

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

M-247



P10 - 4255

Б.А.Манюков, П.В.Шляпников

НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ
КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ЭЛЕКТРОННЫХ ТРЕКОВ В ПУЗЫРЬКОВЫХ
КАМЕРАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1969

P10 - 4255

Б.А.Манюков, П.В.Шляпников

7687/2
НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ
КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ЭЛЕКТРОННЫХ ТРЕКОВ В ПУЗЫРЬКОВЫХ
КАМЕРАХ

Направлено в ПТЭ

Идея обрезания спектра тормозных потерь, на которой основаны статистические способы учета тормозного излучения^{/1,2/}, может быть использована и при вычислении кинематических параметров электронных (позитронных) треков с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Так, например, в работе /3/ аппроксимирующая кривая в минимизируемом функционале представляет среднестатистическую функцию, вычисленную при фиксированном значении порога обрезания тормозных потерь. Однако фиксирование порога обрезания при применении МНК представляется искусственным и в конечном счете приводит к занижению точности в кинематических параметрах. Поэтому в настоящей статье предлагается метод, в котором вводится переменный порог обрезания спектра тормозных потерь, определяемый суммарными потерями энергии на излучение на измеряемой длине трека.

Пусть энергия электрона в последней точке измеряемого участка трека длиной L равна $E(L) = E_0 \exp(-\beta_0)$, где E_0 - начальная энергия, а β_0 - неизвестное число. Тогда, как и при фиксированном пороге обрезания β_0 /2/, можно считать, что плотность распределения потерь энергии на излучение на измеряемой длине трека равна

$$w(\beta, \ell) = \beta^{b\ell-1} \exp(-\beta) d\beta / \gamma(b\ell, \beta_0), \quad (1)$$

где

$$0 \leq \ell \leq L, \gamma(b\ell, \beta) = \int_0^{\beta_0} \beta^{b\ell-1} \exp(-\beta) d\beta, \quad b = 1/(X_0 \ln 2)$$

и X_0 - радиационная длина среды. В этом случае аппроксимирующую

функцию в МНК можно определить как среднестатистическую функцию от распределения (1) с неизвестным параметром β_0 , оптимальное значение которого может быть найдено точно таким же образом, как и кинематические параметры трека (кривизна ρ_0 и азимутальный угол ϕ в плоскости $X Y$, перпендикулярной направлению магнитного поля, и тангенс угла наклона трека $\tan \alpha$ к этой плоскости).

Допустим, нам известны y -ые координаты N точек трека в системе координат $x y$, ось x которой совпадает с направлением движения частицы в первой точке (см. рис.). Тогда МНК сводится к минимизации функционала:

$$\chi^2 = \Delta y^T G \Delta y; \quad (2)$$

где $\Delta y = y^m - \langle y \rangle$, y^m - вектор измеренных y -ых координат, $\langle y \rangle$ - вектор соответствующих математических ожиданий (аппроксимирующая функция), а G - матрица весов, обратная ковариационной матрице G^{-1} случайного вектора y . В векторе $\langle y \rangle$ должны быть учтены потери энергии на

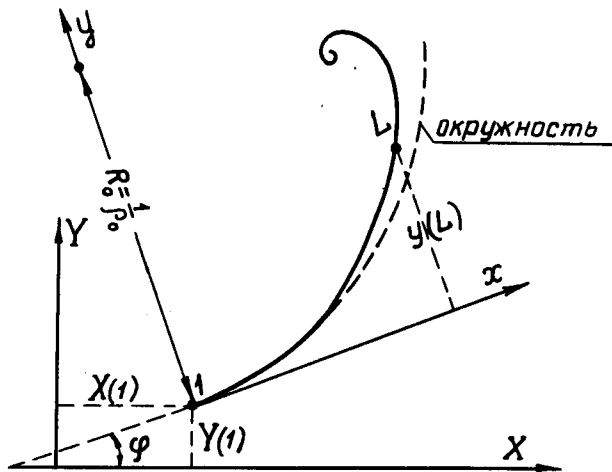


Рис. 1.

ионизацию и тормозное излучение x), а в ковариационной матрице G^{-1} - разброс точек относительно $\langle y \rangle$, обусловленный случайным характером тормозных потерь, многократного рассеяния и неточностей измерения координат.

