СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P10 - 5301

Г.А.Емельяненко

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ПОЛНОЙ ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ СНИМКОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1970

P10 - 5301

Г.А.Емельяненко

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ПОЛНОЙ ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ СНИМКОВ

В[1,2] показано, что условие эффективности оценок кинематических параметров частиц, оставивших след в камере, выполняется в точке максимума функции условной плотности распределения вероятностей, которая имеет вид:

$$n(\Delta y, \delta, \epsilon / 0, \Sigma) = (2\pi)^{-3/2(n-1)} \cdot |\Sigma|^{-1/2} \cdot \exp[-1/2\, Q], \tag{1.0}$$

где квадратичная форма Q :

$$Q = \Delta Y^T [K] \Delta Y + \Delta^T [\Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} K \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1}] \Delta +$$

$$+ \epsilon^T [\Sigma_{33}^{-1} + K] \epsilon - 2 \Delta Y^T [K \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1}] \Delta -$$

$$- 2 \Delta Y^T [K] \epsilon + 2 \Delta^T [\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} K] \epsilon . \tag{1.1}$$

Здесь

$$\text{a)} \quad \Sigma = \left(\begin{array}{c|c|c} \Sigma_{11} + \Sigma_{33} & \Sigma_{12} & \Sigma_{33} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & 0 \\ \hline \Sigma_{33} & 0 & \Sigma_{33} \end{array} \right) \tag{1.2}$$

Для всех $1 \le i \ , \ j \le n-1$.

$$\Sigma_{11} = \frac{\Theta_s^2}{12} x_i^2 (3x_j - x_i); \quad \Sigma_{22} = \frac{\Theta_s^2}{2}(x_i - x_{i-1});$$

$$b)\quad \Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T = \begin{cases} 0, & j > i \\ \frac{\Theta_s^2}{4}[(x_j - x_{j-1})(2x_i - x_j - x_{j-1})], & i \ge j \end{cases}$$

$\Theta_s^2 = \text{const}\ \dfrac{M^2 + P^2}{P^4}$, где M и P , соответственно, масса и импульс частицы[3]. Σ_{33} – матрица ошибок измерений,

c) $\Delta Y = Y - \langle Y \rangle$, где Y – вектор случайных измерений на треке, $\langle Y \rangle$ – вектор средних значений для Y .

d) Δ – случайный вектор угловых отклонений за счёт кулоновского рассеяния,

e) ϵ – вектор измерительных ошибок,

f) $K = [\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\ ]^{-1}$

Как отмечалось в[1,2], максимум функции правдоподобия (1.0) отыскивается в пространстве гипотез R_m , причем каждый элемент вещественного Евклидова пространства R_m определяется совокупностью m -вещественных чисел (кинематических параметров), $\Theta^k = [\theta_1^k, \theta_2^k, \ldots, \theta_m^k] \in R_m, k \in J$ – счётное множество неотрицательных чисел. Обозначим функцию правдоподобия (1.0) значком

$\Psi = n(\Delta y,\ \delta, \epsilon /\ 0,\ \Sigma\ )$.

Поскольку $\ell n\, \Psi$ является возрастающей функцией Ψ и ее максимум находится в той же точке пространства R_m , что и максимум Ψ , то удобнее находить максимум $\ell n\, \Psi$, а не максимум Ψ

$$\ell n\, \Psi = -3/2\,(n-1)\,\ell n\,(2\pi) - 1/2\,\ell n\,|\Sigma| - 1/2\,Q\,. \qquad (1.3)$$

Как уже отмечалось в[2],

$$|\Sigma| = \left| \begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right| \cdot |\Sigma_{33}|\ . \qquad (*)$$

Поэтому с учётом (*) логарифм функции правдоподобия запишется в виде:

$$\ell n\, \Psi = -3/2\,(n-1)\,\ell n\,(2\pi) - 1/2\ \ell n \left| \begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right| - 1/2\,\ell n\,|\Sigma_{33}| - 1/2\,Q\,. \qquad (1.4)$$

Оценим вклады в $\ell n\, \Psi$ каждого из членов суммы. Первый член не влияет на положение максимума в R . Рассмотрим третий член. Нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$0 \le (\min_i \sigma^2_{\mathcal{E}_i})^{n-1} \le |\Sigma_{33}| = \prod_{i=1}^{n-1} \sigma^2_{\mathcal{E}_i} \le (\max_i \sigma^2_{\mathcal{E}_i})^{n-1} \qquad (1.5)$$

где $\sigma^2_{\mathcal{E}_i}$ – квадрат стандартной ошибки (i – ый элемент матрицы измерительных ошибок Σ).

