ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P10 - 5278

Г.А. Емельяненко

ПОЛНАЯ ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ СНИМКОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1970

P10 - 5278

Г.А. Емельяненко

ПОЛНАЯ ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ КАМЕРНЫХ СНИМКОВ

Направлено в ПТЭ

Для отыскания эффективных оценок кинематических параметров частиц, как уже отмечалось в [1], необходимо построить функцию распределения условных вероятностей $P(Y/\Theta, L)$, в которой Y есть n -мерный вектор случайных измерений на треке, L -информация о движении частицы, $\Theta^k = (\theta_1^k, \theta_2^k, \ldots, \theta_m^k) \subseteq R_m$ - вещественное Евклидово пространство (пространство гипотез Θ, каждая из которых задается m -параметрами), $k \subseteq J$ - счётное множество целых неотрицательных чисел (номера гипотез). В [1] была получена нормальная плотность совместного распределения вероятностей для вектора случайных смещений точек трека от прямой линии и вектора случайных угловых отклонений, обусловленных многократным кулоновским рассеянием. При этом многократное кулоновское рассеяние рассматривалось как случайный марковский процесс.

Функция распределения имела вид:

$$n(\tilde{\tilde{y}}/0, {}_1\Sigma) = (2\pi)^{-(n-1)} |{}_1\Sigma|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} \tilde{\tilde{Y}}^T {}_1\Sigma^{-1} \tilde{\tilde{Y}}], \qquad (1.0)$$

где

$$ {}_1\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} {}_1\Sigma_{11} & {}_1\Sigma_{12} \\ \hline {}_1\Sigma_{21} & {}_1\Sigma_{22} \end{array}\right], \quad \tilde{\tilde{Y}} = (\tilde{\tilde{y}}_1\, \tilde{\tilde{y}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_{n-1}, \tilde{\tilde{y}}_n, \tilde{\tilde{y}}_{n+1}, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_{2(n-1)})^T = (\tilde{\tilde{Y}}^{(1)}, \tilde{\tilde{Y}}^{(2)})^T, $$

При этом подвектор $\tilde{\tilde{Y}}^{(1)} = (\tilde{\tilde{y}}_1^{(1)}, \tilde{\tilde{y}}_2^{(1)}, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_{n-1}^{(1)})^T$ – случайные смещения от прямой линии, $\tilde{\tilde{Y}}^{(2)} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1})^T$ – случайные угловые отклонения. T – означает транспонирование

$$ {}_1\Sigma_{11} = \frac{\Theta_s^2}{12} x_i^2 (3x_j - x_i) \ ; \quad {}_1\Sigma_{22} = \frac{\Theta_s^2}{2} (x_i - x_{i-1}) \tag{1.1} $$

$$ {}_1\Sigma_{12} = {}_1\Sigma_{21}^T = \begin{cases} 0, \text{ если } \quad j > i \\ \dfrac{\Theta_s^2}{4}[(x_j - x_{j-1})(2x_i - x_j - x_{j-1})], & i \geq j \end{cases} $$

$1 \leq i, j \leq n-1$; $\quad \Theta_s^2 = \mathrm{const}\, \dfrac{M^2 + P^2}{P^4}$, где M и P , соответственно, масса и импульс частицы /2/.

Учтем в нашей задаче второй множественный случайный фактор – измерительные ошибки.

Пусть $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n-1})^T$ – вектор измерительных ошибок, распределенных по закону $N(0, \Sigma_{33})$, что соответствует его физической интерпретации. Обратим внимание на тот факт, что берутся измерительные ошибки, начиная со второй физической точки на треке. Относительно учёта измерительной ошибки в первой физической точке речь пойдет несколько позже.

Случайный вектор ϵ обладает следующими свойствами:

$$M(\epsilon) = 0, \; M(\epsilon_i \epsilon_j) \overset{i \neq j}{=} 0, \; M(\epsilon \; \tilde{\tilde{y}}^{(1)}) = M(\epsilon \; \tilde{\tilde{y}}^{(2)}) = 0, \tag{1.2}$$

т.е. ковариационная матрица Σ_{33} строго диагональна, как и матрица ${}_1\Sigma_{22}$. Рассмотрим вектор $V = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{y}}^{(1)} \\ \tilde{\tilde{y}}^{(2)} \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{Y}} \\ \epsilon \end{bmatrix}$.

Подвекторы $\tilde{\tilde{Y}}$ и ϵ вектора V имеют частные нормальные распределения (1.0) и $n(\epsilon / 0, \Sigma_{33})$. Поэтому, согласно условиям независимости (1.2) и (T.2.3.1) /3/, существует совместное распределение вектора V с нормальной плотностью

$$n(v / 0, {}_2\Sigma) = (2\pi)^{-3/2 \cdot (n-1)} |{}_2\Sigma|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} V^T {}_2\Sigma^{-1} V], \tag{1.3}$$

где ковариационная матрица ${}_2\Sigma$ имеет вид:

$$
{}_2\Sigma = \left[\begin{array}{c|c|c} {}_1\Sigma_{11} & {}_1\Sigma_{12} & 0 \\ \hline {}_1\Sigma_{21} & {}_1\Sigma_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{array}\right]
$$

Теперь мы уже располагаем всем необходимым, чтобы записать явный вид функции правдоподобия. Но проделаем предварительно одно очень важное линейное преобразование вектора **V**

$$
\begin{aligned}
\Delta Y &= \tilde{\tilde{Y}}^{(1)} + \epsilon \\
\Delta &= \tilde{\tilde{Y}}^{(2)} \\
\epsilon &= \epsilon
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

(1.4) - это система $3(n-1)$ линейных уравнений.

