

29/дп - 66

с 15а

К-71

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P10 - 3032



З.М. Косарева, Г.А. Ососков, К.Д. Толстов

МЕТОД ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ
ДАНЫХ С ПОМОЩЬЮ СУПЕРПОЗИЦИИ
НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1966

P10 - 3032

З.М. Косарева, Г.А. Ососков, К.Д. Толстов

МЕТОД ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ
ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ СУПЕРПОЗИЦИИ
НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ

4680/1 нр.



Конечной целью опыта является нахождение функциональной зависимости, связывающей переменные величины в изучаемом явлении. Результаты опытов часто представляют в виде гистограмм, причем интервалы, по которым они обычно строятся, выбираются с учетом имеющейся статистики. Однако разрешение отдельных максимумов на гистограмме, например резонансных пиков на общем фоне взаимодействий, зависит не только от статистики событий и величины интервалов, но и от всей совокупности экспериментальных факторов, влияющих на результат.

Рассмотрим опыты, в которых определяются, например, импульсные спектры или эффективные массы различных комбинаций частиц в пузырьковых камерах или в фотоэмульсиях. Наблюдаемая гистограмма получается вследствие деформации истинной под влиянием экспериментальных причин, к которым в рассматриваемых опытах относятся:

- 1) эффективность обнаружения изучаемых событий;
- 2) вероятность выполнения измерений на данном событии;
- 3) точность измерений;
- 4) результирующая статистика событий, т.е. число событий с учетом отбраковки.

Под эффективностью обнаружения мы понимали отношение найденного при поиске числа событий к истинному их числу. Как правило, все четыре фактора взаимосвязаны, однако обычно производится последовательный учет их, то есть они рассматриваются как независимые. Это может привести к существенным ошибкам - появлению ложных максимумов или же подавлению истинных, если последние близки друг к другу. Вопрос об эффективности обнаружения изучаемых событий и ее дисперсии рассматривался в ряде работ^{/1-3/} на основе двух независимых наблюдений, исходя из постулата постоянной эффективности, то есть независимой от всех факторов, связанных с опытом: времени, внимания и т.д. Однако, как показано в работах^{/4,5/}, этот постулат должен проверяться, т.к. он зачастую не выполняется, что приводит к ошибкам. В^{/4,5/} даны правила контроля эффективности и оценки истинного числа событий, а также дисперсий этих величин на основе трех независимых наблюдений.

Как показали аналитические и реальные примеры, найденные формулы обеспечивают практически необходимую точность. В соответствии с этим можно заключить, что взаимосвязь пункта 1 с остальными является наиболее слабой, и в достаточном приближении мы можем рассматривать пункт 1 как независимый. Наоборот, остальные три пункта должны рассматриваться совместно. Их взаимосвязь для указанных в измерениях таких величин, как, например, импульс, следует из того, что вероятность выполнения измерений зависит от длины следа и его угла с направлением магнитного поля или плоскостью эмульсии, что влияет на результирующую статистику и точность измерений.

Проведем рассмотрение в применении к конкретному примеру – спектру поперечных импульсов протонов в неупругих π^- -p-столкновениях при 7 Гэв/с.

Измерения импульсов производились в эмульсионной камере двумя способами. В первом – на следах остававшихся протонов по их длине со средней точностью $\pm 5\%$.

Эти измерения возможны на всех следах, следовательно, вероятность w измерения равна единице. Во втором способе измерения импульсов на следах быстрых протонов, которые вылетали из камеры, производились по многократному кулоновскому рассеянию и были сделаны только для протонов, имевших угол наклона к плоскости эмульсии в пределах $\alpha \leq 5^\circ$. В соответствии с этим для восстановления истинного спектра каждому измеренному протону необходимо приписать кратность $\rho = w^{-1} = \pi (2 \arcsin \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \theta})^{-1}$, где θ – угол протона с пучком первичных частиц. Точность измерений для этой группы протонов в среднем $\pm 15\%$. Очевидно, что в плоскости, перпендикулярной к первичному пучку, распределение протонов должно быть симметричным по углам и импульсам и, следовательно, составляющие поперечного импульса по любой оси в этой плоскости в среднем одинаковы и центральны.

