

С 344.1Р

8/VI-71

F-601  
СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

1861/2-72



P 10-5687

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Г. А. Емельяненко

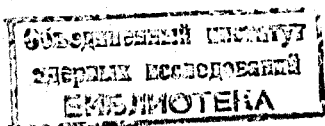
ОБРАЩЕНИЕ КУЛОНОВСКОЙ МАТРИЦЫ  
ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ СНИМКОВ

1971

Р 10-5687

Г. А. Емельяненко

ОБРАЩЕНИЕ КУЛОНОВСКОЙ МАТРИЦЫ  
ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ СНИМКОВ



В крупных ядерных центрах, использующих камерную методику при изучении свойств элементарных частиц, системы обработки फिल्मовой информации включают в качестве необходимого компонента геометрические программы, сущность которых сводится к вычислению значений параметров частицы в "вершине" события с целью последующей кинематической проверки гипотез о событии в целом/1+3/.

Сложность таких расчётов в значительной мере определяется точностью использованной математической модели следа заряженной частицы. Наиболее полные из моделей/1+5/ учитывают вид частицы, конфигурацию магнитного поля в объеме детектора, уравнение движения, потери энергии вследствие ионизации, многократное кулоновское рассеяние, измерительные ошибки, изломы.

Однако расчёты значительно упрощаются в случае /1,4/ или значения параметров могут быть получены аналитически в случае/5/, если известно обращение кулоновской матрицы.

Пусть матрица<sup>x/</sup> полного кулоновского процесса рассеяния/5/ имеет вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 11 \Sigma & 12 \Sigma \\ 21 \Sigma & 22 \Sigma \end{pmatrix} \quad (1.0)$$

---

<sup>x/</sup> Будем пользоваться обозначениями /6/. Например,  $A = \|A_{ij}\|_1^n$ ,  $A^{-1} = \|A_{ij}^{-1}\|_1^n$ , где  $A_{ij}$ ,  $A_{ij}^{-1}$  соответственно элементы матрицы  $A$  и матрицы, обратной к  $A$ .

где

$$\begin{aligned}
 {}_{11}\Sigma_{ij} &= \frac{\theta_s^2}{12} \begin{cases} x_i^2(3x_j - x_i), & i \leq j, j = 1, 2, \dots, n \\ x_j^2(3x_i - x_j), & j \leq i, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \\
 {}_{12}\Sigma_{ij} = {}_{21}\Sigma_{ji} &= \frac{\theta_s^2}{4} \begin{cases} 0, & j > i \\ (x_j - x_{j-1})(2x_i - x_j - x_{j-1}), & j \leq i \end{cases} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

$${}_{22}\Sigma_{ij} = \frac{\theta_s^2}{2} \begin{cases} 0, & |i-j| > 0 \\ x_i - x_{i-1}, & 1 \leq i = j \leq n. \end{cases}$$

В (1.1)  $X$ -абсцисса координаты точки на треке в выбранной системе координат/7/.

$$\theta_s^2 = \text{const} \frac{M^2 + P^2}{P^4}, \quad \text{где } M, P - \text{масса и импульс} \quad /7/ \text{ частицы.}$$

Получим обращение  ${}_{11}\Sigma^{-1}$

Существуют различные (например, /9/) модификации способа треугольной факторизации обратных матриц с помощью элементарных матриц вращения/6/, но они, как правило, удобны в конкретных численных расчётах. В/4/ была предпринята попытка найти общий вид  ${}_{11}\Sigma^{-1}$ , но при этом получено представление, не совсем удобное для аналитических расчётов с полной ковариационной матрицей/1/.

Рассмотрим следующие неособенные матрицы  $n$ -го порядка

$$\begin{aligned}
 K &= ({}_{11}\Sigma \quad -{}_{12}\Sigma \quad \cdot {}_{22}\Sigma^{-1} \quad \cdot {}_{21}\Sigma)^{-1}, \\
 R &= {}_{22}\Sigma^{-1} \cdot {}_{21}\Sigma \cdot K, \\
 F &= {}_{22}\Sigma^{-1} + R \cdot K^{-1} \cdot R^T. \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

---

<sup>x/</sup> В случае равномерно измеренных точек на треке такое обращение получено в/8/, однако, нас интересует  ${}_{11}\Sigma^{-1}$  для произвольного разбиения.

