

П-128

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



P10 - 3685

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

А.Пазман

РАСЧЕТ ИСКАЖЕНИЯ АМПЛИТУДНОГО СПЕКТРА
ВСЛЕДСТВИЕ НАЛОЖЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ

1968

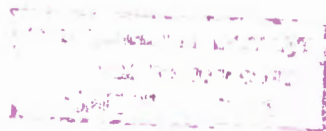
P10 - 3685

7201/3 мф

А.Пазман

РАСЧЕТ ИСКАЖЕНИЯ АМПЛИТУДНОГО СПЕКТРА
ВСЛЕДСТВИЕ НАЛОЖЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ

Направлено в ПТЭ



В в е д е н и е

Измерение спектра ядерных частиц (распределения числа частиц по энергиям) производится при помощи детекторов, которые преобразуют информацию об энергии частицы в электрический сигнал, который формируется, переносится через линию связи и дальше обрабатывается.

Амплитуды электрических импульсов должны быть пропорциональны энергиям исследуемых частиц. В действительности амплитуды импульсов подвержены искажениям в самом детекторе, искажениям из-за присутствия шумов и искажениям вследствие наложения импульсов^{/1,2/}. Последнее искажение возникает, если новый импульс появится до исчезновения предыдущего, и оба импульса складываются. Искажение зависит от интенсивности источника ядерных частиц и исчезает, если эта интенсивность достаточно уменьшается.

Искажение вследствие наложения импульсов дополнительно повышается, если экспериментальная установка требует большого расстояния между детектором и регистрирующим устройством. После передачи через линию связи у каждого импульса появляется длинная отрицательная часть – хвост импульса, и искажение увеличивается за счёт наложения импульсов на хвосты. Одновременно с наличием хвостов импульсов появляется необходимость учитывать и мертвое время системы регистрации (время, необходимое для регистрации амплитуды импульса).

Исследуемая задача является интересным примером передачи информации с искажением, которое является случайным, но не является шумом в обычном смысле. Если импульсы без хвостов, то задачу формально можно свести к задаче о стационарных шумах^{/1,3/}.

В общем случае, который рассматривается здесь, нельзя применить такой подход.

Практической целью расчётов является нахождение таких параметров измерительной системы, при которых искажение достаточно мало.

Теоретически задача решается в полной общности, т.е. указаны формулы (20)-(22) и (27)-(28), позволяющие точно вычислять искаженный спектр при любой форме неискаженного спектра и при довольно общей форме импульсов.

1. Расчёт искаженного спектра при постоянном мертвом времени

На рис. 1 изображен неискаженный импульс на входе анализатора. Здесь

a - время нарастания импульса;

b - время спада импульса;

c - длина отрицательного хвоста (в единицах времени);

d - мертвое время системы регистрации (анализатора);

α - коэффициент пропорциональности между амплитудой положительной и отрицательной части импульса ($\alpha < 0$);

$r(t), s(t)$ - нормирование функции

$$\left(\max_t r(t) = 1, \quad \max_t s(t) = 1 \right).$$

Величины a, b, c, d, α - постоянные. Нарастающая часть импульса описывается функцией $y \cdot r(t)$, хвост описывается функцией $y \cdot \alpha \cdot s(t)$.

Отдельные импульсы независимы.

Амплитуда импульса y и время его появления t случайны. Вероятность появления k импульсов в течение времени T равна

$$p_k(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \quad (1)$$

где λ - среднее количество импульсов в единицу времени (интенсивность источника частиц). Плотность вероятности появления неискаженного импульса с амплитудой y равна $P(y)$. По существу, $P(y)$ - это неискаженный амплитудный спектр, нормированный на единицу ($\int P(y) dy = 1$). Нормированный искаженный амплитудный спектр обозначим $D(y)$. Цель настоящей работы -

это анализ того, как преобразуется плотность вероятности $P(y)$ в плотность вероятности $D(y)$.

1.1 Наложение импульсов без хвостов ($c = 0$)

Обсудим случай появления группы n положительных импульсов (рис.2.1 для $n = 2$), который дает единственный искаженный импульс. Вероятность появления такой группы – это вероятность того, что в течение времени нарастания первого импульса появится еще $n-1$ импульсов:

$$p_{n-1}^{(n)} = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (2)$$

Обозначим:

y_i – амплитуда i -того импульса, t_i – время начала i -того импульса.

