

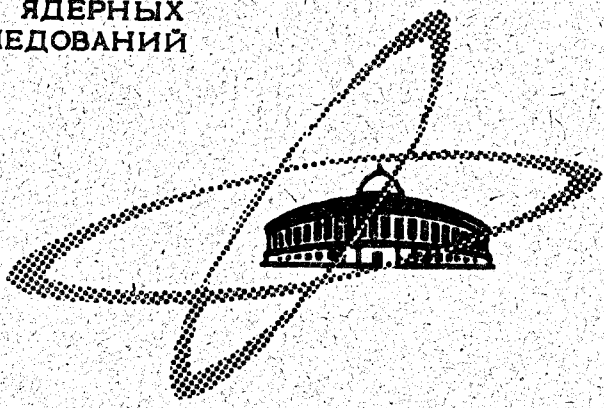
13/x-69

Г-376

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P10 - 4579



Л.Н.Гердюков, Б.А.Манюков, П.В.Шляпников

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ
КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТРЕКОВ
ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

АККОРТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

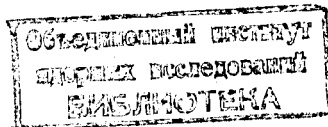
1969

P10 - 4579

Л.Н.Гердюков, Б.А.Манюков, П.В.Шляпников

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ
КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТРЕКОВ
ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в ЯФ



4995/2 нр.

Отыскание оценок кинематических параметров треков для частиц тяжелее электрона по заданной выборке координат точек трека основано на требовании максимальности функции правдоподобия ^{/2/}:

$$\Phi(\ell, y, h_0) = (2\pi)^{-N/2} |\det G^{-1}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - \langle y \rangle)^T G^{-1}(y - \langle y \rangle)\right), \quad (1)$$

в которой $G^{-1} = G^{-1}(sc) + G^{-1}(mes)$, где $G^{-1}(sc)$ - матрица многократного рассеяния, $G^{-1}(mes)$ - матрица ошибок измерения, а $\langle y \rangle$ - среднее значение случайного вектора y . В аппроксимирующей функции $\langle y \rangle$ и матрице $G^{-1}(sc)$ должны быть учтены потери энергии на ионизацию.

Если для частицы с массой m и начальным импульсом p_0 задан закон изменения импульса $p(\ell, p_0)$ с длиной трека ℓ , то

$$G_{ik}^{-1}(sc) = (2/\kappa^2) (2J_3(\ell, h_0) - (\ell_k - \ell_i) J_2(\ell, h_0)), \quad [3] \quad (2)$$

где

$$J_1(\ell, h_0) = \int_0^\ell n(t, h_0) dt, \quad J_2(\ell, h_0) = \int_0^\ell J_1(t, h_0) dt, \quad J_3(\ell, h_0) = \int_0^\ell J(t, h_0) dt \quad (3)$$

$$\kappa^2 = 4m^2 X_0 / E_s^2, \quad h(\ell, h_0) = p(p_0, \ell) / m, \quad n(\ell, h_0) = (1 + h^2(\ell, h_0)) / h^4(\ell, h_0).$$

Здесь $E_s = \text{const}$, X_0 - радиационная длина среды.

Изменение импульса вследствие ионизационных потерь хорошо описывается формулой Бете-Блоха ^{/4/}, которая для функции $h(\ell, h_0)$ имеет вид:

$$-dh/d\ell = g(1+h^2)^{3/2} h^{-3} b(h), \quad (4)$$

где $g = 0,3(Z/A) \epsilon_{\text{эф}} d_0 (m_e/m)$, $b(h) = 2 \ln(2m_e/I_{\text{эф}}) + 4 \ln h - 2h^2(1+h^2)$, d_0 (г.см⁻³) - плотность среды, m_e - масса электрона, Z и A - зарядовое и массовое числа, $I_{\text{эф}}$ - эффективный потенциал ионизации. Интегрирование уравнения (4) основано на том, что $b(h)$ является медленно меняющейся функцией h , поэтому $b(h)$ считается постоянным и равным значению $b(h_0)$. В этом приближении

$$h(\ell, h_0) = ((D^2(\ell, h_0) - 4)/2 + D(\ell, h_0)(D^2(\ell, h_0) - 4)^{1/2} / 2)^{1/2}, \quad (5)$$

где

$$D(\ell, h_0) = a(h_0) - b(h_0) \ell, \quad a = (2 + h_0^2)(1 + h_0^2)^{-1/2}.$$

При найденной функции $h(\ell, h_0)$ вычисление интегралов J_1 , J_2 , J_3 (3) не представляет труда и, таким образом, матрица многократного рассеяния (2) полностью определена.