Из (1.1) и (1.2) следует, что  $K$ ,  $F$  - симметричные,  $R$  - верхняя почти треугольная.

Пусть  $\ell_i = x_i - x_{i-1}$ , ( $1 \leq i \leq n$ ), тогда для элементов  $K^{-1}$  получим

$$K_{ij}^{-1} = \frac{\theta_s^2}{24} \begin{cases} \sum_{k=1}^i \ell_k^3, & i \leq j \\ \sum_{k=1}^j \ell_k^3, & j \leq i \end{cases} \quad (1.3)$$

Как следует из теоремы (см. /10/), матрица, обратная к  $K^{-1}$ , является трехдиагональной матрицей Якоби /6/

$$K_{ij} = \frac{24}{\theta_s^2} \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ -\ell_{j+1}^{-3}, & i = j+1 \\ -\ell_{i+1}^{-3}, & j = i+1 \\ \ell_i^{-3} + \ell_{i+1}^{-3}, & 1 \leq i = j \leq n-1 \\ \ell_n^{-3}, & i = j = n \end{cases} \quad (1.4)$$

Рассмотрим также матрицы  $E_\Delta$ ,  $U$ , такие, что

$$(E_\Delta)_{ij} = \begin{cases} 1, & j \leq i \\ 0, & i < j \end{cases} \quad U_{ij} = \begin{cases} \frac{\ell_i}{2}, & 1 \leq i = j \leq n \\ \ell_j, & 1 \leq i \leq n-1, i+1 \leq j < n \\ 0, & j < i \end{cases} \quad (1.5)$$

и справедливо следующее разложение для  $R$ ,  $R^{-1}$

$$R = U \cdot E_\Delta^T \cdot K, \quad R^{-1} = K^{-1} \cdot E_\Delta^{-T} \cdot U^{-1}. \quad (1.6)$$

Элементы матриц  $E_\Delta^{-1}$ ,  $U^{-1}$  легко получаются, если к матричному уравнению  $D \cdot X = E$  ( $D$  - любая из неособенных матриц  $E_\Delta$ ,  $U$ ,  $E$  - единичная матрица) применить преобразования I-го и II-го рода /6/

$$(E_{\Delta})_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i = j \leq n \\ -1, & 1 \leq j \leq n-1, i = j+1 \\ 0, & 1 \leq j \leq n-2, i > j+1 \\ 0, & i < j \end{cases} \quad U_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0, & i > j \\ \frac{\ell_i^{-1}}{2}, & i = j \\ (-1)^{i+j} \ell_i^{-1}, & 1 \leq i \leq n-1, i+1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (1.7)$$

Представим теперь матрицы  $F$  и  $F^{-1}$  в виде:

$$F = {}_{22}\Sigma^{-1} + H_1; \quad F^{-1} = H_1^{-1} - H_2, \quad (1.8)$$

где  $H_1 = R \cdot K^{-1} \cdot R^T$ ,  $H_2$  - неизвестная пока матрица. Из условия  $F \cdot F^{-1} = E$  получаем для  $H_2$  следующее матричное уравнение

$$F \cdot H_2 = {}_{22}\Sigma^{-1} \cdot H_1^{-1}. \quad (1.9)$$

Если воспользоваться представлением  $F$  вида

$$F = {}_{22}\Sigma^{-1} \cdot [R^{-T} {}_{+21}\Sigma] \cdot R^T, \quad (2.0)$$

то для  $H_2$  из (1.9) получаем

$$H_2 = R^{-T} \cdot [R^{-T} {}_{+21}\Sigma]^{-1} \cdot H_1^{-1}. \quad (2.1)$$

Умножим теперь (2.1) слева и справа на неособенные матрицы  $R^T, R$ .

$$R^T \cdot H_2 \cdot R = [R^{-T} {}_{+21}\Sigma]^{-1} \cdot {}_{22}\Sigma \cdot \Sigma^{-1}. \quad (2.2)$$

