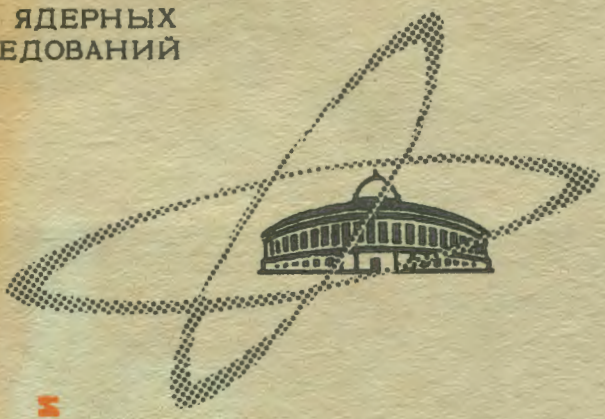


18/10/68

С 344.1g
M>151
ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P10 - 3737



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Саитов,
А.П.Стельмах

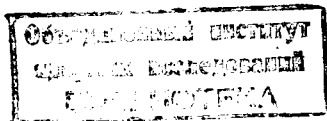
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМУМА
ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ
ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ,
ДВИЖУЩЕЙСЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ
ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФЛУКТУИРУЮЩЕГО
ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, МНОГОКРАТНОГО
РАССЕЯНИЯ И ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

1968

P10 - 3737

Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Сайтов,
А.П.Стельмах

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМУМА
ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ
ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ,
ДВИЖУЩЕЙСЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ
ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФЛУКТУИРУЮЩЕГО
ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, МНОГОКРАТНОГО
РАССЕЯНИЯ И ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ



1°. В работах /1/ и /2/ рассматривалась задача определения наиболее эффективных оценок угла β_0 и импульса P_0 путем уточнения начальных оценок этих параметров; при этом учитывались ионизационные потери, неоднородность магнитного поля, многократное кулоновское рассеяние и ошибки измерения координат. Метод решения этой задачи основан на принципе максимума правдоподобия. Уравнения связей, накладываемых измерениями на функцию правдоподобия, получались путем интегрирования уравнений движения и использованием известных начальных оценок P_0^* и β_0^* . Из условий максимума функции правдоподобия была получена система линейных уравнений относительно искомых оценок величин P_0 и β_0 . Оставаясь в рамках этого метода, задачу можно расширить, включив в рассмотрение также и потери энергии за счет тормозного излучения заряженной частицы *).

В настоящей работе и рассматривается такая расширенная задача. При этом сохраняются основные предположения и обозначения из /1/ и /2/:

P - импульс частицы (P_0 - импульс частицы в начальной точке);
 α - угол погружения - угол между вектором импульса и плоскостью XOY ;

β - угол между осью OX и проекцией импульса на плоскость XOY ,

β_0 - значение этого угла в начальной точке.

*) Отметим, что распределение плотности вероятности потерь на излучение не подчиняется нормальному закону. Рассмотрение такой расширенной задачи возможно только благодаря применению принципа максимума правдоподобия.

Оценки искомым величин, найденные в начальном приближении по упрощенным формулам, которые мы обсуждаем в пункте 6^о, отмечаем звездочкой.

T_0 - истинное значение координаты y в начальной точке следа;
 ϵ_1 - ошибка измерения координаты y_1 (дисперсия D_{ϵ_1} считается заданной и одинаковой для всех i);

δ_1 - проекция на плоскость XOY угла многократного кулоновского рассеяния на i -ом интервале, т.е. на интервале (S_{i-1}, S_i) ;

η_1 - величина независимого смещения из-за многократного рассеяния на i -ом интервале;

(величины δ и η - независимые стохастические переменные, связанные с углом δ и смещением y в распределении Ферми /3/)

$$W(y, \delta, x) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{D x^2} \exp \left[-\frac{4}{D} \left(\frac{\delta^2}{x} - \frac{3y\delta}{x^2} + \frac{3y^2}{x^3} \right) \right]$$

соотношениями $\delta = \delta$, $y = \eta + \frac{1}{2} x \delta$);

S_1 - длина дуги следа, отсчитываемая от начальной до i -ой точки следа.

Траектория частицы считается заданной координатами $(N+1)$ точки, которые предполагаются измеренными независимо друг от друга.