Для вычисления аппроксимирующей функции $\langle y(\ell) \rangle$ запишем ее в виде

$$\langle y(\ell) \rangle = \int_0^{\ell} ds \sin \left(\int_0^s \rho(\lambda, h_0) d\lambda \right),$$

где кривизна трека $\rho(\lambda, h_0) = 0,03 B / (m h(\lambda, h_0))$, B - индукция магнитного поля. Так как $\rho(\lambda, h_0) = \rho_0 + \Delta \rho_{\text{юп}}$ и $\Delta \rho_{\text{юп}}$ мало по сравнению с

ρ_0 , то в разложении синуса в ряд величиной $\Delta\rho_{\text{ион}}$ можно пренебречь во всех членах, кроме первого. Поэтому $\langle y(\ell) \rangle = y_{\text{окр}} + \Delta y_{\text{ион}}$, где

$$y_{\text{окр}}(\ell) = \rho_0 \ell^2 / 2! - \rho_0^3 \ell^4 / 4! + \rho_0^5 \ell^6 / 6! \quad (6)$$

$$\Delta y_{\text{ион}}(\ell) = \int_0^\ell ds \int_0^s d\lambda (\rho(\lambda, h_0) - \rho_0).$$

Воспользовавшись (5), из (6), найдем

$$\Delta y_{\text{ион}}(\ell) = \frac{0,03B}{mb^2 \cos \alpha} \left(\left(s + \frac{1}{s} \right) \ln \frac{s_0(1 + \sqrt{1-s^2})}{s(1 + \sqrt{1-s_0^2})} + \sqrt{1-s^2} \left(s + \frac{1}{s} - \frac{1}{s_0} \right) - 2 \left(\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} - \frac{\sqrt{1-s_0^2}}{s_0} \right) - \frac{1}{2} (s\sqrt{1-s^2} - s_0\sqrt{1-s_0^2}) - \frac{1}{2} (\arcsin s - \arcsin s_0) - \rho_0 \ell^2 / 2, \right. \quad (7)$$

где

$$s = (a - b\ell - ((a - b\ell)^2 - 4)^{1/2}) / 2, \quad s_0 = (a - (a^2 - 4)^{1/2}) / 2.$$

Формулу (7) можно упростить, разложив ее в быстро сходящийся ряд по степеням $b\ell$:

$$\Delta y_{\text{ион}}(\ell) = \frac{0,03B}{mb^2 \cos \alpha} \left(\sum_k \Gamma_k(s_0) (b\ell)^k \right) - \rho_0 \ell^2 / 2. \quad (8)$$

Путем не очень сложных, но громоздких преобразований получим следующее простое выражение при учете четырех членов ряда (8):

$$\Delta y_{\text{ион}}(\ell) = \rho_0 (1 + h_0^2) b \ell^3 / (6h_0^4) + \rho_0 (5 + 2h_0^2) (1 + h_0^2) b^2 \ell^4 / (24h_0^8).$$

Таким образом, ковариационная матрица G^{-1} и аппроксимирующая функция $\langle y(\ell) \rangle$, входящие в функцию правдоподобия (1), полностью

определены, и можно приступить к отысканию наиболее правдоподобных оценок кинематических параметров $x/$. Поскольку метод наименьших квадратов в большинстве случаев обеспечивает почти столь же эффективную оценку параметров, как и метод максимального правдоподобия ^{17/}, то отыскание параметров сводится к минимизации по ним функционала $\chi^2 = (y - \langle y \rangle)^T G (y - \langle y \rangle)$ с определенными выше G и $\langle y \rangle$.

