ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р10 - 4261

Г.А.Ососков, П.В.Шляпников

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТРЕКОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1969

P10 - 4261

Г.А.Ососков, П.В.Шляпников

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТРЕКОВ

Направлено в ПТЭ

В предыдущей статье [1], используя представление о многократном рассеянии, как о случайном марковском процессе, авторы нашли многомерную функцию распределения случайных смещений точек трека из-за многократного рассеяния:

$$F(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (2\pi)^{-n} |G^{-1}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\bar{y})G(y-\bar{y})\right), \qquad (1)$$

где $y(y_1, \ldots, y_n)$ – вектор случайных смещений на длинах трека $(x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{y}$ – его среднее значение, а G^{-1} – ковариационная матрица (матрица многократного рассеяния) [2] вектора y:

$$G^{-1}_{ik} = E_s^2\, x_i^2\, (3x_k - x_i)/(12 X_0\, p^2), ^{x/} \qquad (2)$$

$E_s = \mathrm{const}$, X_0 – радиационная длина среды, p – импульс частицы.

Практически, исходя из единственной реализации случайного процесса, необходимо найти наиболее правдоподобные оценки кинематических параметров трека. При применении метода максимума правдоподобия (ММП) эти оценки находятся из условия минимальности логарифмической функции правдоподобия, которая, как следует из (1), с точностью до постоянной равна

---

x/ Для простоты мы рассматриваем здесь случай, когда $pc \gg mc^2$.

$$L(x,y/a) = -\frac{1}{2}\ln|G^{-1}| - \frac{1}{2}(y-\bar{y})G(y-\bar{y}) . \qquad (3)$$

Ковариационная матрица G^{-1} является функцией искомого параметра -импульса частицы (или кривизны трека $a = (0{,}3\,H)/p$ в его первой точке; H - величина магнитного поля). Поэтому оценки параметров, найденные при применении ММП и метода наименьших квадратов (МНК), когда минимизируется функционал

$$\chi^2 = (y-\bar{y})\ G\ (y-\bar{y}) , \qquad (4)$$

вообще говоря, отличаются друг от друга.

Ниже будет показано, что при реализуемых в пузырьковых камерах условиях эффективность оценок, полученных этими двумя методами, практически одинакова, что делает неоправданным применение ММП вместо более простого метода/2/, основанного на минимизации функционала (4). Этот вывод не может быть сделан на основе работ/3/, авторы которых ошибочно опустили в рассматриваемой ими функции правдоподобия член, аналогичный $-\frac{1}{2}\ln|G^{-1}|$ в (3).

Пусть для простоты единственным подлежащим определению пара - метром является кривизна трека a. Для сравнения оценок в МНК и ММП необходимо задать вектор средних значений $\bar{y}$. Пусть движение частицы происходит в плоскости xy, перпендикулярной магнитному полю, и начало координат совпадает с первой точкой трека, а направление оси x - с направлением движения частицы в этой точке. При $ax<1$ с достаточной в данном случае точностью $\bar{y} = ax^2/2$. Тогда решение уравнения $\partial\chi^2/\partial a = 0$ приводит к следующей оценке искомого параметра

$$\tilde{\tilde{a}} = 2\,(ygy)/(x^2gy) \qquad (5)$$

с дисперсией

$$D(\tilde{\tilde{a}}) = 4a^2/(x^2gx^2) . \qquad (6)$$

При минимизации функции правдоподобия (3) соответствующие величины равны

$$\tilde{a} = -(x^2gy)(1-\sqrt{1+16n(ygy)/(x^2gy)^2})/4n \qquad (7)$$

$$D(\tilde{a}) = 4a^2(1-4n/(x^2gx^2))^2/(x^2gx^2) , \qquad (8)$$

где использовано обозначение $G^{-1} = a^2 g^{-1}$ и n - число точек трека. Можно показать, что математические ожидания оценок (6) и (7) совпадают (с точностью до третьего члена в разложении корня в (7) в ряд) и равны $\mathcal{E}(\tilde{a}) = a$. Эффективность же ММП по сравнению с МНК характеризуется значением коэффициента $s = (1-4n/(x^2gx^2))^2$. Для его оценки возьмем только диагональные члены матрицы g^{-1} и предположим, что расстояния между точками трека одинаковы. Тогда при величине магнитного поля $H = 1{,}7$ тл $4n/(x^2gx^2) = 2/(LX)$, где L -полная длина трека в мм, а X - радиационная длина среды, отнесенная к радиационной длине пропана. Мы видим, что даже при очень тяжелых жидкостях коэффициент s не сильно отличается от единицы.

Неоднородность магнитного поля в камере и ионизационные потери учитываются только при задании вектора $\bar{y}$. Учёт же ошибок измерений сводится лишь к замене матрицы G^{-1} в (3) и (4) на матрицу $G^{-1} + G^{-1}$ (изм), где G^{-1} (изм) - ковариационная матрица случайных смещений из-за ошибок измерения, не зависящих от многократного рассеяния. Поэтому эти эффекты не могут изменять заключения о нецелесообразности применения ММП, вообще говоря, более сложного, чем МНК, для оценки кинематических параметров треков в пузырьковых камерах.

Литература

1. Б.А.Манюков, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ, Р10-4256, Дубна, 1969.
2. И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ, Р-2146 , Дубна, 1965.
3. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Саитов, А.П.Стельмах. Препринт ОИЯИ Р-2828, Дубна, 1966. Г.А.Емельяненко, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Саитов, А.П.Стельмах. ПТЭ, №5, 128 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел

8 января 1969 года.