Система координат выбирается так, что для измеренных координат начала и конца следа

$$x_0 = y_0 = y_N = 0.$$

Магнитное поле по всей длине следа направлено, в основном, по оси OZ , так что

$$\left| \frac{H_x}{H_z} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{H_y}{H_z} \right| \ll 1. \quad (1)$$

Из соотношения (1) следует, что, во-первых, имеет место слабая корреляция оценок $P_0 \cos \alpha_0$ и β_0 с оценкой угла α_0 , поэтому можно угол α_0 определять независимо, например, из развертки следа; во-вторых, при вычислениях можно ограничиться удержанием только первых степеней отношений $\frac{H_x}{H_z}$ и $\frac{H_y}{H_z}$.

Ошибки в координатах x_1 не рассматриваются, так как при условиях

$$\frac{1}{\cos \beta} = 1, \text{ т.е. } \frac{1}{2} \beta^2 \ll 1 \text{ и } (\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 \quad (2)$$

они почти не сказываются на точности определения параметров (P^{-1}, β) для следа.

На основании оценок, проведенных в /1/, считаем выполненными условия справедливости распределения Ферми для многократного кулоновского рассеяния в криволинейной системе координат.

В дальнейшем мы будем использовать аппроксимацию величин $\cos \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \beta$, \vec{H} полиномами по степеням S , которые легко получаются методом наименьших квадратов по измеренным точкам трека.

Аппроксимирующие функции обозначим:

$$\widetilde{\cos \alpha}, \quad \widetilde{\sin \alpha}, \quad \widetilde{\cos \beta}, \quad \widetilde{\sin \beta}, \quad (3)$$

$$\widetilde{H}_x, \quad \widetilde{H}_y, \quad \widetilde{H}_z.$$

2^о. Мы считаем, что нам известны как начальные оценки P_0^* и β_0^* так и начальные оценки потерь импульса за счет тормозного излучения на каждом интервале. Следуя работе /2/, запишем величину обратного импульса в точке $S \in [S_{i-1}, S_i]$ в виде

$$(P^{-1}) = a = a_0^* + A + \sum_k b_k S^k + A \sum_k \frac{db_k}{da_0} S^k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} (\phi_j + \Phi_j) + (\phi_i + \Phi_i) \frac{S - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}}.$$

Здесь величины b_k служат, как и в /2/, для описания ионизационных потерь. Отличие состоит в том, что здесь изменение ионизационных потерь вдоль следа зависит от потерь энергии на излучение, имеющих стохастический характер.

Мы считаем, что достаточно учесть зависимость ионизационных потерь от средних потерь на излучение, так как ионизационные потери слабо зависят от энергии частицы в той области энергий, где существенно тормозное излучение. В этом случае возможно точно определить величины b_k при известном начальном импульсе. Через $(\phi_j + \Phi_j)$ обозначено изменение величины обратного импульса, обусловленное радиационными потерями на j -ом интервале, причем через ϕ_j обозначена начальная оценка, а через Φ_j - искомая поправка.

Последний член в формуле (4) отражает сделанное нами предположение о линейности изменения обратного импульса за счет радиационных потерь на i -ом интервале. Это предположение оправдано тем, что обычно длины интервалов много меньше радиационной длины, а число таких интервалов велико.

3°. Функция правдоподобия в данном случае может быть записана в виде

$$L = \text{const} \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{a_{i-1}} \left(\ln \frac{a_{i-1} + \phi_i + \Phi_i}{a_{i-1}} \right)^{\frac{\Delta s_i}{X_0 \ln 2} - 1} \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^N \frac{\epsilon_i^2}{D_{\epsilon_i}} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{D_{\delta_i}} + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{D_{\eta_i}} \right) \right], \quad (5)$$

где X_0 - радиационная длина для среды, в которой движется частица. Неэкспоненциальный множитель в фигурных скобках получается из формулы для потерь на излучение, предложенной Бете и Гайтлером^{4/}

$$w(E_0, E, t) dE = \frac{dE}{E_0} \left(\ln \frac{E_0}{E} \right)^{\frac{t}{\ln 2} - 1} \left[\Gamma \left(\frac{t}{\ln 2} \right) \right]^{-1},$$

где

$$t = \frac{\Delta S}{X_0}.$$

4°. Наиболее эффективные оценки искомых параметров мы получаем из требования обращения в максимум функции правдоподобия при выполнении условий, налагаемых измерениями (уравнений связи).

