ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р10 - 4256

Б.А.Манюков, П.В.Шляпников

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СМЕЩЕНИЙ ТОЧЕК ТРЕКА ИЗ-ЗА КУЛОНОВСКОГО МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1969

P10 - 4256

Б.А.Манюков, П.В.Шляпников

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СМЕЩЕНИЙ ТОЧЕК ТРЕКА ИЗ-ЗА КУЛОНОВСКОГО МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Направлено в ПТЭ

Оценки кинематических параметров трека находятся методами наименьших квадратов или максимума правдоподобия по известной совокупности координат его точек, являющейся одной реализацией случайного процесса - прохождения заряженной частицы через вещество. Поскольку точность оценок параметров существенно зависит от влияния кулоновского многократного рассеяния, то для корректного применения этих методов необходимо знать многомерную функцию распределения случайных смещений точек трека из-за многократного рассеяния. В настоящей работе эта функция распределения выведена на основе представления о многократном рассеянии как о случайном марковском процессе. Показано, что ковариационная матрица случайных смещений точек трека совпадает с так называемой матрицей многократного рассеяния /1/.

Марковское свойство многократного рассеяния состоит в том, что вероятность случайного смещения частицы на расстояние y_{i+1} и случайного отклонения на угол θ_{i+1} на длине трека x_{i+1} (см. рисунок) определяется только значениями y_i, θ_i в предыдущей точке и не зависит от значений этих величин в других точках. Это означает, что марковский процесс полностью определяется заданием условных вероятностей $v(x_{i+1}, y_{i+1}, \theta_{i+1} | x_i, y_i, \theta_i)$, где $i=0,1,\dots,n-1$, и начальным распределением $v(x_0, y_0, \theta_0)$ /2/. Если поэтому выбрать начало координат в первой точке трека, так, чтобы ось x совпадала с направлением движения частицы в этой точке, то многомерная функция распределения будет иметь вид

$$\Phi(x_1, y_1, \theta_1, \dots, x_n, y_n, \theta_n) = \prod_{i=0}^{n-1} v(x_{i+1}, y_{i+1}, \theta_{i+1} | x_i, y_i, \theta_i) .$$

Если для двух соседних точек A и B на рисунке применить распределение Ферми/3/

$$v(x_B, y_B, \theta_B | x_A, y_A, \theta_A) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi \theta_s^2 (AC)^2} \exp\left(-\frac{4}{\theta_s^2}\left(\frac{\Delta\theta^2}{AC} - \frac{3\Delta\theta(BC)}{(AC)^2} + \frac{3(BC)^2}{(AC)^3}\right)\right),$$

где $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$, и использовать справедливые при малых углах соотношения $AC = x_{i+1} - x_i$, $BC = y_{i+1} - y_i - (x_{i+1} - x_i)\theta_i$, то

$$\Phi(x_1, y_1, \theta_1, \ldots, x_n, y_n, \theta_n) = \frac{2^n 3^{n/2} \pi^{-n} \theta_s^{-2n}}{x_1^2 \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2} \exp\left(-\frac{4}{\theta_s^2}\left(\frac{\theta_1^2}{x_1} - \frac{3y_1\theta_1}{x_1^2} + \frac{3y_1^2}{x_1^3} + \right.\right. \tag{1}$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)^2}{x_{i+1} - x_i} - \frac{3(\theta_{i+1} - \theta_i)(y_{i+1} - y_i - (x_{i+1} - x_i)\theta_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{3(y_{i+1} - y_i - (x_{i+1} - x_i)\theta_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)^3}\right)\right)\right).$$

На практике углы $\theta_1, \ldots, \theta_n$ неизвестны. Поэтому, проинтегрировав (1) по углам, получим многомерное распределение для вектора $y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ случайных смещений:

$$F(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \frac{3^{n/2} \pi^{-n/2} \theta_s^{-n}}{x_1^2 (\det A_2)^{1/2} \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2} \exp\left(-\frac{1}{2} y^T G y\right). \tag{2}$$