Если считать, что тормозное излучение направлено строго вперед, то

$$y(L) = \int_0^L \sin \left(\int_0^\ell \rho(\lambda) d\lambda \right) d\ell, \quad (3)$$

где вследствие независимости ионизационных потерь и потерь энергии на тормозное излучение $\rho(\lambda) = \rho_0 + \Delta\rho_{\text{ion}}(\lambda) + \Delta\rho_{\text{rad}}(\lambda)$; $\Delta\rho_{\text{ion}}(\lambda)$ и $\Delta\rho_{\text{rad}}(\lambda)$ - изменение кривизны на длине λ за счет потерь энергии на ионизацию и излучение. На измеряемых длинах треков $\Delta\rho_{\text{ion}}(\lambda)$ и $\Delta\rho_{\text{rad}}(\lambda)$ малы по сравнению с ρ_0 , и в разложении синуса в (3) в ряд ими можно пренебречь во всех членах, кроме первого, так что

$$y(L) = y_{\text{окр}}(L) + \Delta y_{\text{ion}}(L) + \Delta y_{\text{rad}}(L),$$

где $y_{\text{окр}}(L) = \rho_0 L^2 / 2! - \rho_0^3 L^4 / 4! + \rho_0^5 L^6 / 6!$ (последующие члены ряда пренебрежимо малы), $\Delta y_{\text{ion}}(L) = \int_0^L \int_0^\ell \Delta\rho_{\text{ion}}(\lambda) d\lambda d\ell$, $\Delta y_{\text{rad}}(L) = \int_0^L \int_0^\ell \Delta\rho_{\text{rad}}(\lambda) d\lambda d\ell$. Потери энергии на ионизацию при достаточно больших энергиях электронов хорошо аппроксимируются простой формулой ^{4/}: $dp/d\lambda = k_\rho$, где $k_0 = 2,2 d$ и d - плотность среды, так что $\Delta\rho_{\text{ion}}(\lambda) = k\rho_0^2 \lambda / (1 - k\rho_0 \lambda)$, где $k = k_0 / (0,3 \cdot V)$. Тогда $\Delta y_{\text{ion}}(L) = (1 - (1 - k\rho_0 L) \ln(1 - k\rho_0 L)) / k^2 \rho_0 - \rho_0 L^2 / 2$ и после разложения логарифма в ряд получим, как и в ^{5/}:

$$\Delta y_{\text{ion}}(L) = \frac{1}{k^2 \rho_0} \left(\frac{1}{6} (k\rho_0 L)^3 + \frac{1}{12} (k\rho_0 L)^4 + \frac{1}{20} (k\rho_0 L)^5 + \dots \right) = \frac{1}{k^2 \rho_0} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(k\rho_0 L)^n}{n(n-1)}, \quad (4)$$

причем в большинстве практических случаев достаточно ограничиться первым членом этого ряда.

^{x)} Поскольку в большинстве случаев неоднородность магнитного поля невелика, мы предполагаем, что его индукция B не изменяется на измеряемом участке трека и равна индукции в его первой точке. При большой неоднородности следует воспользоваться методикой, описанной, например, в работах ^{3,5/}.

Записывая $\gamma(b\lambda, \beta_0)$ в виде ряда $\gamma(b\lambda, \beta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_0^{n+b\lambda}}{n! (n+b\lambda)}$, найдем:

$$\langle \Delta \rho_{\text{рад}}(\lambda) \rangle = \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda) \beta_0^n,$$

где коэффициенты $c_n(\lambda)$ получены по известному правилу деления степенных рядов. Тогда

$$\langle \Delta \gamma_{\text{рад}}(L) \rangle = \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n(L) \beta_0^n, \quad d_n(L) = \int_0^L \int_0^L c_n(\lambda) d\lambda.$$

Таким образом, аппроксимирующая функция $\langle y(L) \rangle$, входящая в функционал (2), полностью определена:

$$\langle y(L) \rangle = \rho_0 L^2 / 2! - \rho_0^3 L^4 / 4! + \rho_0^5 L^6 / 6! + \frac{1}{k^2 \rho_0} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(k \rho_0 L)^n}{n(n-1)} + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n(L) \beta_0^n. \quad (6)$$