В левой части первых $(n-1)$ уравнений этой системы стоят полные смещения от прямой линии (оси ox) за счёт кулоновских смещений и измерительных ошибок по оси OY .

В матричном представлении система (1.4) запишется так:

$$
\begin{pmatrix} \Delta Y \\ \Delta \\ \epsilon \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} E & 0 & E \\ \hline 0 & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & E \end{array}\right) \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{Y}}^{(1)} \\ \tilde{\tilde{Y}}^{(2)} \\ \epsilon \end{pmatrix} \qquad (1.5)
$$

здесь E - единичная матрица.

Нетрудно видеть, что якобиан преобразования (1.5) равен 1, т.е. преобразование является невырожденным линейным преобразованием.

Обозначим матрицу преобразования (1.5) через C.

Тогда, согласно теореме (T.2.4.1) /3/, $3(n-1)$ - мерный случайный вектор $(\Delta Y, \Delta, \epsilon)^T = W$ имеет совместное нормальное распределение с матрицей ковариаций

$$C_2 \Sigma C^T = \left(\begin{array}{c|c|c} {}_1\Sigma_{11} + \Sigma_{33} & {}_1\Sigma_{12} & \Sigma_{33} \\ \hline {}_1\Sigma_{21} & {}_1\Sigma_{22} & 0 \\ \hline \Sigma_{33} & 0 & \Sigma_{33} \end{array} \right) \tag{1.6}$$

Итак, получена совместная нормальная плотность распределения вероятностей вектора полных смещений точек трека от прямой линии (или от " реальной" траектории - для треков в магнитном поле), вектора угловых кулоновских отклонений и вектора измерительных ошибок.

$$n(w/0, \Sigma) = (2\pi)^{-3/2(n-1)} |\Sigma|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} W^T \Sigma^{-1} W] \tag{1.7}$$

Систему индексов здесь упростим, поскольку дальше будем работать только с распределением, записанным в форме (1.7). Поэтому, чтобы избежать в дальнейшем путаницы, еще раз выпишем значение каждого из символов, встречающихся в формуле (1.7):

$$W = \begin{pmatrix} (Y - \langle Y \rangle) = \Delta Y \\ \Delta \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

где $Y - (n-1)$ - мерный вектор случайных измерений на треке;

$\langle Y \rangle = \langle Y(\Theta^k, L) \rangle$ - вектор средних значений для Y, Δ - вектор случайных угловых отклонений за счёт кулоновского рассеяния в слое вещества толщиной ℓ; ϵ - вектор измерительных ошибок в точках случайных измерений; Σ - ковариационная матрица:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c:c:c} \Sigma_{11} + \Sigma_{33} & \Sigma_{12} & \Sigma_{33} \\ \hdashline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & 0 \\ \hdashline \Sigma_{33} & 0 & \Sigma_{33} \end{array} \right) \qquad (1.8)$$

где

$$\Sigma_{11} = \frac{\Theta_s^2}{12} x_i^2 (3x_j - x_i); \qquad \Sigma_{22} = \frac{\Theta_s^2}{2} (x_i - x_{i-1});$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T = \begin{cases} 0, & j > i \\ \frac{\Theta_s^2}{4} [(x_j - x_{j-1})(2x_i - x_j - x_{j-1})], & i \geq j. \end{cases}$$

Для всех $1 \le i, j \le n-1$

$$\Theta_s^2 = \mathrm{const}\,\frac{M^2+P^2}{P^4},$$

где M и P , соответственно, масса и импульс частицы[2], Σ_{33} – ковариационная матрица измерительных ошибок.

Нетрудно видеть, что детерминант

$$|\Sigma| = \left|\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right| \cdot |\Sigma_{33}| > 0,$$

поскольку ковариационная матрица Σ является положительно определенной матрицей.

Из положительной определенности матрицы Σ следует (см.[4] теорема Сильвестра), что главные миноры матрицы положительны. Поэтому матрица Σ^{-1} существует. Найдем теперь весовую матрицу Σ^{-1}, для чего последовательно несколько раз подряд воспользуемся формулами Фробениуса[5] для вычисления матриц, обратных блочным матрицам .