Вычислим следующие пределы, воспользовавшись свойством непрерывности

$$\lim_{|\max \sigma_{\mathcal{E}}| \to 1} (\max_i \sigma^2_{\mathcal{E}})^{n-1} = 1\,; \quad \lim_{|\min \sigma_{\mathcal{E}}| \to 0} (\min_i \sigma^2_{\mathcal{E}})^{n-1} = 0\,. \qquad (1.6)$$

Воспользовавшись примененным выше свойством перестановочности значка функции и значка предела и учитывая, что ℓn является возрастающей функцией своего аргумента, получим следующую систему оценок:

$$\lim_{|\max \sigma_{\mathcal{E}}| \to 1} \ln |\Sigma_{33}| \overset{(1.5)}{\le} \lim_{|\max \sigma_{\mathcal{E}}| \to 1} \ln (\max_i \sigma^2_{\mathcal{E}})^{n-1} =$$

$$= \ln \lim_{|\max \sigma_{\mathcal{E}}| \to 1} (\max_i \sigma^2_{\mathcal{E}})^{n-1} \xrightarrow{(1.6)} \ln 1 = 0,$$

т.е.

$$\lim_{|\max \sigma_{\mathcal{E}}| \to 1} \ln |\Sigma_{33}| \le 0 . \tag{1.7}$$

Аналогично рассуждая для оценки снизу, получим:

$$\lim_{|\min \sigma_{\mathcal{E}}| \to 0} \ln (\min_i \sigma^2_{\mathcal{E}})^{n-1} \ge -\infty . \tag{1.8}$$

Стремление максимальной стандартной ошибки к 1 взято ради наглядности и не нарушает общности рассуждения.

Поэтому, анализируя оценки (1.7) и (1.8), а также учитывая знак третьего слагаемого в (1.4), приходим к выводу, что чем меньше измерительные ошибки, тем больше значение $\ln\Psi$ и, следовательно, тем в меньшей окрестности точной гипотезы[x] мы должны выбирать решение задачи.

---

[x] Пусть $<Y>$ есть "точный" интеграл Лоренца[4]. Тогда, аппроксимируя $<Y>$ экспериментальным набором Y (при условии отсутствия кулоновского рассеяния и измерительных ошибок), можно получить несмещенную оценку вектора $\Theta^k \subseteq R_m$ (Θ^k - точная гипотеза). Однако мы имеем дело с реальным процессом, где присутствуют оба случайных фактора. Поэтому приведенные выше рассуждения для поиска Θ^k будут справедливыми, если известны полные смешения $\Delta Y = \Delta Y_{\text{кул.}} + \Delta Y_{\text{изм.}}$ для каждого данного трека. Совокупность величин $[\Delta Y_i]$ $(i = 0,1,2,\dots,n-1)$ определяет на плоскости трека реальную (ломаную) полосу около $<Y>$, в которой лежит оптимальная "экспериментальная" траектория частицы. Сужение этой полосы за счёт измерительных ошибок увеличивает вероятность выбора из всего многообразия траекторий оптимальной кривой в построенном вариационном процессе, а, следовательно, и уточняет предельную гипотезу в R_m .

И наоборот - чем больше измерительные ошибки, тем шире окрестность Бейеса[1], а, следовательно, и меньше вероятность выбрать лучшую гипотезу. Это приводит к необходимости более тщательного учета[2] измерительных ошибок, повышает требования к просмотрово-измерительной аппаратуре и оптическим алгоритмам восстановления пространственных точек вдоль следа.

