ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р10 - 3575

Г.И. Макаренко, В.И. Мороз, И.С. Саитов,
А.П. Стельмах

УПРОЩЕННЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ НАХОЖДЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННОЙ НЕИЗЛУЧАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ МЕТОДОМ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1967

Р10 - 3575

Г.И. Макаренко, В.И. Мороз, И.С. Саитов,
А.П. Стельмах

УПРОЩЕННЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ НАХОЖДЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЗАРЯЖЕННОЙ НЕИЗЛУЧАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ МЕТОДОМ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ

1°. В работе [1] рассматривается задача уточнения начальных оценок импульса P_0^* и угла β_c^*, имеющая целью получить наиболее эффективные оценки импульса и угла с учётом неоднородности магнитного поля, многократного рассеяния, ионизационных потерь и ошибок измерения координат.

Система уравнений для нахождения этих оценок получается путем разложения в ряд приращения $\Delta\beta$ отдельно на каждом интервале следа. Это приводит к довольно сложным выражениям, расчёт которых на ЭВМ требует большого объема вычислений.

Однако, используя малость поправочного члена к основной компоненте магнитного поля в уравнении траектории, (см. уравнение (2), описывающее зависимость угла поворота β от длины дуги), мы можем перейти к более простому дифференциальному уравнению, аппроксимируя след и магнитное поле полиномами по степеням S. Указанная замена дифференциальных уравнений, с одной стороны, достаточно точна, а с другой стороны, она позволяет резко сократить объем вычислений на ЭВМ при составлении системы уравнений, из которых получаются наиболее эффективные оценки импульса P_0 и угла β.

В приводимом ниже выводе уравнений связи, необходимых для получения наиболее эффективных оценок P_0 и β, используются все предположения, принятые в [1].

2°. Как показано в [1] (Приложение 2), из уравнения Лоренца для тормозящей среды

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{C}[\vec{V},\vec{H}] + \frac{\vec{P}}{P}\frac{dP}{dt} \tag{1}$$

можно получить выражение для производной

$$\frac{d\beta}{dS} = \frac{e}{PC}\left[-H_z + \mathrm{tg}\,\alpha\,(H_x \cos\beta + H_y \sin\beta)\right] \qquad (2)$$

(здесь и далее используются обозначения, принятые в /1/).

Сумма, стоящая в квадратных скобках, зависит только от геометрии следа (т.е. от координат измеренных точек) и может быть с достаточной точностью найдена до определения импульса частицы.

Выражая импульс в единицах МЭВ/С, магнитное поле в кгс и вводя обозначение[x/] $\frac{1}{PC} = a$, запишем (2) в виде

$$\frac{d\beta}{dS} = 0{,}3\, a\left[-H_z + \mathrm{tg}\,\alpha\,(H_x \cos\beta + H_y \sin\beta)\right]. \qquad (3)$$

Второй член в квадратных скобках формулы (3) обычно мал по сравнению с первым, поэтому величины $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{Sin}\,\beta$ и $\cos\beta$ можно определять с меньшей точностью, чем величину H_z.

Зная топографию магнитного поля и координаты измеренных точек на следе, можно определить величины H_x, H_y, H_z в каждой измеренной точке и с необходимой точностью аппроксимировать их многочленами по степеням S :

$$H_x = \sum_{k=0}^{4} \ell_k S^k, \quad H_y = \sum_{k=0}^{4} g_k S^k, \quad H_z = \sum_{k=0}^{4} h_k S^k . \qquad (4)$$

Из координат измеренных точек можно найти в виде многочленов также и величины

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = \sum_{k=0}^{4} c_k S^k, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \sum_{k=0}^{4} d_k S^k, \qquad (5)$$

$$\mathrm{Cos}\,\beta = \sum_{k=0}^{4} m_k S^k, \quad \sin\beta = \sum_{k=0}^{4} n_k S^k$$

[x/] Обращаем внимание читателя на то, что в /1/ $a_0 = -\frac{e}{P_0 c}\,\frac{H_{z_0}}{\cos\alpha_0}$, здесь же будет $a_0 = \frac{1}{P_0 c}$.