При этом нуль времени ($t=0$) подбираем к моменту начала первого импульса группы (рис. 2.1). Вероятность такого расположения импульсов в группе равна

$$\frac{dt_2}{a} \dots \frac{dt_n}{a}. \quad (3)$$

Амплитуда результирующего искаженного импульса y равна сумме значений всех импульсов группы в положении максимума первого импульса ($t=a$):

$$y = y_1 + r(a-t_2)y_2 + \dots + r(a-t_n)y_n. \quad (4)$$

Величина y зависит от следующих случайных величин: от n (закон распределения (2)), от y_i (закон распределения $P(y_i)$) и от t_i (закон распределения (3)). Поэтому результирующая плотность вероятности $D^+(y)$ равна

$$D^+(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}^{(n)} Q_n(y). \quad (5)$$

где $Q_n(y)$ - плотность вероятности величины (4) при постоянном a :

$$Q_n(y) = \int_0^a \dots \int_0^a G_n(y/t_2, \dots, t_n) \frac{dt_2}{a} \dots \frac{dt_n}{a} \quad (6)$$

и $G_n(y/t_2, \dots, t_n)$ - плотность вероятности величины (4) при постоянном a и постоянных t_2, \dots, t_n . При зафиксированных a, t_2, \dots, t_n величина y является просто суммой независимых случайных величин. Поэтому полезно здесь воспользоваться характеристическими функциями (обратные преобразования Фурье от плотностей вероятностей).

Для любой плотности вероятности $f(y)$ определена комплекснозначная функция

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y} f(y) dy, \quad (7)$$

которая называется характеристической функцией распределения $f(y)$.^{/4/} Отображение (7) взаимнооднозначное и $f(y)$ вычисляется из $\tilde{f}(\omega)$ как

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} \tilde{f}(\omega) d\omega. \quad (8)$$

Выражение (7) можно записать в виде

$$\tilde{f}(\omega) = E \{ e^{i\omega y} \},$$

где E - оператор усреднения по y . Из общественных свойств средних значений нетрудно получить^{/4/}:

$$E \{ e^{i\omega[ky]} \} = E \{ e^{i[k\omega]y} \} = \tilde{f}(k\omega) \quad (9)$$

$$E \{ k e^{i\omega y} \} = k E \{ e^{i\omega y} \} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E \{ e^{i\omega[y_1 + y_2]} \} &= E \{ e^{i\omega y_1} \} E \{ e^{i\omega y_2} \} = \\ &= \tilde{f}_1(\omega) \tilde{f}_2(\omega), \end{aligned} \quad (11)$$

где k - постоянная и y_1, y_2 - независимые случайные величины.

Используя закономерности (9)-(11), нетрудно получить из (4), что ха-

рактеристическая функция, соответствующая плотности $G_n(y/t_2, \dots, t_n)$, равна

$$\bar{G}_n(\omega / t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=2}^n \bar{P}[r(a-t_i) \omega] \bar{P}(\omega). \quad (12)$$

Аналогично, из (6) получим

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\omega) &= \prod_{i=2}^n \int_0^a \frac{1}{a} \bar{P}[r(a-t_i) \omega] dt_i \bar{P}(\omega) = \\ &= \bar{P}(\omega) \beta^{n-1}(\omega), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\bar{\beta}(\omega) = \frac{1}{a} \int_0^a \bar{P}[r(t) \omega] dt. \quad (14)$$

Наконец, из (5)-(13) получим

$$\begin{aligned} \bar{D}^+(\omega) &= \bar{P}(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda a} \frac{[\lambda a \bar{\beta}(\omega)]^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \bar{P}(\omega) e^{\lambda a [\bar{\beta}(\omega) - 1]}, \end{aligned} \quad (15)$$

что совпадает с результатом в [3].

$\bar{D}^+(\omega)$ - это характеристическая функция, соответствующая $D^+(y)$.

