilde{\Delta\theta}^K$, $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\mathcal{E}}$, а также матрица ошибок вектора $\widetilde{\Delta\theta}^K$, т.е. $[\Xi^T\cdot[{}_{33}\Sigma + {}_{11}\Sigma]^{-1}\cdot\Xi]^{-1}$, приобретают простой аналитический вид, если воспользоваться полученным в[3] представлением для ${}_{11}\Sigma$ и ${}_{11}\Sigma^{-1}$.

Остановимся на некоторых отличительных особенностях решения (I.6).

Во-первых, оценки векторов $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$, полученные указанным выше способом, обладают эффективными асимптотическими свойствами. На самом деле, если предположить, что измерения ведутся с абсолютной точностью, т.е. ${}_{33}\Sigma \equiv 0$, то

$$G = E \qquad \text{– единичная матрица} \;, \tag{I.7}$$
$$\widetilde{\mathcal{E}} = 0 \;, \; \widetilde{\Delta} = R^{-T} \cdot [K - {}_{11}\Sigma^{-1}] \cdot \widetilde{\Delta Y} \;,$$

т.е. оценка $\widetilde{\Delta}$ становится функцией только кулоновского стохастического фактора, как и следовало ожидать. Этой оценкой можно воспользоваться для "грубого" обнаружения изломов, поскольку матрица $R^{-T} \cdot [K - {}_{11}\Sigma^{-1}]$ имеет простой аналитический вид[3].

Если рассмотреть случай предельно больших энергий, когда $\lim\limits_{\theta_s^2 \to 0} {}_{11}\Sigma \Rightarrow 0$, то, как следует из (I.6), (I.4), (I.5),

$$\lim_{\theta_s^2 \to 0} R^{-T} \cdot [K - {}_{11}\Sigma^{-1}] \cdot {}_{11}\Sigma \cdot [{}_{33}\Sigma + {}_{11}\Sigma]^{-1} \Rightarrow 0 \tag{I.8}$$
$$\lim_{\theta_s^2 \to 0} {}_{11}\Sigma \cdot [{}_{33}\Sigma + {}_{11}\Sigma]^{-1} \cdot {}_{33}\Sigma \cdot {}_{11}\Sigma^{-1} \Rightarrow E$$

Следовательно, оценка $\widetilde{\Delta} = 0$, оценка $\widetilde{\mathcal{E}} = \widetilde{\Delta Y}$, т.е. весь шум обусловлен только измерительными ошибками.

Во-вторых, $\widetilde{\Delta Y}$ является, в сущности, оценкой полных отклонений измеренных точек от средней траектории в K-ой итерации. Поэтому наиболее вероятные для данного трека значения компонент векторов $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ являются функциями всей совокупности полных отклонений. Следовательно, модификация (I.I) классической функции правдоподобия[6] (для исследуемой задачи), полученная с использованием дополнительной априорной информации, связанной с введением ${}_{12}\Sigma$, позволяет выделить из полного шума $\Delta Y = \Delta Y_{изм.} + \Delta Y_{кул.}$ наиболее вероятные оценки его отдельных составляющих, что не приводит к потере (I.6) информации об основных кинематических параметрах и является неизбежным следствием модификации классической модели. При этом становится очевидным наличие "ослабленной" по сравнению с [2] корреляции между оценками отдельных компонент векторов $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$, а также между векторами $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$, что обусловлено отсутствием непосредственных измерений этих векторов, а также скоррелированностью компонент ΔY [1]. Тем не менее, указанные свойства оценок векторов $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ позволяют судить, что они служат хорошим критерием "гладкости" трека и могут быть использованы при обнаружении изломов, а также в самостоятельных целях.