Изложенный метод отыскания оценок параметров реализован в программе "HTRACK", написанной на алгоритмическом языке ФОРТ-РАН для ЭВМ БЭСМ-6 и СДС-1604А. Программа легко сшивается с общей геометрической программой и может быть использована для обработки снимков с пузырьковых камер с любым заполнением, если только неоднородность магнитного поля в камере не очень велика.

Программа HTRACK была использована для статистической проверки метода вычисления кинематических параметров путем обчета по ней фиктивных треков, сгенерированных по методу Монте-Карло с помощью специально написанной программы.

Розыгрыш фиктивных треков осуществлялся при фиксированных направляющих косинусах трека в первой точке и однородном магнитном поле ($B = 1,67$ тл). В качестве рабочей среды взят пропан и $E_s = 15$ Мэв. Ошибки измерения были выбраны равными 0,1 мм в плоскости XY, перпендикулярной магнитному полю, и 0,4 мм - в вертикальной плоскости. Генерировались треки двух частиц: π -мезонов и протонов при трех начальных импульсах: 500, 1000 и 1500 Мэв. Для каждой из частиц при заданном импульсе было сгенерировано 400 фиктивных треков. Полные

$x/$ Чтобы учесть неоднородность магнитного поля в камере, можно записать аппроксимирующую функцию $\langle y(\ell) \rangle$ в виде

$$\langle y(\ell) \rangle = \int_0^{\ell} ds \sin\left(\frac{0,03}{m} \int_0^s \frac{B_z(\lambda)}{h(\lambda, h_0)} d\lambda\right),$$

когда $B_x \approx B_y \approx 0$. Зависимость $B_z(\lambda)$ обычно легко аппроксимируется простой аналитической функцией, так что полученная формула для $\langle y(\ell) \rangle$ легко обобщается на случай, когда $B_z(\lambda) \neq \text{const}$. Если же зависимость $B_z(\lambda)$ не является простой и (или) нельзя воспользоваться приближением $B_x \approx B_y \approx 0$ для нахождения $\langle y(\ell) \rangle$ необходимо интегрировать уравнения Лоренца ^{15,6/}.

длины треков и количество точек на треке составляли: 20 см ($N = 20$) при $p_0 = 500$ Мэв; 67,5 см ($N = 15$) при $p_0 = 1000$ Мэв и 100 см ($N = 20$) при $p_0 = 1500$ Мэв.

Из приведенных выше формул следует, что как матрица многократного рассеяния, так и аппроксимирующая функция зависят от массы частицы. Поэтому программа HTRACK обчисляет трек при разных гипотезах о массе частицы. При обчете фиктивных треков проверялось только две гипотезы: π -мезонная и протонная. Для ссылок на статистическую выборку, в которой треки сгенерированы по гипотезе a при начальном импульсе M , а затем обчислены программой HTRACK по гипотезе b , введено обозначение $b(aM)$.

В результате обчета фиктивных треков для каждой статистической выборки были получены экспериментальные распределения по значениям кинематических параметров (импульсу p , азимутальному углу ϕ , углу наклона трека α к плоскости XY) и их ошибкам (Δp , $\Delta \phi$, $\Delta \alpha$). В приводимой ниже таблице для всех выборок даны: средние значения \bar{p} , $\bar{\phi}$, $\bar{\alpha}$ и среднеквадратичные отклонения σ_p , σ_ϕ , σ_α соответствующих распределений по p , ϕ и α ; средние значения $\overline{\Delta p}$, $\overline{\Delta \phi}$, $\overline{\Delta \alpha}$ соответствующих распределений ошибок Δp , $\Delta \phi$, $\Delta \alpha$. Некоторые из этих распределений показаны на рисунках 1-4.

Как видно из таблицы, средние значения \bar{p} , $\bar{\phi}$, $\bar{\alpha}$ в случае верной гипотезы, т.е. для выборок $p(pM)$, $\pi(\pi M)$ при всех трех значениях M в пределах статистических ошибок согласуются с ожидаемыми значениями: $\bar{p} = M$, $\bar{\phi} = 0$, $\bar{\alpha} = 0$ (см. также рис. 1,2). Среднеквадратичные отклонения σ_p , σ_ϕ , σ_α в пределах статистических ошибок совпадают с ожидаемыми величинами и со средними значениями $\overline{\Delta p}$, $\overline{\Delta \phi}$, $\overline{\Delta \alpha}$, соответственно. Ошибки параметров Δp , $\Delta \phi$, $\Delta \alpha$ распределены по нормальному закону (рис. 3).