Плотность $D^+(y)$ - искаженный амплитудный спектр в случае, когда импульсы без хвостов. $D^+(y)$ вычислим из (15) с помощью преобразования (8):

$$D^+(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} \bar{D}^+(\omega) d\omega. \quad (16)$$

1.2. Наложение импульсов с хвостами при
большом мертвом времени ($d \geq b + c$).

Плотность вероятности $D(y)$ (искаженный спектр) получится вычислением вероятности наложения на хвосты импульсов, спектр которых определен в (15) и (16). Рассуждения при этом похожи на рассуждения в 1.1.

Вероятность появления m таких неискаженных импульсов, хвосты которых выходят за мертвое время, равна (см.рис.2 для $m=2$)

$$P_m^{(0)} = e^{-\lambda c} \frac{(\lambda c)^m}{m!}, \quad (17)$$

где c -длина хвоста неискаженного импульса.

Обозначим:

t_i - длина i -того хвоста, выходящего за предел мертвого времени
($i = 1, \dots, m$);

y_i - амплитуда i -того импульса;

t - время появления нового положительного импульса;

y' - амплитуда этого импульса (нуль времени выбран к моменту окончания мертвого времени, см.рис.2.2).

Амплитуда результирующего импульса y равна

$$y = y' + a \sum_{i=1}^m (c - t_i + t) y_i, \quad (18)$$

причём $a(x) = 0$, если $x > c$.

Величины $m, t_1, \dots, t_m, t, y_1, \dots, y_m, y'$ - случайные величины. Вероятность для m дана формулой (17), плотность вероятности для y_i ($i = 1, \dots, m$) равна $P(y_i)$ (неискаженный спектр), плотность вероятности для y' равна $D^+(y')$. Вероятность расположения импульсов во временах t_1, \dots, t_m, t равна:

$$\frac{dt_1}{c} \dots \frac{dt_m}{c} e^{-t\lambda} \lambda dt. \quad (19)$$

Член $e^{-t\lambda} \lambda dt$ в (19) - это вероятность того, что в течение времени t после окончания мертвого времени не будет импульса, а в интервале $< t, t+dt >$ появится импульс.

Видимо, метод вычисления искаженного спектра $D(y)$ будет аналогичен методу, употребленному для вывода формул (5)-(16). В результате получим:

$$D(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{D}(\omega) e^{-i\omega y} d\omega, \quad (20)$$

где характеристическая функция $\bar{D}(\omega)$ имеет вид

$$\bar{D}(\omega) = [1 + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \bar{Y}(\omega, t) dt] e^{-\lambda a} \bar{D}^+(\omega) = \quad (21)$$

$$= \bar{P}(\omega) [1 + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \bar{Y}(\omega, t) dt] e^{-\lambda(a+c) + \lambda a \bar{\beta}(\omega)}.$$

Здесь $\bar{P}(\omega)$ и $\bar{\beta}(\omega)$ вычислены по формулам (7) и (14) и

$$\bar{Y}(\omega, t) = \frac{1}{c} \int_0^c \bar{P}[\omega, a, s(x)] dx. \quad (22)$$

1.3 Наложение импульсов с хвостами при коротком мертвом времени ($d \leq b + c$)

Метод вычисления искаженного спектра $D(y)$ вполне аналогичен вычислениям в 1.2. Пользуясь теми же обозначениями, можно представить амплитуду результирующего импульса в виде (рис. 2,3):

$$y = y' + a s(d - b + t) y_1 + a s(d - b + t - t_2) + \dots + a s(d - b + t - t_m) y_m, \quad (23)$$

где вероятность появления m хвостов равна $\frac{m-1}{(m-1)!}$

$$P_{m-1} = e^{-\lambda(d-b)} \frac{[\lambda(d-b)]^{m-1}}{(m-1)!}, \quad (24)$$

вероятность расположения импульсов по времени равна

$$\frac{dt_2}{d-b} \dots \frac{dt_m}{d-b} e^{-\lambda t} \lambda dt \quad (25)$$

и плотности вероятностей для y', y_1, \dots, y_m равны

$$D^+(y'), P(y_1), \dots, P(y_m) \quad (26)$$

соответственно.