В третьих, решение, записанное в форме (I.6), позволяет получать оценки $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ в любой эксплуатируемой в настоящее время геометрической программе. При этом точность получаемых оценок будет зависеть от точности использованной в данной конкретной программе математической модели трека. В программах, которые используют матрицу ${}_{11}\Sigma$ и ${}_{33}\Sigma$, практически имеется вся информация для вычисления оценок $\widetilde{\Delta}, \widetilde{\mathcal{E}}$. Решение (I.6) позволяет организовать итерационный процесс уточнения параметров не только с учетом процедуры

$$\theta^{k} = \theta^{k-1} + \Delta\theta^{k} \quad , \qquad (I.9)$$

но также с учетом полученной оценки матрицы ошибок ${}_{33}\widetilde{\Sigma}$.

Критерии обнаружения изломов

Согласно общей теории многократного кулоновского рассеяния [4], для компонент вектора Δ существует область изменения $[\Delta_{min}, \Delta_{max}]$. Тогда можно сформулировать следующий критерий для обнаружения рассеяния на большие углы

$$\widetilde{\Delta} \ni \widetilde{\delta}_i \notin [\delta_{i\,min}, \delta_{i\,max}]. \qquad (2.I)$$

Как уже отмечалось в[1], в случае преобладания многократного рассеяния проекция угла рассеяния безотносительно к боковому смещению имеет гауссовский вид распределения с дисперсией $\sigma_\delta^2 = \frac{1}{2}\theta_s^2 \ell$ в единицах радиационных длин

$$n(\delta/0,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\delta}\cdot \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}\right). \qquad (2.2)$$

Функция распределения (2.2) зависит от импульса и от толщины слоя ℓ, поскольку $\sigma_\delta^2 = f(\ell, p)$.

Это свойство может быть использовано также в качестве критерия для обнаружения изломов

$$|\tilde{\delta}_i \in \tilde{\Delta}| \le \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot 21{,}2\cdot\sqrt{\frac{\ell_i}{X_0}}\cdot\left(\frac{p_i^2+M^2}{p_i^4}\right)^{1/2}. \qquad (2.3)$$

Учет обнаруженных изломов при определении кинематических параметров можно производить различными способами[7,8]. Эффективным является также метод "уменьшения веса" точки на треке, в которой произошел излом, а также точек "возмущения". Такими называем точки, в которых заметны вторичные максимумы в распределении углов $\tilde{\delta}$, которые обусловлены скоррелированностью полных отклонений. Процедура "уменьшение веса" сводится к тому, что в полной ковариационной матрице $A = [{}_{33}\Sigma + {}_{11}\Sigma]$ увеличивается в несколько десятков раз ($\simeq 100$) ошибка $A_{i_* i_*}$ и уменьшаются соответствующие корреляции $A_{i_* j}\ (1 \le j \le n)$; $A_{i, i_*}\ (1 \le i \le n)$, если i_* – точка, в которой обнаружен излом. Такая процедура является обобщением процедуры, предложенной в[2].

В заключение автор благодарит Н.Н.Говоруна, И.Н.Силина, В.И.Мороза, Г.А.Ососкова за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.А.Емельяненко. Препринты ОИЯИ, Р10-5279, Р10-5278, Р10-5301, Дубна, 1970.
2. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Саитов, А.П.Стельмах. Препринт ОИЯИ Р-2829, Дубна, 1966.
3. Г.А.Емельяненко. Сообщения ОИЯИ, Р10-5687, Дубна, 1971.
4. Б.Росси. Частицы больших энергий, ГИТЛ, М., 1955.
5. И.П.Клепиков, С.Н.Соколов. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. "Наука", М., 1964.
6. Л.Н.Гердюков, Б.А.Манюков, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ Р10-4579, Дубна, 1969.
7. Н.Ф.Маркова, В.И.Мороз, В.И.Никитина, А.П.Стельмах, Г.Н.Тентюкова. Сообщение ОИЯИ Р10-3768, Дубна, 1968.
8. А.У.Абдурахимов, Е.Н.Кладницкая, Нгуен Дин Ты. Сообщение ОИЯИ, Р1-5540.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1971 года.