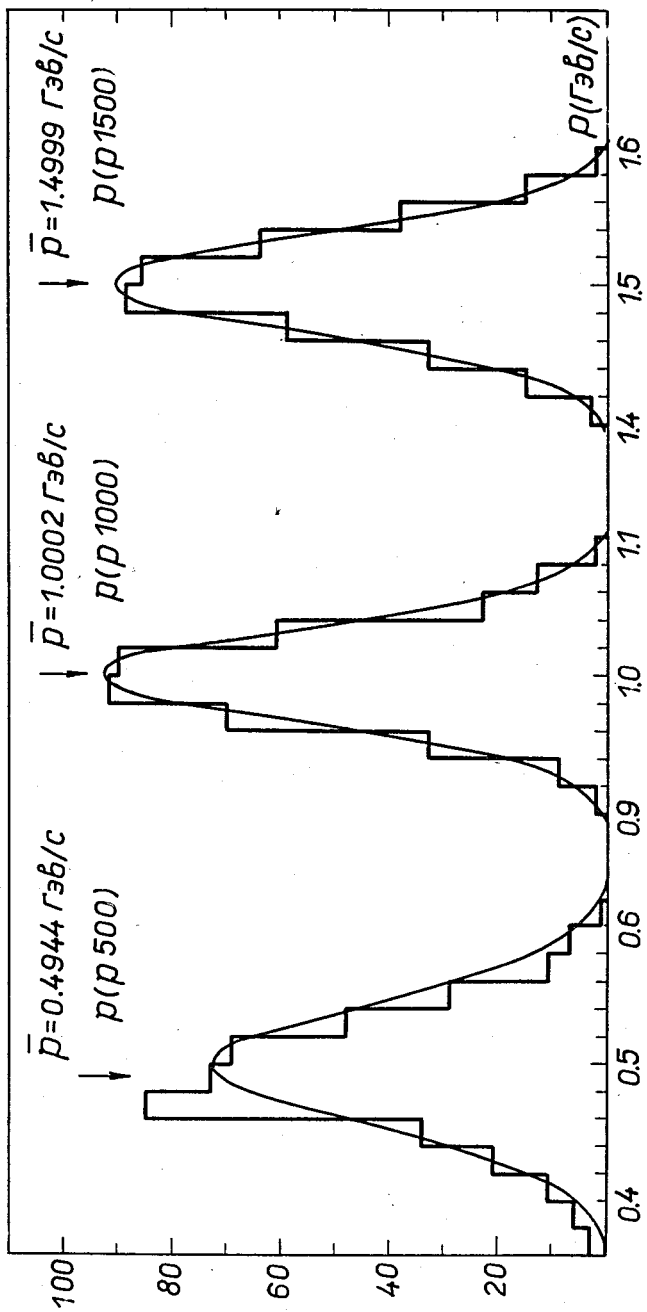


Рис.1. Распределения по импульсам протонов для статистических выборок $p(\rho 500)$, $p(\rho 1000)$ и $p(\rho 1500)$, соответственно. Гладкие кривые - ожидаемые распределения.