В (2.2) слева стоит симметричная матрица, т.к.  $H_2$  - симметричная (1.8); следовательно, справа должна быть тоже симметричная матрица. Обозначим

$$\omega = [R^{-T} + {}_{21}\Sigma]^{-1} \cdot {}_{22}\Sigma \cdot {}_{12}\Sigma^{-1}. \quad (2.3)$$

Тогда для обратной матрицы  $\omega^{-1}$  получаем

$$\omega^{-1} = {}_{12}\Sigma \cdot {}_{22}\Sigma^{-1} \cdot {}_{21}\Sigma + {}_{12}\Sigma \cdot {}_{22}\Sigma^{-1} \cdot {}_{22}\Sigma \cdot {}_{12}\Sigma^{-1} \cdot K^{-1} = K^{-1} + {}_{12}\Sigma \cdot {}_{22}\Sigma^{-1} \cdot {}_{21}\Sigma, \quad (2.4)$$

$$[R^{-T} + {}_{21}\Sigma]^{-1} = {}_{11}\Sigma^{-1} \cdot {}_{12}\Sigma \cdot {}_{22}\Sigma^{-1}.$$

Используя (2.4), можем (2.2) записать в виде

$$R^T \cdot H_2 \cdot R = {}_{11}\Sigma^{-1}. \quad (2.5)$$

Из (1.9) и (2.5) получаем окончательно

$$F = {}_{22}\Sigma^{-1} [R \cdot K^{-1} \cdot R^T]^{-1} \cdot [R \cdot {}_{11}\Sigma \cdot R^T]. \quad (2.6)$$

Итак, мы получили представление  $F$  через  ${}_{11}\Sigma$  и, следовательно, доказали возможность аналитического решения в случае полной функции правдоподобия/5/, если известно обращение  ${}_{11}\Sigma^{-1}$ .

Запишем  ${}_{11}\Sigma^{-1}$  в виде

$${}_{11}\Sigma^{-1} = (E_{\Delta}^{-T} \cdot U^{-1}) \cdot Q^{-1} \cdot (E_{\Delta}^{-T} \cdot U^{-1})^T, \quad (2.7)$$

где мы воспользовались (1.2), (1.6), (2.2), (2.5), а также обозначили

$$Q^{-1} = [U^{-T} \cdot E_{\Delta}^{-1} \cdot K^{-1} \cdot E_{\Delta}^{-T} \cdot U^{-1} + {}_{22}\Sigma]^{-1}. \quad (2.8)$$





$${}_{11}\Sigma^{-1} = 12 \theta_s^{-2} \cdot \mathbf{G} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \mathbf{G}^T, \quad (3.3)$$

где обозначим

$$\mathbf{T}_{\Delta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & \\ \ell_1^{-1} & (-\ell_1^{-1} - \ell_2^{-1}) & & & \ell_2^{-1} \\ & \ell_2^{-1} & (-\ell_2^{-1} - \ell_3^{-1}) & & \ell_3^{-1} & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ell_{n-2}^{-1} & (-\ell_{n-2}^{-1} - \ell_{n-1}^{-1}) & \ell_{n-1}^{-1} \\ & & & & & & \ell_{n-1}^{-1} & (-\ell_{n-1}^{-1} - \ell_n^{-1}) \\ & & & & & & & \ell_n^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_{\Delta}^{-T} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{T}_{\Delta}^{-T} =$$

Если учесть, что каждый элемент матрицы  $\Gamma^{-1}$  представим в виде произведения двух элементов, один из которых зависит от номера строки, а другой от номера столбца (см. теорему/10/), то представление (3.3), (3.4) матрицы  ${}_{11}\Sigma^{-1}$  удобно не только при аналитических выкладках, но и при проведении численных расчётов, поскольку для хранения обратной матрицы требуется  $3n$  ячеек памяти ( $n$  — для хранения обратных длин  $\ell_i^{-1}$  и  $2n$  для хранения матрицы, обратной к  $\Gamma$ ). Время обращения  ${}_{11}\Sigma$  при этом значительно меньше, чем обращение  ${}_{11}\Sigma$  прямым методом (особенно если учесть еще время заполнения  ${}_{11}\Sigma$ ).