Приведем краткий вывод уравнений связи (9), линеаризованных по малым величинам $A, B, \Phi, \delta, \eta, \epsilon$.

В сделанных обозначениях координата y запишется как

$$y = \int_0^S \sin \beta \widetilde{\cos \alpha} dS + T_0, \quad (6)$$

где мы считаем $A \equiv B \equiv \Phi \equiv \delta \equiv \eta \equiv \epsilon \equiv 0$.

С учетом многократного рассеяния и измерительных ошибок получим, полагая для простоты $\cos \beta = 1$ в коэффициентах при δ и η

$$y_i = \int_0^{S_i} \sin \beta \widetilde{\cos \alpha} dS + \epsilon_i + \sum_{j=1}^i \delta_j L_{ij} + \sum_{j=1}^i \eta_j + T_0, \quad (7)$$

$$(L_{ij} = S_i - 0,5(S_{j+1} - S_j)),$$

где β может быть выражена из уравнения Лоренца следующим образом:

$$\beta = \beta^* + B + \frac{e}{c} \int_0^{S_i} (\widetilde{P}^{-1}) [-\widetilde{N}_z + \text{tg } \alpha (\widetilde{N}_x \widetilde{\cos \beta} + \widetilde{N}_y \widetilde{\sin \beta})] dS. \quad (8)$$

Пользуясь (1) и ограниченностью $\text{tg } \alpha$, мы заменили в правой части (8) значения неизвестных функций на их экспериментальные оценки, что позволяет свести интегралы (7) и (8) к квадратурам. (Эти оценки получаются при аппроксимации слабо искаженного флуктуациями действительного решения, т.е. траектории. Во всяком случае, из-за (1) погрешность решения (7-8) много меньше шума из-за флуктуации величин $\Phi, \delta, \eta, \epsilon$).

Выполнив в (7) линеаризацию и перенеся y_i в правую часть получим:

$$F_i = [y_i - (T_0 + \epsilon_i + \hat{y}_i + A \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial A} + B \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial B} + \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \Phi_j} + \sum_{j=1}^i \delta_j L_{ij} + \sum_{j=1}^i \eta_j)] = 0$$

$$(i = 0, 1, \dots, N),$$

где

$$\hat{y}_i = \left[\int_0^{s_i} \sin \beta \cos \alpha dS \right]_{A=B=\Phi=0}$$

$$\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial A} = \left[\frac{\partial}{\partial A} \int_0^{s_i} \sin \beta \cos \alpha dS \right]_{A=B=\Phi=0}$$

(Производные по B и Φ_j берутся аналогично). Таким образом,

$\hat{y}_i, \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial A}, \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial B}, \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \Phi_j}$ являются легко вычисляемыми квадратурами.

Условие обращения в максимум функции правдоподобия (5) с учетом уравнений связи (9) равнозначно условиям экстремума по $\epsilon, \delta, \eta, T_0, A, B, \Phi$ следующей производящей функции Лагранжа:

$$Q = \sum_{j=1}^N f_j - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^N \frac{\epsilon_j^2}{D_{\epsilon_j}} + \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j^2}{D_{\delta_j}} + \sum_{j=1}^N \frac{\eta_j^2}{D_{\eta_j}} \right] + \sum_{j=0}^N q_j F_j, \quad (10)$$

где

$$f_j = \left(\frac{\Delta S_j}{X_0 \ln 2} - 1 \right) \ln \left(\frac{1}{a_{j-1}} \ln \frac{a_{j-1} + \phi_j + \Phi_j}{a_{j-1}} \right),$$

q_j - неопределенные множители Лагранжа.

Величины q_j легко выражаются из условий экстремума для Q :

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial T_0} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \Phi_i} = 0, \quad (*) \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q_i} = F_i = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_i} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \delta_i} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta_i} = 0. \quad (12)$$

($i = 0, 1, \dots, N$).