коэффициенты в разложениях (4) и (5) определяем по методу наименьших квадратов, а порядки многочленов, вообще говоря, следует выбирать с помощью какого-либо критерия качества приближения, например, критерия Гаусса. В случае, если многочлены четвертой степени не обеспечивают необходимой точности, следует взять многочлены других степеней (более высоких или, может быть, даже более низких) и провести вычисления, аналогичные приводимым ниже.

Если известно точное значение a_0 (a в начальной точке) для данного следа, то интегрируя ионизационные потери, можно найти значение величины "a" в любой точке следа и аппроксимировать ее многочленом вида

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{4} b_k S^k , \tag{6}$$

где коэффициенты b_k зависят от a_0, массы частицы и тормозной способности рабочего вещества пузырьковой камеры.

Четвертая степень полинома (6) дает достаточно хорошую аппроксимацию для подавляющего большинства треков. Обозначая $a_0 - a_0^* = A$, $a_0^* = \dfrac{1}{P_0^* c}$, считая, что $|A| \ll |a_0^*|$, и поэтому ограничиваясь линейными членами в разложении величин b_k в окрестности точки a_0^*, получим

$$b_k = b_k\Big|_{a_0 = a_0^*} + A \frac{d b_k}{d a_0}\Big|_{a_0 = a_0^*} \qquad a = a_0^* + A + \sum b_k\Big|_{a_0=a_0^*} S^k + A \sum \frac{d b_k}{d a_0}\Big|_{a_0=a_0^*} S^k \tag{6'}$$

В дальнейшем во всех формулах величины b_k и $\dfrac{d b_k}{d a_0}$ берутся в точке $a_0 = a_0^*$ и для краткости знак $\Big|_{a_0 = a_0^*}$ опускаем.

Подставляя (4), (5) и (6') в (3), раскрывая скобки и пренебрегая членами выше четвертой стпени по S, получим выражение для $\dfrac{d\beta}{dS}$ в виде многочлена.

Таким образом, производится замена нелинейного относительно $\beta(S)$ дифференциального уравнения (3), интегрирование которого требует большого числа операций на ЭВМ, на уравнение вида

$$\frac{d\beta}{dS} = F(S) . \tag{7}$$

Очевидно, что (7) интегрируется достаточно легко. Мы считаем, что решение упрощенного уравнения (7) достаточно близко к решению точного уравнения (3). Близость решений обеспечивается тем, что для построения аппроксимирующих полиномов (4) и (5) мы использовали точки, измеренные на следе, которые могут отклоняться от кривой – решения точного уравнения – только за счёт многократного рассеяния частицы и ошибок измерения. Однако влияние многократного рассеяния и ошибок измерения на решение упрощенного уравнения (7) существенно ослабляется из-за малости второго слагаемого в правой части (3).

После интегрирования и учёта многократного кулоновского рассеяния на пути S_{i-1} получим

$$\beta(S) = \beta^*_{i-1} + \Delta_{i-1} , \tag{8}$$

где

$$\beta^*_{i-1} = \beta^*_0 + \sum_{j=1}^{5} k_{ij} S^j_{i-1} , \tag{9}$$

$$\Delta_{i-1} = B + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j + A \sum_{j=1}^{5} m_{ij} S^j + \sum_{j=1}^{5} k_{ij} (S^j - S^j_{i-1}), \tag{10}$$

$B = \beta_0 - \beta^*_0$ – искомая поправка начального угла β_0 , $S_{i-1} \le S \le S_i$,

δ_j – изменение угла β за счёт многократного рассеяния на интервале от $(j-1)$ до j -ой точки. Дисперсия величины δ_j равна

$$D_{\delta_j} = \left(\frac{10}{PV}\right)^2 \frac{\Delta S_j}{X_0} \frac{1}{\cos^2\alpha_j} , \tag{11}$$

где V – скорость частицы, а P –импульс в единицах Мэв/с.