В связи с появлением различных моделей трека/15/ все чаще стал возникать вопрос об устойчивости решения нормальной системы уравнений. Представление (3.3) обратной кулоновской матрицы позволяет ответить на этот вопрос.

Запишем кулоновскую матрицу, воспользовавшись (3.3)

$${}_{11}\Sigma = \frac{\theta_s^2}{12} \cdot \mathbf{G}^{-\tau} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{G}^{-1}. \quad (3.5)$$

При этом нетрудно получить

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} l_1 & \sum_{k=1}^2 l_k & \sum_{k=1}^3 l_k & \dots & \sum_{k=1}^n l_k \\ & l_2 & \sum_{k=2}^3 l_k & \dots & \sum_{k=2}^n l_k \\ & & l_3 & \dots & \sum_{k=3}^n l_k \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & l_n \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$\mathbf{G}^{-1}$  - значительно упрощается, если перейти к координатам  $x_1$ . Воспользуемся треугольной факторизацией матрицы  $\Gamma$  в виде /10/

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_2^{-1} & & & & & & & \\ & -1 & C_3^{-1} & & & & & \\ & & -1 & C_4^{-1} & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot & \\ 0 & & & -1 & C_n^{-1} & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -l_1 \cdot C_2 & & & & & & & \\ & -l_2 \cdot C_3 & & & & & 0 & \\ & & -l_3 \cdot C_4 & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & & & -l_{n-1} \cdot C_n \\ & & & & & & & & (2(l_{n-1} + l_n) + C_n \cdot l_{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_2^{-1} & -1 & & 0 & & & & \\ & C_3^{-1} & -1 & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot & \\ 0 & & & C_n^{-1} & -1 & & & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

где

$$C_1 = 0, C_i = -\frac{\ell_{i-1}}{2(\ell_{i-2} + \ell_{i-1}) + C_{i-1}\ell_{i-2}}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Поскольку причиной неустойчивости является плохая обусловленность матрицы системы, которая, в свою очередь, в значительной степени определяется обусловленностью кулоновской матрицы  ${}_{11}\Sigma$ , необходимо получить оценку величины определителя  $|{}_{11}\Sigma|$ , "малость" которого указывает на плохую обусловленность  ${}_{11}\Sigma$

$$\det({}_{11}\Sigma) = \left(\frac{\theta_s^2}{12}\right)^n \cdot \det(G^{-T} \cdot \Gamma \cdot G^{-1}). \quad (3.9)$$

Отметим, что величина определителя служит лишь необходимым критерием обусловленности, поскольку матрицы, отличающиеся множителем, имеют одинаковую обусловленность. Поэтому достаточно оценить в (3.9) второй сомножитель

$$\det(G^{-T} \cdot \Gamma \cdot G^{-1}) = \det(G^{-T}) \cdot \det(\Gamma) \cdot \det(G^{-1}). \quad (4.0)$$

Если воспользоваться (3.6), (3.7), то получим

$$\det(G^{-T} \cdot \Gamma \cdot G^{-1}) = \prod_{i=1}^n \ell_i^2 \cdot \prod_{j=2}^n (-\ell_{j-1}; C_j^{-1}) \cdot ([2(\ell_{n-1} + \ell_n) + C_n \cdot \ell_{n-1}]). \quad (4.1)$$

Как видно из (3.8), последовательность  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) сходится<sup>x/</sup> к  $-a$ , когда  $n \rightarrow \infty$ , т.е.  $\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = -a$ . Это - ограниченная с двух сторон последовательность. Ее элементы  $C_k \in (0, -1)$  при любом способе разбиения трека. Каждый из сомножителей в (4.1) положителен, следовательно, матрица  ${}_{11}\Sigma$  - положительно обусловленная (как и следовало ожидать).

<sup>x/</sup> Имеется в виду случай равномерного разбиения следа ( $0,267 < |a| < 0,268$ ).