Характеристическая функция искаженного спектра получится в виде, аналогичном (21):

$$\begin{aligned} \bar{D}(\omega) = & \left\{ e^{-\lambda_0} \left[1 + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda_0 t} \bar{y}(\omega, t) dt \right] + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} e^{-\lambda_0 t} \lambda_q [\bar{x}(\omega, t) - 1] \bar{P}[\omega, \alpha_s(q+t)] dt \right\} \times \\ & \times e^{\lambda_0 [\bar{\beta}(\omega) - 1]} \bar{P}(\omega), \end{aligned} \quad (27)$$

где $q = d - b$, $\bar{P}(\omega)$ - это характеристическая функция неискаженного спектра, $\bar{\beta}(\omega)$ и $\bar{y}(\omega, t)$ определены в (14) и в (22),

$$\bar{x}(\omega, t) = \frac{1}{q} \int_t^{t+q} P[\omega, \alpha_s(x)] dx. \quad (28)$$

2. Расчёт искаженного спектра при переменном мертвом времени

Если регистрирующая система так устроена, что время регистрации (мертвое время) зависит от амплитуды регистрируемого импульса, то нужно учитывать эту переменность мертвого времени при расчёте искаженного спектра по формулам (15) или (21) или (27).

Длина мертвого времени зависит от амплитуды импульса y' , который является предыдущим по отношению к тому импульсу, амплитуда y которого искажена вследствие наличия мертвого времени. Поэтому d и y — независимые случайные величины и искаженный спектр $D(y)$ равен

$$D(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{D}(\omega) e^{-i\omega y} d\omega, \quad (29)$$

где

$$\bar{D}(\omega) = \int_0^{b+y} \bar{D}(\omega; d) f(d) dd + \bar{D}(\omega) \int_{b+y}^{\infty} f(d) dd. \quad (30)$$

Здесь $\bar{D}(\omega; d)$ и $\bar{D}(\omega)$ характеристические функции вычислены по формулам (27) и (21) соответственно. Если d пропорционально амплитуде регистрируемого импульса:

$$d = k y',$$

то плотность вероятности $f(d)$ в (29) равна приблизительно (при малых искажениях)

$$f(d) = \frac{1}{k} P\left(\frac{d}{k}\right), \quad (31)$$

где $P(y)$ — неискаженный спектр.

3. Искажение спектра, состоящего из одной линии

Расчёты искажения амплитудного спектра $P(y)$, которые могут быть полезны для первой ориентировки, можно просто провести, когда $P(y)$ состоит

из одной линии в некоторой точке $y = y_0$ (рис. 3), т.е. когда:

$$P(y) = \delta(y - y_0) \quad (32)$$

(где $\delta(\)$ это δ - функция Дирака), и когда импульсы прямоугольные:

$$r(t) \equiv 1, \quad s(t) \equiv 1. \quad (33)$$

Подставляя (32) и (33) в (21) и (27), получим, что искаженный спектр состоит из дискретных линий в точках

$$ny_0 + \alpha my_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

$$m = 0, 1, \dots \quad \alpha < 0.$$

Относительные высоты этих линий A_{nm} равны

$$A_{nm} = \frac{(\lambda a)^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{(\lambda c)^{m+1}}{(m+1)!} + \delta_{m0} \right], \quad (35a)$$

если $d \geq b + c$

$$= \frac{(\lambda a)^{n-1}}{(n-1)!} \left[e^{-\lambda a} \left(\delta_{m0} + \frac{(\lambda q)^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{(\lambda q)^{m-1}}{(m-1)!} (1 - \delta_{m0}) \right) + \right. \quad (35b)$$

$$\left. + e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^{m-1}}{(m-1)!} (1 - \delta_{m0}) \right],$$

если $d \leq b + c$,

где $\delta_{m0} = 1$, если $m = 0$, $\delta_{m0} = 0$, если $m \neq 0$, $q = d - b$.

4. Численные расчёты

Результаты (15), (21) и (27) применимы для любого вида спектра $P(y)$ и для любой формы импульса с видом хвоста, не очень отличающимся от прямоугольного. Время, необходимое для вычислений, зависит от сложности спектра

и формы импульса. Алгольная программа, составленная автором, демонстрирует употребимость полученных результатов для численных расчётов. На рис. 3-5 приведены результаты таких расчётов для прямоугольной формы импульсов. Время вычисления искаженного спектра в этих случаях равно 4 минутам при использовании ЭВМ М-20.