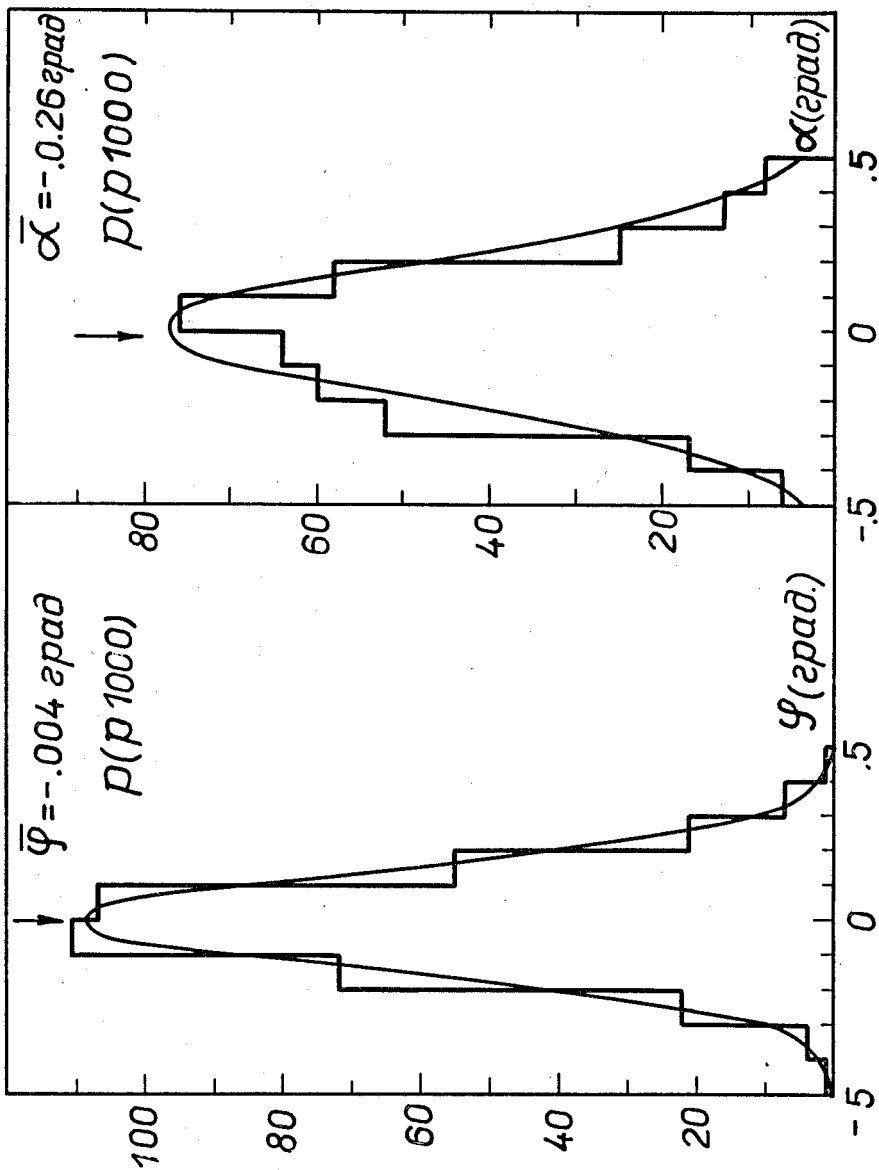


Рис.2. Распределения по азимутальному углу φ и углу наклона трека α для статистической выборки p (p 1000). Гладкие кривые - ожидаемые распределения.