$$k_{ij} = 0{,}3 \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{i+1} b_{j-i-1} \left[\sum_{r=0}^{i} d_r \sum_{K=0}^{i-r} (\ell_K m_{i-r-K} + g_K n_{i-r-K}) - h_i \right], \tag{12}$$

$$m_{ij} = 0{,}3 \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{i+1} \frac{d}{d a_0} (b_{j-i-1}) \left[\sum_{r=0}^{i} d_r \sum_{K=0}^{i-r} (\ell_K m_{i-r-K} + g_K n_{i-r-K}) - h_i \right],$$

$$(j = 1 \div 5.),$$

($b_0 = 0$, см. ф-лу (6))

Заметим, что $|\Delta_{i-1}| \ll 1$, а β^*_{i-1} есть величина угла β в $(i-1)$ -ой точке при $a_0 = a^*_0$, $\beta_0 = \beta^*_0$, $\delta_j = 0 \, (j = 1, 2, \ldots, i-1)$.

3°. Уравнения связи в общем виде можно записать так:

$$y_i - \epsilon_i = y_{i-1} - \epsilon_{i-1} + \xi_i \cos \beta_i + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sin \beta(S) \cos \alpha \, dS , \tag{13}$$

где интеграл дает приращение координаты y , обусловленное магнитным полем при наличии торможения, на интервале от $(i-1)$ -ой до i -той точки, а $\xi_i \cos \beta_i \approx \frac{1}{2} \Delta s_i \delta_i \cos \beta^*_{i-1}$ (см. /1/, стр. 11) - приращение, обусловленное многократным рассеянием на том же интервале. Так как

$$\sin \beta(S) = \sin(\beta^*_{i-1} + \Delta_{i-1}) \approx \sin \beta^*_{i-1} \left(1 - \frac{\Delta^2_{i-1}}{2}\right) + \Delta_{i-1} \cos \beta^*_{i-1} , \tag{14}$$

то (13) принимает вид

$$y_i - \epsilon_i = y_{i-1} - \epsilon_{i-1} + \xi_i \cos \beta_i + \cos \beta^*_{i-1} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \Delta_{i-1} \cos \alpha \, dS +$$
$$+ \sin \beta^*_{i-1} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \cos \alpha \, dS - \frac{1}{2} \sin \beta^*_{i-1} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \Delta^2_{i-1} \cos \alpha \, dS . \tag{15}$$

Учитывая (5) и (10), находим произведения $\Delta_{i-1} \cos \alpha$ и $\Delta^2_{i-1} \cos \alpha$, отбрасывая при этом члены выше пятой степени по S и выше первой степени по A, B, δ_i . После интегрирования получим

$$y_i = y_{i-1} + \epsilon_i - \epsilon_{i-1} + \frac{1}{2} \delta_i \Delta s_i \cos \beta_i + A \tilde{\tilde{C}}_i + B \tilde{\tilde{D}}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j \tilde{\tilde{D}}_i + \tilde{\tilde{\Phi}}_i , \tag{16}$$