Итак, детерминант можно записать

$$\det(\mathbf{G}^{-T} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{G}^{-1}) = \prod_{i=1}^n \ell_i^3 \cdot \prod_{j=2}^n |C_j^{-1}| \cdot \frac{2(\ell_{n-1} + \ell_n) + C_n \ell_{n-1}}{\ell_1}. \quad (4.2)$$

Оценим при любом способе разбиения третий сомножитель в (4.2)

$$\frac{\ell_{n-1} + 2\ell_n}{\ell_1} < \frac{2(\ell_{n-1} + \ell_n) + C_n \ell_{n-1}}{\ell_1} < \frac{2(\ell_{n-1} + \ell_n)}{\ell_1}. \quad (4.3)$$

Справедливость оценки следует из условия открытой области для  $C_k$ .

С высокой степенью точности можем записать теперь

$$\det(\mathbf{G}^{-T} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{G}^{-1}) \approx \prod_{j=2}^n |C_j^{-1}| \cdot \prod_{i=1}^n \ell_i^3 \cdot \frac{4\ell_n + 3\ell_{n-1}}{2\ell_1}. \quad (4.4)$$

Далее покажем, что соотношение (4.4) может быть использовано при формулировке критерия оптимального разбиения трека с целью извлечения максимально точной физической информации из случайной выборки в рамках использованной математической модели трека.

Хорошо известно/11/, что относительные ошибки в определении магнитной кривизны за счёт аппаратных неточностей и кулоновского рассеяния обратно пропорциональны величине магнитного поля  $H$

$$\delta\rho_{\text{ап}} \approx \frac{\rho_H}{\rho_{\text{ап}}} = 2,8 \cdot 10 \frac{\Delta Y \cdot P}{g^{1/2} H L^{5/2}}, \quad (4.5)$$

и

$$\delta\rho_{\text{мн}} = \frac{\rho_H}{\rho_{\text{мн}}} = \frac{3,5 \cdot 10}{\beta \cdot H (L X_0)^{1/2}},$$

где  $g = \frac{n}{L}$  - плотность измерений точек на следе длиной  $L$ ,  $P$  - импульс частицы,  $\beta$  - скорость,  $X_0$  - радиационная длина (для пропана 105 см, для водорода 990 см),  $\Delta Y$  - ошибка отсчёта.

Из (4.5) можно вычислить вклады соответствующих погрешностей, вносимых в измерение магнитной кривизны следов частиц, имеющих определенный импульс.

Видно, что вклад аппаратурной ошибки убывает с увеличением измеряемой длины  $L$  следа быстрее, чем вклад ошибки за счёт многократного кулоновского рассеяния.

Поэтому для каждого  $P(\beta)$  можно найти длину  $L_=(L - \text{равное})$ , на которой погрешности от обоих эффектов одинаковы.

Приближенно  $L_=($  можно оценить из равенства

$$\frac{\delta \rho_{\text{ап}}}{\delta \rho_{\text{н}}} = \frac{\delta \rho_{\text{ми}}}{\delta \rho_{\text{н}}}, \quad \delta \rho_{\text{н}} = \sqrt{\delta \rho_{\text{ап}}^2 + \delta \rho_{\text{ми}}^2}. \quad (4.6)$$

Очевидно, что  $L_=($  существенно больше для камер с легким наполнением, чем с тяжелым (эффект радиационной длины). Следовательно, роль аппаратурной ошибки существенна для первого класса камер, поскольку не всегда можно выбрать для измерения длину следа  $L \gg L_=($  (например, для пучковых частиц).

Однако даже для водородных камер (а пропановых тем более) у вторичных частиц соотношение  $L_{\text{изм.}} > L_=($  в среднем выполняется и, следовательно, на таких длинах для заданного импульса многократное кулоновское рассеяния становится основным источником ошибок.

Это, в свою очередь, приводит к необходимости использования полной модели трека/1-5/, которая неизбежно привлекает для описания матрицу  ${}_{11}\Sigma$  или ее различные приближения. В (4.4) детерминант матрицы  ${}_{11}\Sigma$  существенно зависит от способа разбиения трека.