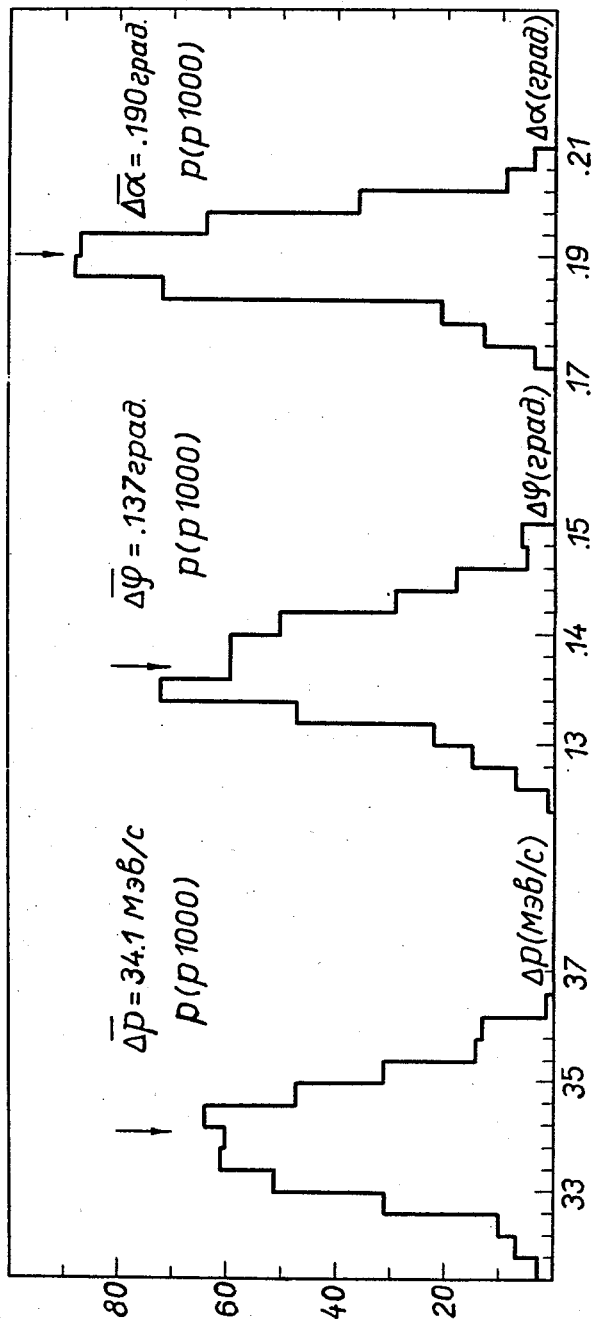


Рис.3. Распределения ошибок кинематических параметров Δp , $\Delta \phi$, $\Delta \alpha$ для выборки $r(1000)$.

В то же время в случае неверной гипотезы, т.е. для выборок $p(\pi M)$, $\pi(p M)$, среднее значение импульса \bar{p} оказывается смещенным и σ_p не совпадает с $\Delta \bar{p}$, причем этот эффект проявляется тем сильнее, чем меньше импульс. При $M = 500, 1000$ Мэв/с смещение \bar{p} выходит за пределы ошибок, что наглядно демонстрирует рис.4, на котором экспериментальные распределения по импульсу для выборок $\pi(p 500)$, $p(\pi 500)$ сравниваются с соответствующими ожидаемыми распределениями для верных гипотез: протонной и π -мезонной. То же самое можно сказать и об оценках ϕ и α для неверных гипотез, хотя в этом случае смещение $\bar{\phi}$ и $\bar{\alpha}$ менее выражено.

Наконец, моменты экспериментальных χ^2 -распределений ($\bar{\chi}^2$ и σ_{χ^2}) в пределах статистических ошибок согласуются с ожидаемыми значениями для верных гипотез и отличаются от последних для неверных гипотез тем сильнее, чем меньше импульс. На рис. 5 для примера приведены экспериментальные χ^2 -распределения для выборок $r(p 1000)$ и $\pi(p 1000)$, которые сравниваются с теоретическим χ^2 -распределением для 12 степеней свободы.

Таким образом, статистическое испытание показало, что в том случае, когда масса частицы угадана верно, наш метод обеспечивает получение несмещенных и эффективных оценок кинематических параметров. При неверной гипотезе о массе частицы оценки оказываются смещенными. Здесь важно заметить, что при большей плотности рабочей среды увеличиваются не только ошибки кинематических параметров, но и смещение параметров при неверных гипотезах о массе частицы. Это особенно существенно для последующей обработки всего события в целом по программам идентификации каналов реакций, так как повышает вероятность выделения истинного канала реакции из большого числа конкурирующих гипотез.