Рассмотрим матрицу

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} + \Sigma_{33} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right), \qquad (1.9)$$

Поскольку матрица Σ_{22} размерности $[n-1, n-1]$ является диагональной, то ее обращение не представляет труда. Воспользовавшись формулами Фробениуса /5/, для M^{-1} получим

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} K^{-1} & -K^{-1}\,\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\,K^{-1} & \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}\,\Sigma_{21}\,K^{-1}\,\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1} \end{array}\right), \qquad (2.0)$$

где

$$K = ((\Sigma_{11} + \Sigma_{33}) - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}).$$

Матрицу Σ (1.8) теперь запишем с использованием матрицы M (1.9) в следующем виде:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & \begin{array}{c} \Sigma_{33} \\ \hline 0 \end{array} \\ \hline \Sigma_{33} & 0 & \Sigma_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & D_2 \\ \hline D_3 & \Sigma_{33} \end{array}\right), \qquad (2.1)$$

где обозначим

$$D_2 = (\Sigma_{33}, 0)^T, \quad D_3 = (\Sigma_{33}, 0).$$

Повторно применяя метод последовательного разбиения на клетки Фробениуса, для матрицы Σ^{-1} получим, воспользовавшись тем, что матрица Σ_{88} – диагональна и ее обращение не представляет труда

$$\vec{\Sigma}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} K_2 & L_2 \\ \hline M_2 & N_2 \end{array}\right), \qquad \text{где } K_2 = (M - D_2 \Sigma_{88}^{-1} D_8)^{-1}, \tag{2.2}$$

$$L_2 = -K_2 D_2 \Sigma_{88}^{-1}, \; M_2 = -\Sigma_{88}^{-1} D_8 K_2, \quad N_2 = \Sigma_{88}^{-1} - \Sigma_{88}^{-1} D_8 L_2 .$$

Далее воспользуемся формальными операциями над матрицами

$$D_2 \Sigma_{88}^{-1} D_8 = \left(\begin{array}{c} \Sigma_{88} \\ \hline 0 \end{array}\right) \Sigma_{88}^{-1} \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{88} & 0 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{88} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$K_2^{-1} = M - D_2 \Sigma_{88}^{-1} D_8 = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right),$$

т.е. K_2 совпадает с матрицей M^{-1} (2.0), если бы в матрице M (1.9) в левой верхней клетке отсутствовала добавка Σ_{88}. Если теперь обозначить

$$K_1 = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21})^{-1}; \quad L_1 = -K_1 \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1},$$

то матрица K_2 принимает вид:

$$K_2 = \left(\begin{array}{c|c} K_1 & L_1 \\ \hline L_1^T & \Sigma_{22}^{-1} - \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} L_1 \end{array}\right).$$

Аналогичным образом, теперь уже воспользовавшись последним представлением для K_2, мы получим выражения для матриц L_2, M_2, N_2.

$$M_2 = -[K_1 \ , L_1]; \quad L_2 = -\left[\frac{K_1}{L_1^T}\right]$$

$$N_2 = [\ \Sigma_{33}^{-1} + K_1],$$

поскольку K_1– симметрическая.

Итак, можем записать окончательный вид весовой матрицы (ковариационная и весовая матрица приводятся для сравнения вместе)

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c|c} \Sigma_{11}+\Sigma_{33} & \Sigma_{12} & \Sigma_{33} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & 0 \\ \hline \Sigma_{33} & 0 & \Sigma_{33} \end{array}\right] \qquad \Sigma^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} K & -K\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} & -K \\ \hline -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}K & \Sigma_{22}^{-1}+R & \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}K \\ \hline -K & K\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} & \Sigma_{33}^{-1}+K \end{array}\right] \tag{2.3}$$

где

$$K = (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\ \Sigma_{21})^{-1}, \quad R = \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\ K\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}.$$

Теперь можно получить явный вид квадратичной формы в показателе экспоненты распределения (1.7) для случайного вектора $\mathbf{W}$

$$W^T\Sigma^{-1}W = \Delta Y^T\{K\}\Delta Y + \Delta^T\{\Sigma_{22}^{-1} + R\}\Delta + \epsilon^T\{\Sigma_{33}^{-1} + K\}\epsilon -$$

$$-2\Delta Y^T\{K\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\}\Delta - 2\Delta Y^T\{K\}\epsilon + 2\Delta^T\{\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}K\}\epsilon, \tag{2.4}$$

где матрицы K и R определены выше.

Итак, найдена квадратичная форма (2.4), соответствующая ковариационной матрице Σ – полной ковариационной матрице процесса геометрической реконструкции кинематических параметров для заряженных частиц тяжелее электрона. Тем самым закончено построение функции распределения условных вероятностей $P(Y/\Theta, L)$.

В дальнейшем будем рассматривать полную функцию правдоподобия (1.7) с квадратичной формой (2.4) в показателе экспоненты.

В заключение автор благодарит Н.Н. Говоруна, И.Н. Силина за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также В.И. Мороза, Г.А. Ососкова, В.П. Жигунова за полезные советы.

Литература

1. Г.А. Емельяненко. Препринт ОИЯИ, Р10- 5279, , Дубна, 1970.
2. Б. Росси. Частицы больших энергий. ГИТЛ, Москва, 1955.
3. Т. Андерсон. Введение в многомерный статистических анализ. ГИТЛ, Москва, 1961.
4. А.К. Фадеев и В.Н. Фадеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, Москва, 1960.
5. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. Наука, Москва, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июля 1970 года.