На практике, как правило, матрица Σ_{33} выбирается усредненной по всем точкам, а это приводит к тому, что реальная "ΔY - полоса" приобретает "ϵ - размытие" вдоль всей границы (назовем так искажение "ΔY - полосы" для данного трека за счёт незнания истинных измерительных ошибок).

Однако следует обратить внимание на следующий факт. Задание Σ_{33} в (i-1) итерации по ММП приводит к тому, что вместо "ΔY - полосы" точной гипотезы решение отыскивается в "ϵ - размытии" этой полосы. Но, как следует из сущности ММП, предпочтение отдается той гипотезе, для которой $\ln\Psi$ принимает максимальное значение. Отсюда следует, что поскольку "объем" "ϵ - размытия" не меняется в данной итерации, то третий член в (1.4) не влияет на положение максимума $\ln\Psi$ в R_m , поскольку он уже не увеличивает значение $\ln\Psi$.

Остаётся единственный способ увеличения $\ln\Psi$ за счёт измерительных ошибок. Поскольку истинные ошибки входят в квадратичную форму Q, то их необходимо определить таким образом в пределах "ϵ -размытия", чтобы положительно определенная форма Q принимала наименьшее значение, а, следовательно, функция правдоподобия Ψ - наибольшее, что соответствует стягиванию "ϵ - размытия" в "ΔY-полосу", внутри которой оптимальным образом отыскивается предельная гипотеза.

Таким образом, приходим к выводу, что измерительные ошибки следует рассматривать как параметры и минимизировать по ним квадратичную форму Q .

Оценим теперь вклад в функцию правдоподобия (1.4) второго члена суммы, для чего воспользуемся выражениями (1.2)

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} \approx \left(\frac{\Theta_s^2}{2}\right)^{2(n-1)} \cdot \left| \begin{array}{c:c} \frac{x_i^2}{3}(3x_j - x_i) & [(x_j - x_{j-1})(2x_i - x_j - x_{j-1})] \\ (i \leq j = 1,2,3,\ldots,n-1) & (i \geq j = 1,2,3,\ldots,n-1) \\ \hdashline [(x_i - x_{i-1})(2x_j - x_i - x_{i-1})] & 2(x_i - x_{i-1}) \\ (j \geq i = 1,2,3,\ldots,n-1) & (i=j=1,2,3,\ldots,n-1) \end{array} \right| . \qquad (1.9)$$

Тождество (1.9) можно представить в виде:

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} \approx \left(\frac{\Theta_s^2}{2}\right)^{2(n-1)} \cdot |f(x)| . \qquad (1.9')$$

Запись определителя в виде (1.9)' подчеркивает следующий факт: $|f(x)|$ не зависит от Евклидова пространства R_m, если пренебречь ионизационными потерями на интервалах между двумя измеренными точками при вычислении элементов кулоновской матрицы. Зависимость кулоновской матрицы от гипотезы полностью вошла в множитель $\left(\frac{\Theta_s^2}{2}\right)^{2(n-1)}$.

Предположим, что точки на треке выбираются равномерно, т.е. толщина слоев ℓ_k одинакова (предположение равномерности и отсутствие потерь не влияют существенно на схему рассуждений).

Представим первый сомножитель в (1.9)' в виде

$$\left(\frac{\Theta_s^2}{2}\right)^{2(n-1)} = \left(\frac{\Theta_s^2}{2}\ell\right)^{2(n-1)} \cdot (\ell)^{-2(n-1)} . \qquad (2.0)$$

Сомножитель $\ell^{-2(n-1)}$ в (2.0) теперь можем отнести ко второму сомножителю в (1.9)' без потери общности рассуждений, т.е. определитель полной матрицы кулоновского рассеяния можно теперь записать в виде:

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} \approx \left(\frac{\Theta_s^2}{2}\ell\right)^{2(n-1)} \cdot F(x) , \qquad (2.1)$$

где

$$F(x) = \ell^{-2(n-1)} \cdot |f(x)| .$$

Нетрудно догадаться /3/, что $\left(\frac{\Theta_s^2}{2}\ell\right)^{2(n-1)}$ есть проекция на плоскость трека среднего квадрата угла многократного кулоновского рассеяния, возведенная в степень $2(n-1)$. Теперь можем записать выражение для $\ln$

$$\ln \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} \approx \ln F(x) + 2(n-1)\ln\left(\frac{\Theta_s^2}{2}\ell\right). \qquad (2.2)$$

Знак приближенного равенства в (2.2) выбран в силу допущений, о которых речь шла выше.