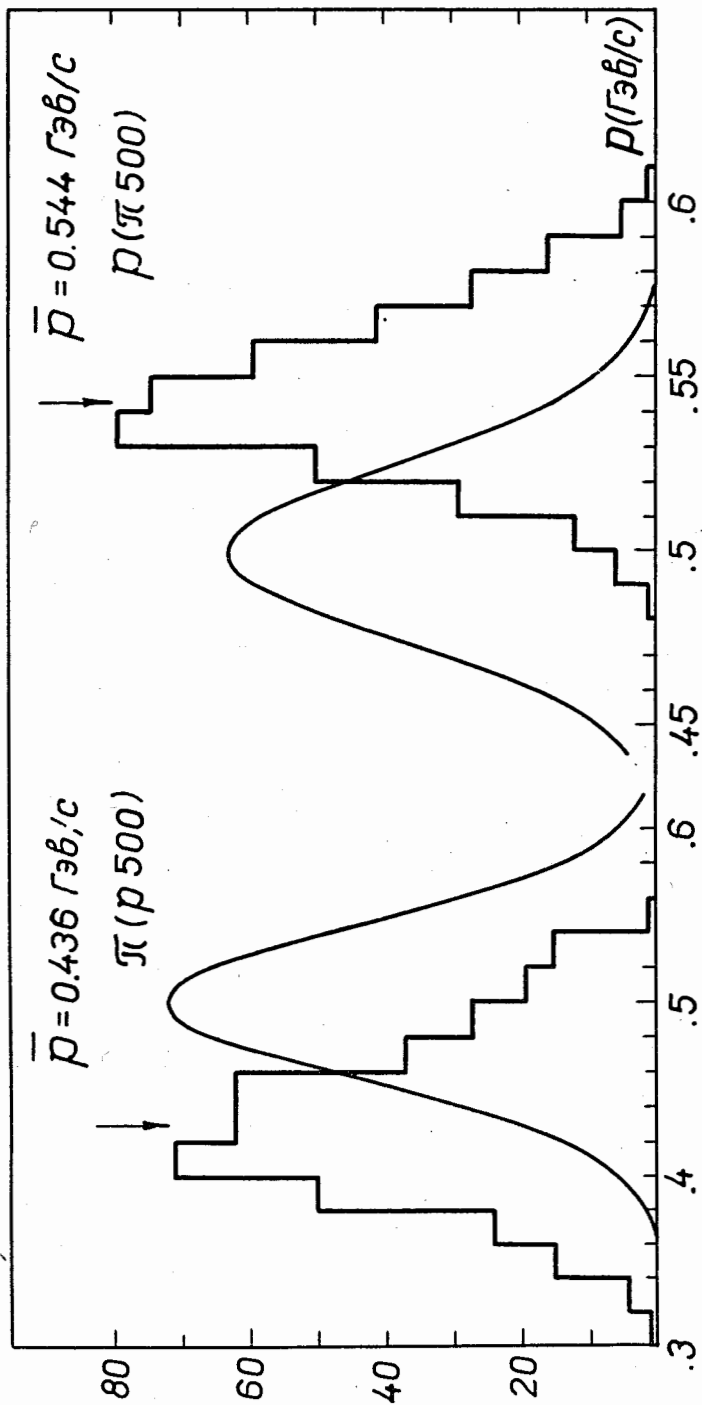


Рис.4. Распределения по импульсам для выборок $\pi(p 500)$ и $p(\pi 500)$.
 Гладкие кривые - ожидаемые распределения при верных гипотезах: протонной - для выборки $\pi(p 500)$ и π -мезонной - для выборки $p(\pi 500)$.