Автор выражает благодарность Г.А.Ососкову за постановку задачи и В.Г.Тишину за полезные консультации.

Л и т е р а т у р а

1. B.Souček, Rev.Sci.Instr., 36, 11, 1582 (1965).
2. R.Gold, Rev.Sci.Instr., 36, 6, 784 (1965).
3. J.H.Williamson Rev.Sci.Instr., 37, 6, 736 (1966).
4. Г.Крамер. Математические методы статистики. ГИИЛ, Москва, 1948.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 января 1968 года.

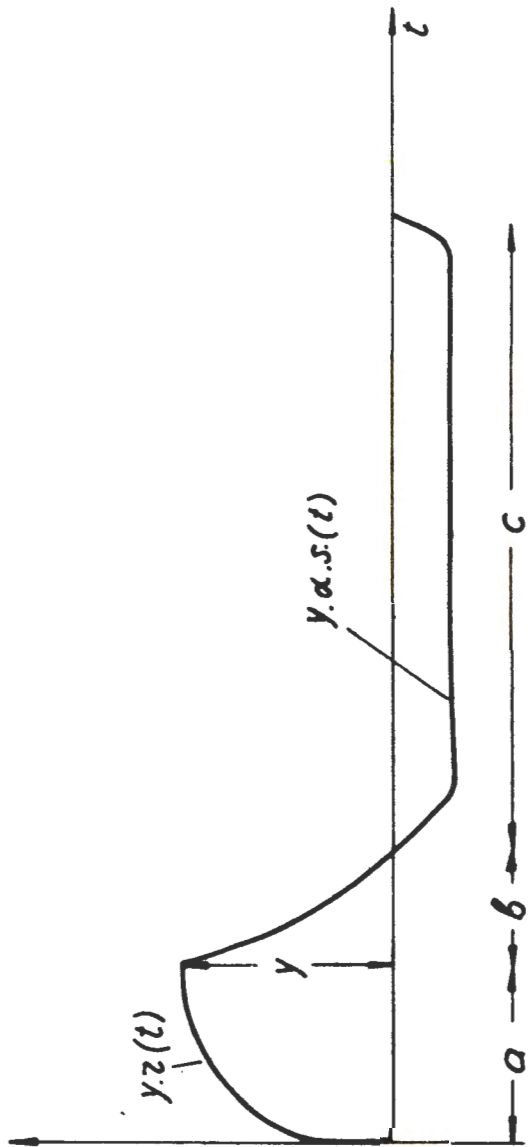


Рис. 1. Вид неискаженного импульса.