Приступим теперь к вычислению ковариационной матрицы G^{-1} :

$$G^{-1} = G^{-1}(\text{mes}) + G^{-1}(\text{sc}) + G^{-1}(\text{rad}),$$

где $G^{-1}(\text{mes})$ и $G^{-1}(\text{sc})$ - ковариационные матрицы, учитывающие отклонения случайного вектора y от $\langle y \rangle$ вследствие неточностей измерения координат и многократного рассеяния $/6/$, а подлежащая определению матрица $G^{-1}(\text{rad})$ учитывает отклонения y от $\langle y \rangle$ из-за вероятностной природы тормозного излучения. По определению:

$$G_{ik}^{-1}(\text{rad}) = \langle y(L_i) y(L_k) \rangle - \langle y(L_i) \rangle \langle y(L_k) \rangle,$$

где

$$\langle y(L_i) y(L_k) \rangle = \rho_0^2 \int_0^{L_k} \int_0^{L_i} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \langle e^{\beta_1(\lambda_1)} e^{\beta_2(\lambda_2)} \rangle d\lambda_1 d\lambda_2 d\ell_1 d\ell_2.$$

Совместная плотность вероятности имеет на длине λ_1 кривизну $\rho_0 \exp(\beta_1(\lambda_1))$, а на длине λ_2 - кривизну $\rho_0 \exp(\beta_2(\lambda_2))$, как следует из (1), равна

$$W(\beta_1, \beta_2) = \beta_1^{b\lambda_1-1} (\beta_2 - \beta_1)^{b(\lambda_2-\lambda_1)} \exp(-\beta_2) d\beta_1 d\beta_2 / \gamma(b\lambda_2, \beta_0).$$

Поэтому

$$\langle e^{\beta_1(\lambda_1)} e^{\beta_2(\lambda_2)} \rangle = \left(\int_0^{\beta_0} \beta_2^{b\lambda_2-1} \Phi(b\lambda_1, b\lambda_2, \beta_2) d\beta_2 \right) / \gamma(b\lambda_2, \beta_0),$$

где $\Phi(b\lambda_1, b\lambda_2, \beta_2)$ - вырожденная гипергеометрическая функция. Для вычисления интеграла запишем $\Phi(b\lambda_1, b\lambda_2, \beta_2)$ в виде ряда:

$$\Phi(b\lambda_1, b\lambda_2, \beta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(b\lambda_1, b\lambda_2) \beta_2^n,$$

где коэффициенты равны $f_0=1$, $f_1 = \frac{1}{1!} \frac{b\lambda_1}{b\lambda_2}$, $f_2 = \frac{1}{2!} \frac{b\lambda_1(b\lambda_1+1)}{b\lambda_2(b\lambda_2+1)}$... Тогда последние вычисления можно представить в виде следующей схемы:

$$\langle e^{\beta_1(\lambda_1)} e^{\beta_2(\lambda_2)} \rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(b\lambda_1, b\lambda_2) \beta_0^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(b\lambda_2) \beta_0^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(b\lambda_1, b\lambda_2) \beta_0^n,$$

$$\langle y(L_1) y(L_k) \rangle = \rho_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} r_n(bL_1, bL_k) \beta_0^n, \quad r_n(bL_1, bL_k) = \int_0^{L_k} \int_0^{L_1} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} q_n(b\lambda_1, b\lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1 d\ell_2 d\ell_1,$$

$$\langle y(L_i) \rangle \langle y(L_k) \rangle = \rho_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} s_n(bL_i, bL_k) \beta_0^n.$$

Таким образом, ковариационная матрица $G^{-1}(\text{rad})$ имеет вид:

$$G_{ik}^{-1}(\text{rad}) = \rho_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_n(bL_i, bL_k) - s_n(bL_i, bL_k)) \beta_0^n. \quad (7)$$

Конечно, формулы для $\langle \Delta \gamma_{\text{рад}}(L) \rangle$ и $G^{-1}(\text{rad})$ могут быть реально использованы только в том случае, если ряды (5) и (7) сходятся достаточно быстро. Сходимость проверялась путем сравнения (5) и (7) при ограниченном числе членов с соответствующими точными формулами, в которых интегралы вычислялись методом Монте-Карло^{x)}. Оказалось, что при учете только шести членов в (5) и пяти в (7) ряды сходятся при всех реальных значениях bL и β_0 .