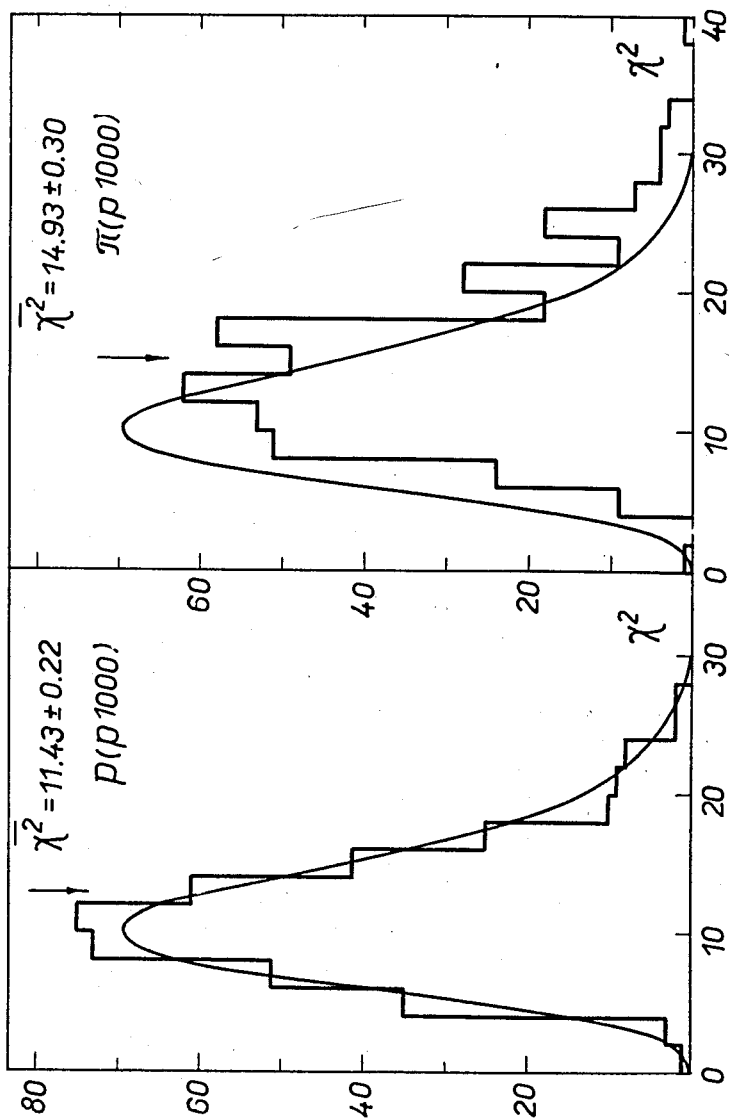


Рис.5. χ^2 -распределение для выборки $p(r 1000)$ и $\pi(r 1000)$.
 Гладкие кривые - теоретическое χ^2 -распределение с 12 степенями свободы.

В заключение авторы выражают свою благодарность проф. В.П.Джелепову за поддержку работы и постоянное внимание.

Л и т е р а т у р а

1. А.В. Богомолов и др. ПТЭ, №1, 61 (1964).
2. Б.А. Манюков, П.В. Шляпников. Препринт ОИЯИ Р10-4256, Дубна 1969.
3. В.А. Manyukov, P.V. Shlyapnikov. Preprint JINR E10-4447, Dubna (1969).
4. Б. Росси, К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом". ИЛ, Москва (1948).
5. W.G. Moorhead. Preprint CERN DD/DP/67/6 (1967).
6. Н.Ф. Маркова, В.И. Мороз, В.И. Никитина, А.П. Стельмах, Г.Н. Тенюкова. ПТЭ, №6, 210 (1968).
7. Б.А. Манюков, П.В. Шляпников. Препринт ОИЯИ Р10-4574, Дубна 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел

1 июля 1969 года.

Т а б л и ц а

	$\rho(p500)$	$\pi(p500)$	$\rho(p500)$	$\pi(p500)$	$\rho(p1000)$	$\pi(p1000)$	$\rho(p1000)$	$\pi(p1000)$	$\rho(p1500)$	$\pi(p1500)$	$\rho(p1500)$	$\pi(p1500)$
$\bar{\rho}(M\&B/c)$	494.39	498.51	435.71	435.71	1000.15	999.80	1028.94	968.92	1499.93	1499.77	1510.22	1488.02
$\sigma_{\rho}(M\&B/c)$	4.372	25.18	51.12	51.12	33.21	27.03	24.89	36.48	34.35	30.37	28.78	35.83
$\Delta\rho(M\&B/c)$	4.591	27.14	23.76	23.76	34.07	27.90	34.93	27.06	37.93	33.55	38.15	32.74
$\bar{\rho}(град)$	-0.264	-0.065	-0.045	-0.045	-0.043	-0.039	0.193	0.343	-0.038	-0.033	0.006	-0.092
$\sigma_{\rho}(град)$	0.2732	0.1611	0.2977	0.2977	0.1389	0.1109	0.1124	0.1412	0.0914	0.0810	0.0808	0.0970
$\Delta\rho(град)$	0.2693	0.1585	0.2376	0.2376	0.1370	0.1093	0.1327	0.1119	0.0909	0.0808	0.0903	0.0683
$\bar{\alpha}(град)$	0.169	0.062	0.093	0.093	-0.258	-0.208	-0.215	-0.254	0.072	0.063	0.078	0.072
$\sigma_{\alpha}(град)$	0.3718	0.2145	0.3960	0.3960	0.2016	0.1598	0.1624	0.2037	0.1219	0.1086	0.1072	0.1235
$\Delta\alpha(град)$	0.3591	0.2155	0.3336	0.3336	0.1900	0.1502	0.1839	0.1539	0.1263	0.1118	0.1254	0.1124