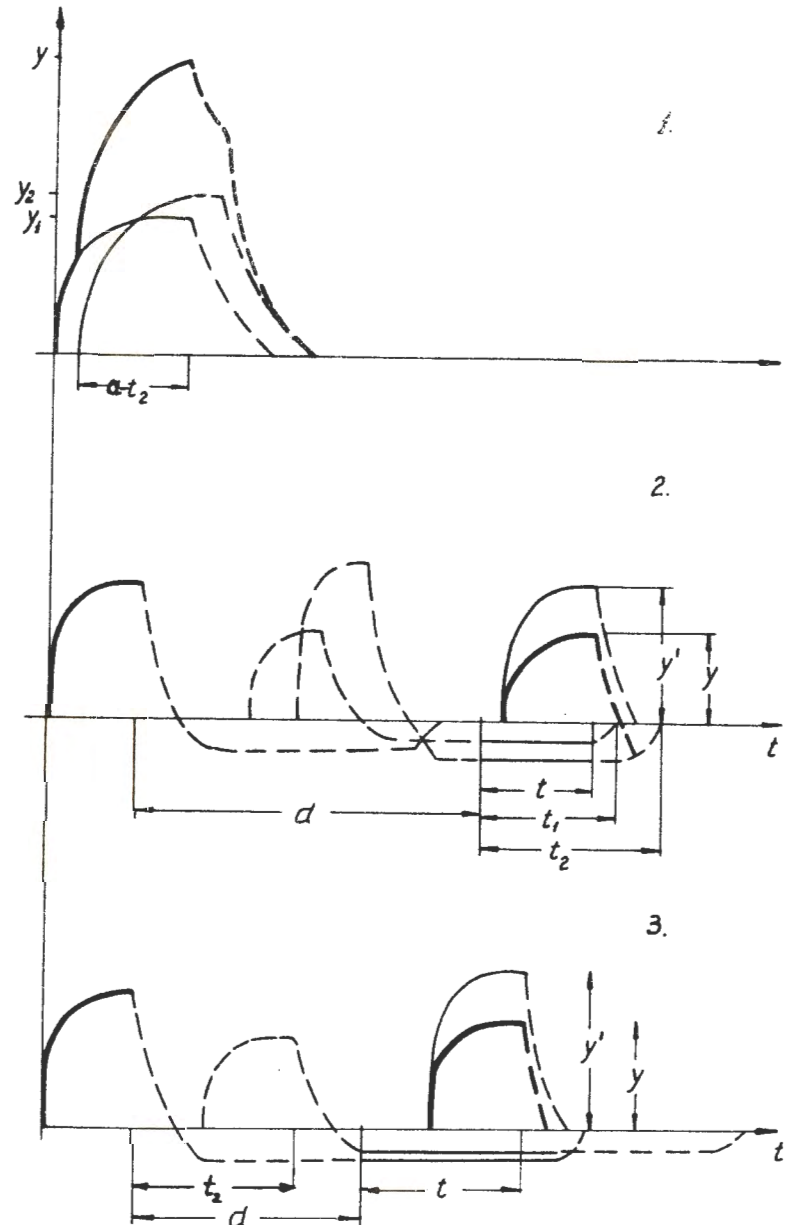


Рис. 2. 1. Наложение импульсов без хвостов. 2. Наложение при большом мертвом времени. 3. Наложение при коротком мертвом времени.