*) При взятии производных $\frac{\partial Q}{\partial \Phi_i}$ нужно учитывать, что

$$a_{i-1} = a_0^* + A + \sum_k b_k S_{i-1}^k + A \sum_k \frac{db_k}{da_0} S_{i-1}^k + \sum_{j=1}^{i-1} (\phi_j + \Phi_j) \quad (\text{см.4})$$

и, следовательно, $\frac{\partial f_i}{\partial \Phi_j} = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_j}, & \text{если } j \geq i, \\ 0, & \text{если } j < i. \end{cases}$

Из последних условий получаем:

$$\epsilon_i = -q_i D_{\epsilon_i}, \quad \delta_i = -D_{\delta_i} \sum_{j=1}^N q_j L_{j1}, \quad \eta_i = -D_{\eta_i} \sum_{j=1}^N q_j. \quad (13)$$

Исключая $\epsilon_i, \delta_i, \eta_i$ из (9) с помощью (13), приходим к следующей системе:

$$y_i = T_0 + \hat{y}_i - q_i D_{\epsilon_i} + A \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial A} + B \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial B} + \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \Phi_j} - \sum_{j=1}^i (D_{\delta_j} \sum_{k=j}^N q_k L_{kj}) L_{i1} - \sum_{j=1}^i D_{\eta_j} \sum_{k=j}^N q_k, \quad (14)$$

($i = 0, 1, \dots, N$),

откуда

$$q_i = \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^{-1} \{ (y_j - \hat{y}_j) - [T_0 + A \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial A} + B \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial B} + \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \Phi_k}] \}, \quad (15)$$

где σ_{ij}^{-1} - элемент матрицы, обратной к матрице с элементами

$$\sigma_{ij} = D_{\epsilon_i} \Delta_{ij} + C_{ij}; \quad (16)$$

здесь

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} D_k [\Delta S_k L_{ik} L_{jk} + \frac{1}{12} \Delta S_k^3],$$

$$D_k = \left(\frac{21, 2}{P_k v_k} \right)^2 \frac{1}{X_0},$$

$$\Delta S_k = S_k - S_{k-1},$$

D_{ϵ_i} - дисперсия измерительной ошибки по оси y ,

v_i - скорость,

Δ_{ij} - символ Кронекера.

(Другой способ введения C_{ij} рассмотрен в [8]).

Таким образом, система $5N+5$ уравнений (см.11-12) после подстановки q_j в (11) сводится к системе $(N+3)$ уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial A} - \sum_{i=1}^N q_i \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial A} &= 0, \\ \sum_{i=1}^N q_i \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial B} &= 0, \\ \sum_{i=0}^N q_i &= 0, \\ \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \Phi_i} - \sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \Phi_i} &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (17)$$

где q_i задаются выражением (15).

Мы получили систему нелинейных уравнений относительно A, B, T_0, Φ_i , решение которой дает искомые оценки A, B, T_0 . Окончательно параметры электрона будут равны:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} &= a_0^* + A, \\ \beta &= \beta^* + B. \end{aligned}$$

Преимущество рассмотренного метода по сравнению с [5,7] состоит в том, что он применим к трекам с любым сбросом энергии, без необходимости производить предварительный отбор по относительной величине потерь на излучение. (Величины $(\phi_i + \Phi_i)$, где Φ_i получаются из системы (17), показывают сброс импульса из-за излучения на интервале от $(i-1)$ -ой до i -ой точки). Применение метода максимума правдоподобия гарантирует минимальность получаемых таким образом ошибок искомых параметров.

Следует, однако, отметить, что хотя система (17) нелинейна, она может быть легко решена итерационным процессом с разложением в ряд нелинейных членов

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial A} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial f_j}{\partial \Phi_i} \right).$$

Другой способ приближенного решения, требующий предварительного отбора треков с потерями на излучение меньше заданных, состоит в приближенной замене выражения

$$\left\{ \prod_{i=1}^N \frac{1}{a_{i-1}} \left(\ln \frac{a_{i-1} + \phi_i + \Phi_i}{a_{i-1}} \right)^{\frac{\Delta s_i}{x_0 \ln 2} - 1} \right\}$$

из функции правдоподобия (5) на совокупность нормальных распределений. При этом требуется найти оценки Φ_i^2 . Выполнив это, мы можем свести систему (17) к системе трех уравнений (относительно A, B, T_0), включив флуктуацию радиационных потерь в матрицу σ_{nm} . При этом для определения σ_{nm} и q_i необходимо использовать совместно (12) и $\frac{\partial Q}{\partial \Phi_i} = 0$.