Первое слагаемое в (2.2) не влияет на положение максимума в R_m. Второе слагаемое в (2.2) можно записать в виде:

$$2(n-1)\ln\left(\frac{\Theta_s^2}{2}\ell\right) \approx 2\ln|\Sigma_{22}| . \qquad (2.3)$$

Таким образом, вклад в функцию правдоподобия (1.4) второго слагаемого, связанного с процессом многократного кулоновского рассеяния, определяется величиной $\ln|\Sigma_{22}|$.

Это обстоятельство наводит на рассуждения, аналогичные тем, которые проделаны выше при оценке вклада в функцию правдоподобия (1.4) третьего слагаемого, связанного с измерительными ошибками[x/]. Разница[xx/] в том, что теперь будем говорить о "Δ – размытии" "ΔY – полосы", которое обусловлено тем, что не известна точная гипотеза. Поэтому $\max \ln \Psi$ достигается при условии, что от итерации к итерации по ММП происходит стягивание "Δ –размытия" в "ΔY – полосу". Это условие выполняется, если кулоновские углы многократного рассеяния выбираются в качестве параметров наряду с классическими кинематическими параметрами Θ .

Справедлив и следующий вывод, который вытекает из приведенных выше рассуждений: чем меньше среднеквадратичные углы многократного кулоновского рассеяния, т.е. больше импульсы частиц, тем уже "ΔY – полоса", больше положительный вклад в функцию правдоподобия (1.4) от второго слагаемого, и, следовательно, больше вероятность выбора лучшей гипотезы. Верно и обратное утверждение. Этот вывод полностью подтверждается практикой обработки треков частиц.

Итак, квазианалогичная "реакция" функции правдоподобия на многократное кулоновское рассеяние и измерительные ошибки еще раз убеждает в том, что оба эти фактора должны учитываться одинаково тщательно[1,2] при геометрической реконструкции кинематических параметров заряженных частиц.

Применение ММП позволяет извлечь из случайной выборки обширную информацию о частице: Θ – вектор кинематических параметров, ϵ – вектор наиболее вероятных значений измерительных ошибок, допущенных при измерениях точек вдоль данного трека, Δ – вектор наиболее вероятных значений кулоновских углов многократного рассеяния при движении частицы.

---

x/ При этом необходимо учитывать явную зависимость $\Sigma_{22}(\Theta \subset R_m)$.

xx/ Имеется в виду случай квазилинейной задачи[4].

При этом, если воспользоваться результатами[5], то, как показано выше, схема применения ММП не отличается от схемы МНК для данного способа параметризации.

В заключение автор благодарит Н.Н. Говоруна, И.Н. Силина за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также В.И. Мороза и В.П. Жигунова за ценные советы.

Литература

1. Г.А. Емельяненко. Препринт ОИЯИ, Р10-5279, Дубна, 1970. ПТЭ.
2. Г.А. Емельяненко. Препринт ОИЯИ, Р10-5278, Дубна, 1970. ПТЭ.
3. Б. Росси. Частицы больших энергий. ГИТЛ, Москва, 1955.
4. Г.А. Емельяненко, К.П. Ломов, Г.И. Макаренко, В.И. Мороз, И.С. Саитов, А.П. Стельмах. Препринт ОИЯИ, Р-2829, Дубна, 1966.
5. Г.А. Ососков, П.В. Шляпников. Препринт ОИЯИ, Р10-4261, Дубна, 1969, ПТЭ.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1970 года.