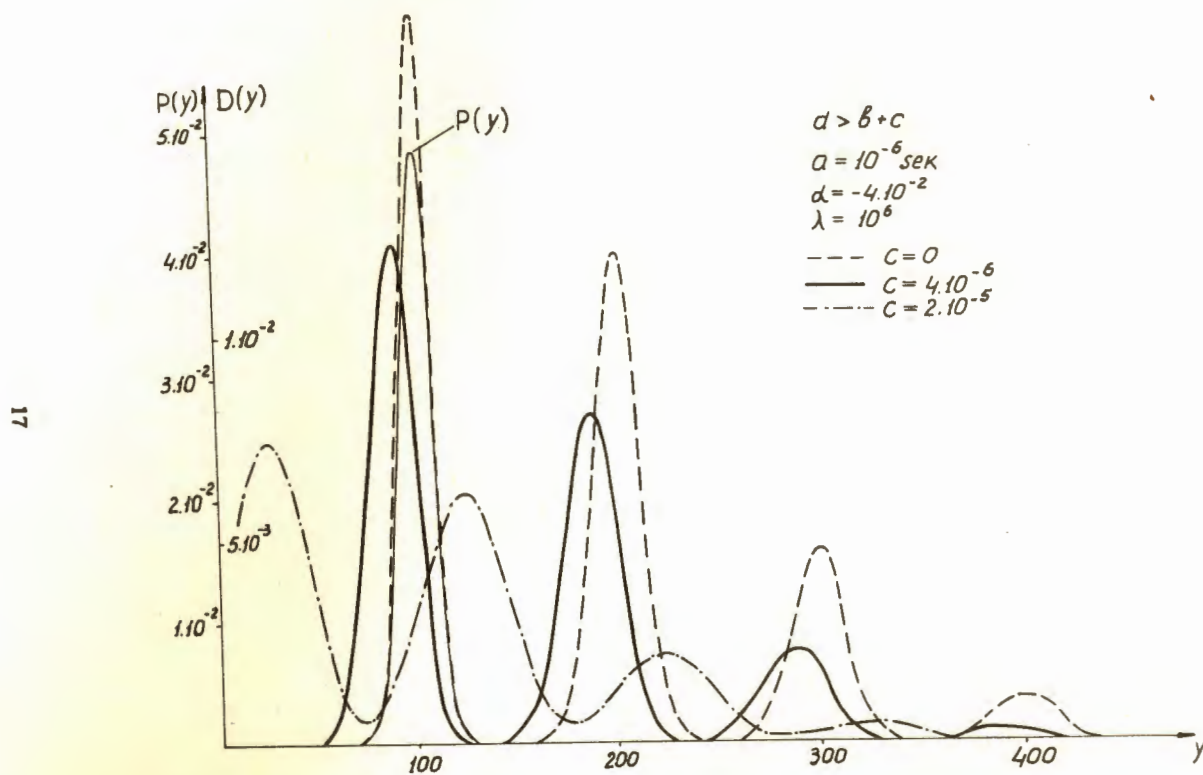
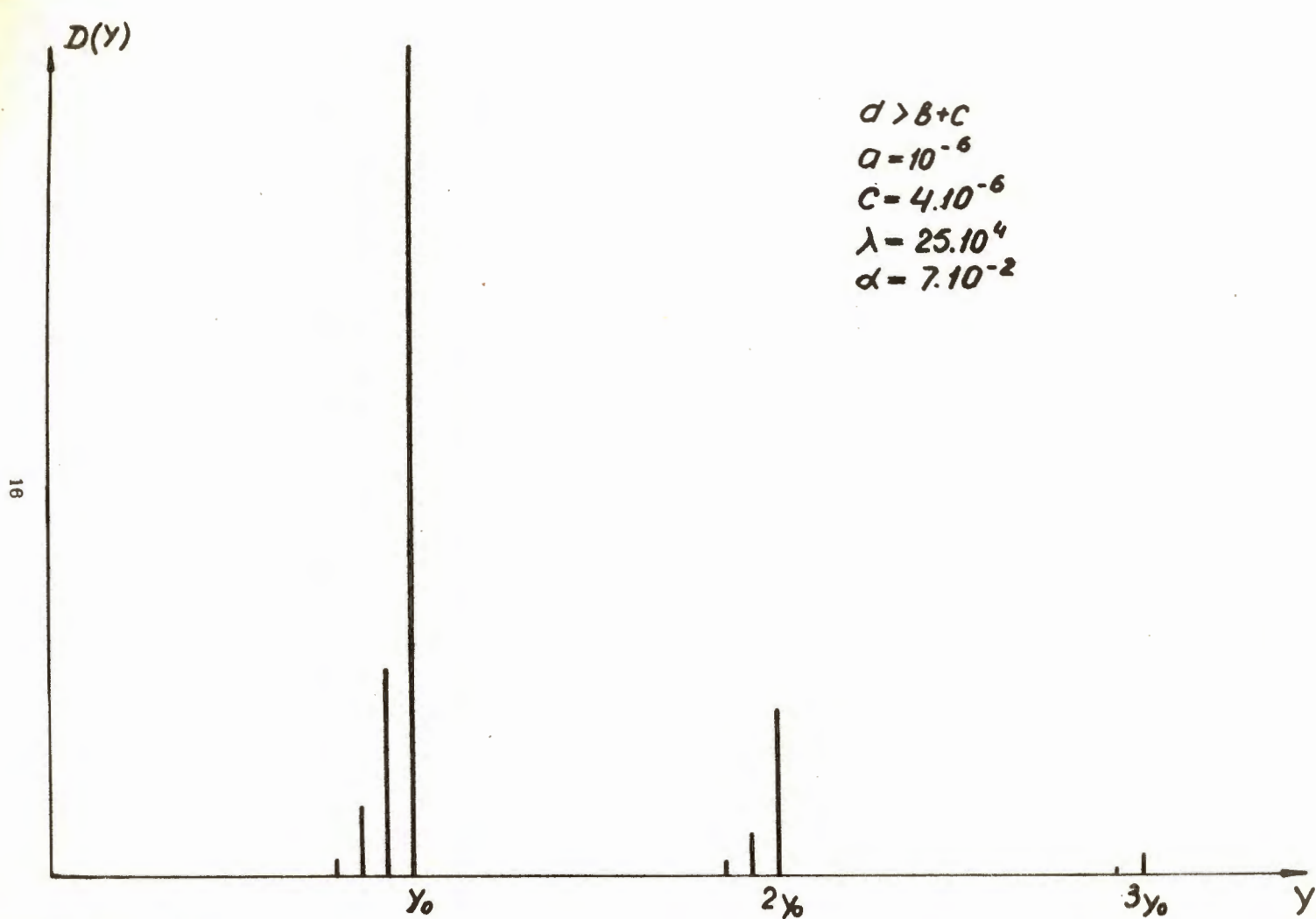


Рис. 4. Искажение гауссовского пика в зависимости от длины хвоста импульсов.