Здесь индекс T означает транспонирование, а G -матрица, равная

$$G = 8(A_1 - A_3 A_2^{-1} A_3^T)/\theta_s^2, \tag{3}$$

где A_1, A_2, A_3 – матрицы размером $n \times n$, в которых отличны от нуля лишь следующие матричные элементы: $(A_1)_{ii} = 3(\xi_{i-1,i}^3 + \xi_{i,i+1}^3)$, $(A_1)_{i,i+1} = (A_1)_{i+1,i} = -3\xi_{i,i+1}^3$; $(A_2)_{ii} = \xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1}$, $(A_2)_{i,i+1} = (A_2)_{i+1,i} = \frac{1}{2}\xi_{i,i+1}$; $(A_3)_{ii} = -\frac{3}{2}(\xi_{i-1,i}^2 - \xi_{i,i+1}^2)$, $(A_3)_{i,i+1} = -(A_3)_{i+1,i} = \frac{3}{2}\xi_{i,i+1}^2$, где использовано обозначение $\xi_{i,i+1} = 1/(x_{i+1} - x_i)$..

Поскольку матрица G, как следует из (3), симметрична, то на основании известных теорем многомерного статистического анализа/4/ распределение (2) является гауссовым и $G^{-1} = \mathcal{E}(y^T y)$, где $\mathcal{E}(y^T y)$ – ковариационная матрица. Символ $\mathcal{E}$ означает нахождение математического ожидания. Мы воспользуемся последней формулой для вычисления матрицы G^{-1}, поскольку установить ее непосредственно из (3) сложно. По определению

$$G^{-1} = \int y^T y \, \Phi(x_1, y_1, \theta_1, \ldots, x_n, y_n, \theta_n) dy_1, \ldots, dy_n, d\theta_1, \ldots, d\theta_n. \tag{4}$$

Для вычисления интеграла (4) сделаем замену переменных:

$$\theta_i = \sum_{\ell=1}^{2i} \frac{\theta_s}{4} (1 + (-1)^\ell + \sqrt{3}(1 - (-1)^\ell))(x_{m(\ell)} - x_{m(\ell)-1})^{1/2} \lambda_\ell,$$

$$y_i = \sum_{\ell=1}^{2(i-1)} \left(\frac{\theta_s}{2}(x_{m(\ell)} - x_{m(\ell)-1})^{1/2} \lambda_\ell \left((x_i - x_{m(\ell)})\frac{1 + \sqrt{3} + (-1)^\ell (1 - \sqrt{3})}{2} + \frac{1 - (-1)^\ell}{\sqrt{3}}(x_{m(\ell)} - x_{m(\ell)-1})\right)\right) +$$
$$+ \frac{\theta_s}{\sqrt{3}}(x_i - x_{i-1})^{3/2} \lambda_{2i-1},$$

где $i = 1, \ldots, n$ а индекс $m(\ell) = \frac{2\ell + 1 - (-1)^\ell}{4}$ принимает значения от 1 до n. Легко проверить, что при такой замене переменных с якобианом

$$D\left(\frac{y_1, \theta_1, \ldots, y_n, \theta_n}{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}}\right) = \frac{\theta_s^{2n} x_1^2}{2^n 3^{n/2}} \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

квадратичная форма в показателе экспоненты функции (1) преобразуется к $(-\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i^2)$. При вычислении $\mathcal{E}(y_i y_k)$ без ограничения общности можно считать $k \geq i$. Учитывая, что все члены $\lambda_s \lambda_t$ с $s \neq t$ в произведении $y_i y_k$ при интегрировании по формуле (4) дадут нуль, сразу получим следующее выражение для матричного элемента ковариационной матрицы:

$$G^{-1}_{ik} = \frac{\theta_s^2}{4\sqrt{3}}(x_i - x_{i-1})^2((x_k - x_i)\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x_i - x_{i-1})) + \frac{\theta_s^2}{8}\sum_{\ell=1}^{2(i-1)}(x_{m(\ell)} - x_{m(\ell)-1})\times$$
$$\times((x_i - x_{m(\ell)})\frac{1+\sqrt{3}+(-1)^{\ell}(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{1-(-1)^{\ell}}{\sqrt{3}}(x_{m(\ell)} - x_{m(\ell)-1}))\times \qquad (5)$$
$$\times((x_k - x_{m(\ell)})\frac{1+\sqrt{3}+(-1)^{\ell}(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{1-(-1)^{\ell}}{\sqrt{3}}(x_{m(\ell)} - x_{m(\ell)-1})).$$

Путем суммирования следующих рядов:

$$\sum_{\ell=1}^{2(i-1)}(2-(-1)^{\ell})(x_{m(\ell)} - x_{m(\ell)-1}) = 4x_{i-1},$$

$$\sum_{\ell=1}^{2(i-1)}((-1)^{\ell} x_{m(\ell)} x_{m(\ell)-1} + (1-(-1)^{\ell})x^2_{m(\ell)-1} - x^2_{m(\ell)}) = -2x^2_{i-1},$$

$$\sum_{\ell=1}^{2(i-1)}(\frac{2+(-1)^{\ell}}{3}x^3_{m(\ell)} - (-1)^{\ell} x^2_{m(\ell)} x_{m(\ell)-1} - \frac{2}{3}(1-(-1)^{\ell})x^3_{m(\ell)-1}) = \frac{4}{3}x^3_{i-1}$$

формула (5) приводится к виду

$$G^{-1}_{ik} = \frac{\theta_s^2}{12}x_i^2(3x_k - x_i), \qquad (6)$$

что, как нетрудно показать, совпадает с формулой для матрицы многократного рассеяния/1/. Используя (6), перепишем многомерное распределение (2) в окончательном виде:

$$F(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det G^{-1})^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2}\, y G y^T)\,^{x/}. \qquad (7)$$

Можно показать, что оценка неизвестного параметра$^{xx/}$ распределения (7), полученная методом максимума правдоподобия, при одной единственной реализации случайного процесса является состоятельной и асимптотически эффективной (подробности можно найти в книге Гренандера/5/).

В заключение авторы выражают свою благодарность В.П.Джелепову за поддержку и полезные замечания.

Литература

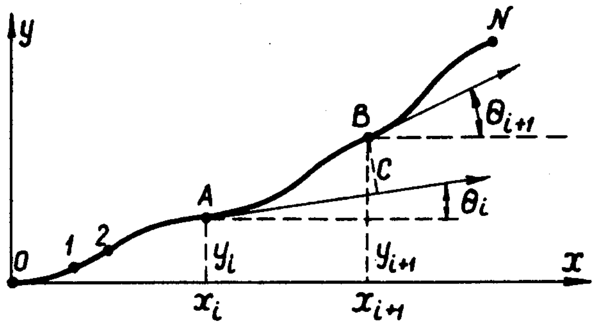
1. И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ, Р-2146, Дубна ,1965.
2. Бартлетт. Введение в теорию случайных процессов. ИЛ, Москва, 1958.
3. Б.Росси. Частицы больших энергий, ГИТТЛ, Москва, 1955.
4. Т.Андерсон. Введение в многомерный статистический анализ, ГИФМЛ, Москва, 1963.
5. У.Гренандер. Случайные процессы и статистические выводы, ИЛ, Москва, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 января 1969 года.

---

x/ Если среднее значение $\bar{y} \neq 0$, то вектор y в (7) следует заменить на $(y-\bar{y})$.

xx/ Этим параметром является импульс частицы, поскольку $\theta_s^2 = \text{const}\,\frac{m^2+p^2}{p^4}$, где m и p – масса и импульс частицы.


y
N
B
θi+1
C
A
θi
2
1
0
yi
yi+1
x
xi
xi+1