где, в соответствии с /1/, ξ_i заменено на $\frac{1}{2}\delta_i \Delta s_i$,

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} .$$

Далее

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{C}}_i &= \tilde{\tilde{m}}_{4,i} \cos\beta^*_{i-1} + [\, \tilde{\tilde{m}}_{4,i}(\beta^*_{i-1} - \beta^*_0) - \tilde{\tilde{m}}_{5,i}\,] \sin\beta^*_{i-1} ,\\
\tilde{\tilde{D}}_i &= \tilde{\tilde{q}}_i \cos\beta^*_{i-1} + [\, \tilde{\tilde{q}}_i(\beta_{i-1} - \beta^*_0) - \tilde{\tilde{k}}_{4,i}\,] \sin\beta^*_{i-1} ,\\
\tilde{\tilde{\Phi}}_i &= [\, \tilde{\tilde{k}}_{4,i} - (\beta^*_{i-1} - \beta_0)\, \tilde{\tilde{q}}_i\,] \cos\beta^*_{i-1} + \\
&\quad + \{ [\, 1 - \frac{1}{2}(\beta^*_{i-1} - \beta^*_0)^2]\, \tilde{\tilde{q}}_i + (\beta^*_{i-1} - \beta_0)\, \tilde{\tilde{k}}_{4,i} - \frac{1}{2}\tilde{\tilde{k}}_{5,i} \} \sin\beta^*_{i-1} ,
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{m}}_{4,i} &= \sum_{j=2}^{6} \frac{1}{j}\, m_{2,j} (S^j_i - S^j_{i-1}) ,\\
\tilde{\tilde{m}}_{5,i} &= \sum_{j=3}^{6} \frac{1}{j}\, m_{3,j-1} (S^j_i - S^j_{i-1}) ,\\
\tilde{\tilde{q}}_i &= \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{j}\, c_{j-1} (S^j_i - S^j_{i-1}) ,\\
\tilde{\tilde{k}}_{4,i} &= \sum_{j=2}^{6} \frac{1}{j}\, k_{2,j} (S^j_i - S^j_{i-1}) ,\\
\tilde{\tilde{k}}_{5,i} &= \sum_{j=3}^{6} \frac{1}{j}\, k_{3,j-1} (S^j_i - S^j_{i-1}) ,\\
m_{2j} &= \sum_{i=1}^{j-1} m_{1,i}\, c_{j-i-1} , \quad (j = 2 \div 6) ,\\
m_{3,j} &= \sum_{i=2}^{j} c_{j-i} \sum_{\ell=1}^{i-1} m_{1,\ell}\, k_{1,i-\ell} , \quad (j = 2 \div 5) ,\\
k_{2,j} &= \sum_{i=1}^{j-1} k_{1,i}\, c_{j-i-1} , \quad (j = 2 \div 6) ,\\
k_{3,j} &= \sum_{i=2}^{j} c_{j-i} \sum_{\ell=1}^{i-1} k_{1,\ell}\, k_{1,i-\ell} , \quad (j = 2 \div 5)
\end{aligned} \tag{18}$$

Тильдой помечены величины, вычисляемые для каждого интервала в отдельности, без тильды – величины, вычисляемые для всего следа в целом.

Заметим, что в (16) $\tilde{\tilde{C}}_i$ и $\tilde{\tilde{D}}_i$ умножаются на малые величины А и В. Учитывая, кроме того, малость вторых слагаемых по сравнению с первыми, в выражениях (17) для $\tilde{\tilde{C}}_i$ и $\tilde{\tilde{D}}_i$ вторыми слагаемыми можно пренебречь. Однако получающееся при этом упрощение формул приводит лишь к небольшому сокращению вычислений.

Рассматривая (16) как рекуррентную формулу, получим уравнение связи

$$y_i = \epsilon_i + T_0 + A \sum_{j=1}^{i} \tilde{\tilde{C}}_j + B \sum_{j=1}^{i} \tilde{\tilde{D}}_j + \sum_{j=1}^{i} \delta_j \tilde{\tilde{M}}_j + \sum_{j=1}^{i} \tilde{\tilde{\Phi}}_j , \tag{19}$$

где

$$\tilde{\tilde{M}}_j = \sum_{k=j+1}^{i} (\tilde{\tilde{D}}_k + \frac{1}{2} \Delta s_j \cos\beta_j) . \tag{20}$$

Итак, по сравнению с /1/ достигается уменьшение объема вычислений за счёт того, что, во-первых, интегрирование уравнения (7) выполняется сразу для всего следа, а в /1/ приближенное интегрирование соответствующего уравнения проводилось путем разложения в ряд приращения $\Delta\beta_i$ на каждом интервале в отдельности. Во-вторых, интегрирование на всем следе (здесь) заметно проще, чем вычисление величины $\Delta\beta_i$ в /1/ на отдельном интервале.

Литература

1. Г.А.Емельяненко, К.П.Ломов, Г.И.Макаренко, В.И.Мороз, И.С.Саитов, А.П.Стельмах. Определение методом максимума правдоподобия параметров заряженной частицы, движущейся в тормозящей рассеивающей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле. Препринт ОИЯИ, Р-2829, Дубна, 1966 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1967 года.