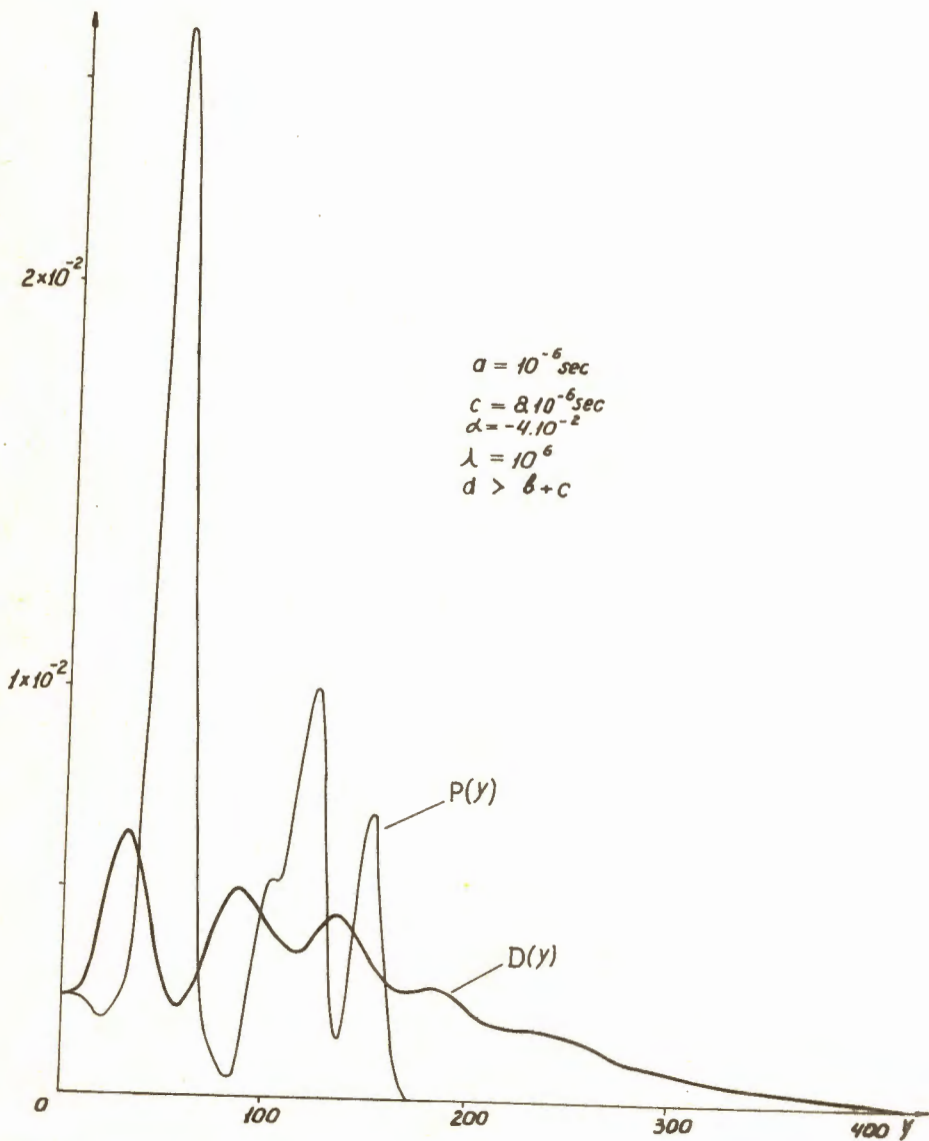


Рис. 5. Искажение сложного спектра, состоящего из гауссовских пиков и прямоугольных частей ($P(y)$ - неискаженный, $D(y)$ - искаженный спектр).