При обработке треков (особенно для камер с тяжелым наполнением), для которых  $L \gg L_=($  и, естественно, большая часть измеренных точек может оказаться на части трека, лежащей за порогом  $L_=($ , условие (4.4) начинает приобретать существенный смысл. А именно<sup>x/</sup>, если плот-

<sup>x/</sup> Обозначим через  $n_=($  число измеренных точек на треке, лежащих до порога  $L_=($  и будем считать  $n_=( \ll n$ .

ность измерений за пороговым участком  $L_{\text{п}}$  такова, что длины промежутков  $l_i \ll 1$  (в единицах длин), когда  $i \in [n_{\text{п}}, n]$ , то в силу плохой обусловленности/ (при таком разбиении) матрицы  ${}_{11}\Sigma$  возможны следующие исходы:

а) точность кинематических параметров получается хуже, чем при оптимальном разбиении<sup>xx/</sup>;

б) точность существенно не улучшается с увеличением числа измеренных точек на треке по сравнению с оптимальным числом измерений на данной длине  $L$ .

Такая неоднозначность выводов является следствием использования только необходимого (3.9) условия плохой обусловленности нормальной системы.

Учитывая, что  $L_{\text{п}} \ll L$  (особенно для тяжелых жидкостей) и, следовательно, измеренных до порога  $L_{\text{п}}$  точек  $n_{\text{п}} \ll n$ , ниже<sup>xxx/</sup> приводится формулировка необходимого условия критерия оптимального выбора точек на треке.

В заключение автор благодарит Н.Н. Говоруна, И.Н. Силина, Р.М. Лебедева, В.Г. Иванова за полезные обсуждения и ценные советы.

<sup>x/</sup> Возможно равенство  $\det({}_{11}\Sigma) \approx 0$  (машинный).

<sup>xx/</sup> Возможна большая потеря точности из-за <sup>x/</sup>.

<sup>xxx/</sup> Для данного  $L$  найти такие  $n$  и  $l_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), чтобы

$$w = \max_{n, l_1} \left( \prod_{j=2}^n |C_j^{-1}| \cdot \prod_{i=1}^n l_i^3 \cdot \frac{4l_n + 3l_{n-1}}{2l_1} \right) \quad (4.7)$$

и  $\sum_{i=1}^n l_i = L.$

У данной задачи существует максимум. Ее решение представляет не только самостоятельный, но и большой практический интерес. Как показывает простой качественный анализ решения, оно находится в хорошем согласии с практикой обработки (особенно коротких треков). По-видимому, аналогичная задача может быть сформулирована с учетом и достаточного условия, при этом вместо  $L$  появится  $L_{\text{п}}$ , которое хорошо отражает свойства среды и импульс частицы. Также необходимо анализировать числа обусловленности (см./6/) матрицы  ${}_{11}\Sigma$ .

## Л и т е р а т у р а

1. К. Суп. Пузырьковая камера. Измерения и обработка данных. "Наука", М., 1970.
2. В.И. Мороз. Автореферат диссертации. Дубна. 1968.
3. Г.Н. Тентюкова. Автореферат диссертации. Дубна, 1968.
4. Л.Н. Гердюков, Б.А. Манюков, П.В. Шляпников. Препринт ОИЯИ Р10-4579, Дубна 1969.
5. Г.А. Емельяненко. Препринт ОИЯИ Р10-5278, Дубна 1970.
6. А.К. Фаддеев и В.Н. Фаддеев. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз. М., 1960 г.
7. Б. Росси. Частицы большой энергии. ГИТЛ, М., 1955.
8. F. Rohrbach and P. Rosselet, Momentum Estimate from simultaneous utilization of magnetic deflection and multiple coulomb scattering, *Helv, Phys. Acta* 34, 493 (1961).
9. В.Н. Кублановская. Об одном способе треугольной факторизации обратной матрицы. ЖВМ и МФ, 1966, 6, №3 (555-556).
10. Б. Бухбергер, Г.А. Емельяненко. Препринт ОИЯИ Р11-5686, Дубна 1971.
11. Ю.А. Александров и др. Пузырьковые камеры, М., 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел

16 марта 1971 года.