При известных $\langle y(L) \rangle$ и G^{-1} вычисление кинематических параметров выполняется обычным способом. Но аппроксимирующая функция $\langle y(L) \rangle$

^{x)} Авторы благодарны Э. Надь (Институт физических исследований, Будапешт) за вычисления интегралов.

(6) определена в системе координат xu , в то время как координаты точек трека известны в другой системе координат XU (см. рис.), повернутой на неизвестный азимутальный угол ϕ . Поэтому вектор отклонений Δy в функционале (2)

$$\Delta y(L) = -Y(1) + Y(L) \cos \phi - X(L) \sin \phi - \langle y(L) \rangle.$$

Минимизация функционала по вектору искомых параметров $A(\rho_0, \phi, \beta_0)$ приводит к системе уравнений:

$$\Delta A = (B^T G B)^{-1} B^T G \Delta y,$$

в которых ΔA - вектор поправок к найденному в предыдущей (ν -ой) итерации вектору A , так что $A(\nu+1) = A(\nu) + \Delta A(\nu+1)$, а B - матрица производных $B = -\partial \Delta y / \partial A$:

$$B(1, L) = L^2 / 2 - \rho_0^2 L^4 / 8 + \rho_0^4 L^6 / 144 + k \rho_0 L^8 / 3 + \sum_{n=1}^6 d_n(L) \beta_0^n$$

$$B(2, L) = Y(L) \sin \phi + X(L) \cos \phi$$

$$B(3, L) = \rho_0 \sum_{n=1}^6 n d_n(L) \beta_0^{n-1},$$

где для простоты взят только первый член ряда (4).

Тангенс угла наклона трека $\text{tg} \alpha$ и его дисперсия $D(\text{tg} \alpha)$ при условии однородности магнитного поля и строго направленном вперед тор-мозном излучении находятся элементарно:

$$\text{tg} \alpha = (L^T G_z Z) / (L^T G_z L), \quad D(\text{tg} \alpha) = 1 / (L^T G_z L),$$

где G_z - матрица, обратная ковариационной матрице $G_z^{-1} = G_z^{-1}(\text{sc}) + G_z^{-1}(\text{mes})$.

Преимущества предложенного метода становятся особенно наглядными, если рассмотреть треки, у которых потери на излучение малы. В этом случае $\beta_0 \rightarrow 0$ и кинематические параметры находятся столь же точно, как и для неизлучающих частиц. Этого нельзя сказать о методе /5/, в котором параметр обрезания определен из идеологии Бэра-Митнера /1/,

и поэтому малость β_0 не означает, вообще говоря, что и суммарные потери энергии на излучение также малы.

При больших β_0 , когда излучение произошло на последней части измеряемой длины трека, можно применить процедуру последовательного отбрасывания последних точек трека. Поскольку параметр β_0 скоррелирован с ρ_0 и ϕ , можно найти такую оптимальную длину, на которой ошибки в кинематических параметрах минимальны.

В заключение авторы выражают свою благодарность С.В. Клименко и Г.А. Ососкову за полезные обсуждения. При разработке описанного здесь метода существенно использовался опыт создания программы /8/. Один из авторов (Ш.П. В.) в этой связи признателен проф. А. Lagarique (Laboratoire de L'Accelérateur Linear, ORSAY) за предоставленную возможность работы в его группе и особенно благодарен D. Morellet за ценные советы, дискуссии и помощь в работе.

Л и т е р а т у р а

1. L. Behr, P. Mittner. Nucl. Instr. Meth., 20, 446 (1963).
2. Ю.А. Будагов, А.Г. Володько, В.Б. Флягин, П.В. Шляпников. ПТЭ, №1, 70 (1966).
3. Н.Ф. Маркова, Е.И. Мороз, В.И. Никитина, А.П. Стельмах, Г.Н. Ген-тюкова. Препринт ОИЯИ Р10-3768, Дубна 1968.
4. Н. ZYoshiki, CERN 67-10, Geneva (1967).
5. D. Morellet. Preprint L.A.L. 1190, ORSAY, France (1968).
6. И.М. Граменицкий, Л.А. Тихонова, П.В. Шляпников. Препринт ОИЯИ Р-2146, Дубна 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел

7 января 1969 года.