Предварительный отбор треков вносит некоторый элемент субъективности, поэтому вычисленная величина средних потерь энергии из-за излучения, зависящая от такого отбора, становится несколько неопределенной, а это, в свою очередь, сказывается на величине импульса.

5°. Оценка $\text{tg } \alpha$ может быть получена по аналогии с оценками для (P^{-1}) и β . Из уравнения Лоренца имеем:

$$\frac{d}{dS} (\text{tg } \alpha) = \frac{e}{c} (P^{-1}) (\tilde{N}_y \widetilde{\cos \beta} - \tilde{N}_x \widetilde{\sin \beta}) (\widetilde{\cos \alpha})^{-2}, \quad (18)$$

при этом в правой части (18) мы заменили соответствующие функции их оценками (см.3). При этом Z - координата трека равна

$$z = z_0^* + \Delta z + \hat{z} + \left(\frac{\partial z}{\partial \text{tg } \alpha} \right) \Delta \text{tg } \alpha,$$

где

$$\hat{z} = \int_0^S \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} dS,$$

$$\text{tg } \alpha = \int_0^S \left(\frac{d}{dS} \text{tg } \alpha \right) dS.$$

При вычислении интегралов используются оценки (3), (P^{-1}) можно взять в виде (4) с ранее определенными ϕ_i и Φ_i .

Поправка $\Delta \text{tg } \alpha$ определяется из условия минимума функционала χ_z^2 по величинам Δz_0 и $\Delta \text{tg } \alpha$.

$$X_{1,j}^2 = \sum \{ z_1 - [z_0^* + \Delta z_0 + \hat{z}_1 + (\frac{\partial z_1}{\partial \text{tg} \alpha}) \Delta \text{tg} \alpha] \sigma_{1j}^{*-1} \{ z_j - [z_0^* + \Delta z_0 + \hat{z}_j + (\frac{\partial z_j}{\partial \text{tg} \alpha}) \Delta \text{tg} \alpha] \}, \quad (19)$$

где σ_{1j}^{*-1} - элемент обратной матрицы к матрице с элементами

$$\sigma_{1j}^* = D_z \Delta_{1j} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} C_{1j}, \quad (20)$$

здесь D_z - дисперсия z - координаты с учетом переноса ошибок с координаты x , $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ - среднее значение $\cos^2 \alpha$ на треке.

6°. Для определения начального приближения можно воспользоваться методикой и программой для определения импульса электрона, изложенной в работе /6/.

В этой работе траектория электрона аппроксимируется методом наименьших квадратов с учетом матрицы многократного рассеяния кривой вида

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y^2.$$

Однако траекторию можно аппроксимировать и другими кривыми, например, полиномом n -ой степени по x .

Другим способом начальные значения можно получить, если след аппроксимировать кривой, учитывающей ионизационные и средние радиационные потери. Вариантом этого способа является аппроксимация проекции траектории следа параболой с последующими учетом ионизационных и средних радиационных потерь /7/.

Можно также воспользоваться методикой, изложенной в /1/ и /2/, заменив ионизационные потери суммой средних потерь на излучение и ионизацию. Число уравнений при этом сократится до трех, если к тому же пренебречь многократным рассеянием.

Л и т е р а т у р а

1. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Сайтов, А.П.Стельмах. Препринт ОИЯИ Р-2829, Дубна 1966.

2. Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Сайтов, А.П.Стельмах. Препринт ОИЯИ Р10-3575, Дубна 1967.

3. Б.Росси, К.Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ, Москва, 1948.

4. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ, Москва, 1956. *Bethe M.A., Heitler W. Proc. Roy. Soc., A146, 83 (1934).*

5. L. Behr and P.Mittner. *Nuclear Instruments and Methods*, v.20, p. 446, 1963.

6. Ю.А.Будагов, В.Б.Виноградов, А.Г.Володько, Л.Н.Гердюков, В.П.Джелепов, С.В.Клименко, В.Г.Новиков, И.Паточка, В.Б.Флягин, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ Р10-3021, Дубна, 1966.

7. В.Г.Гришин, Э.П.Кистенев, Л.И.Лепилова, В.И.Мороз, Му Цзюнь. Препринт ОИЯИ Р-2277, Дубна, 1965.

8. И.М.Граменицкий, Л.А.Тихонова, П.В.Шляпников. Препринт ОИЯИ Р-2146, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1968 года.