II

Будем искать неизвестную функцию импульсного распределения по каждой декартовой оси $f(p_x)$, разлагая ее в ряд по функциям Гаусса.

$$f(p_x) = \sum_1 \frac{a_i}{\sigma_i} e^{-\frac{p_x^2}{2\sigma_i^2}} \quad (1)$$

Если взять только один член ряда, то распределение поперечного импульса $p_{\perp} = r$ будет выражаться формулой:

$$p_{\perp}(r, \sigma) = \frac{2r}{\sigma} e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} \quad (r > 0). \quad (2)$$

Будем в дальнейшем предположение о справедливости распределения (2) называть

гипотезой I. Если взять два члена ряда в распределении (1) (будем такое предположение называть гипотезой II), то, как показано в Приложении, поперечные импульсы с составляющими (1) распределены с плотностью

$$p_{II}(r, \sigma_1, \sigma_2, c) = \frac{c^2}{\sigma_1^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{(1-c)^2}{\sigma_2^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_2^2}} + \frac{2c(1-c)}{\sigma_1 \sigma_2} e^{-\frac{r}{4}(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2})} I_0 \left[\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \right], \quad (3)$$

где $I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Плотность (3) имеет, вообще говоря, три максимума, высота которых зависит от соотношения между параметрами σ_1 , σ_2 и веса c .

При $c = 1$ плотность (3) переходит в (2) с параметром $\sigma = \sigma_1 \sqrt{2}$, при $c = 0$ получаем (2) с параметром $\sigma = \sigma_2 \sqrt{2}$. В случае совпадения параметров $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ при любом c опять получаем (1). В самом деле, поскольку $I_0(0) = 1$, имеем

$$p_{II}\left(r, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, c\right) = \frac{2r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} [c^2 + (1-c)^2 + 2c(1-c)] = \frac{2r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$$

Для выбора той или иной из этих конкурирующих гипотез мы должны с помощью какого-то критерия проверить совпадения наших предположений о распределении поперечного импульса с данными эксперимента. Наилучшее совпадение будет служить обоснован-ем выбора гипотезы.

Отметим сразу же, что такая постановка не исключает возможности наличия других гипотез, может быть, более удачных с точки зрения выбранного критерия.

Сравнение гипотез I и II с имеющимися экспериментальными данными осуществлялось хорошо известным в статистике методом наименьших квадратов /8/, позволяющим уточнять грубо заданные значения параметров распределения и дающим количественную меру совпадения гипотезы с выборочными данными.

Будем обозначать имеющиеся значения величины поперечного импульса, расположенные в порядке возрастания, символами

$$r_1, r_2, \dots, r_n. \quad (4)$$

Как уже говорилось, некоторые из этих значений являются кратными, так что будем считать, что значение r_k ($k = 1, n$) встречается l_k раз ($l_k \geq 1$). Обозначим также $n = \sum_{k=1}^n l_k$.

Построим гистограмму по выборке (4). Для этого разобьем полупрямую $r > 0$ на v интервалов (a_{i-1}, a_i) длины $\Delta_i = a_i - a_{i-1}$ и подсчитаем ν_i - число значений r_k , попавших в интервал с учетом их кратности.

Обозначим числа однократных и кратных значений r_k , попавших в Δ_i :

$$\nu_{1i} = \sum_{\substack{r_k \in \Delta_k \\ \ell_k = 1}} \ell_k, \quad \nu_{2i} = \sum_{\substack{\ell_k > 1 \\ r_k \in \Delta_k}} \ell_k. \quad (5)$$

Очевидно, что $\nu_i = \nu_{1i} + \nu_{2i}$.

Вероятность попадания в каждый из интервалов Δ_i при достаточно большом объеме выборки n будет примерно равна

$$p_i \approx \frac{\nu_i}{n}.$$

Для теоретического подсчета этой вероятности мы должны вычислить интеграл

$$P_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \psi(r) dr, \quad (6)$$

где через $\psi(r)$ обозначена плотность распределения величин поперечных импульсов для соответствующей гипотезы и остальных обстоятельств, перечисленных выше в пунктах 1-4.

Значения параметров распределения для гипотез I и II нам неизвестны, мы можем только грубо оценить их по гистограмме. Эти начальные значения параметров уточняются затем с помощью метода наименьших квадратов следующим образом. Составляется функционал

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n w_i [P_i - p_i]^2, \quad (7)$$

зависящий от функций (6), куда и входят неизвестные параметры. Веса w_i отдельных слагаемых в (7) берутся обратно пропорциональными дисперсиям случайных величин.

Далее для каждой из гипотез подбираются те значения параметров, которые дают минимум функционалу (7). Поиск минимума осуществляется в стандартной программе минимизации методом итераций, предложенным И.Н. Силиным и С.Н. Соколовым^{17/}.

Значения параметров, дающие минимум функционалу (7), принимаются за наилучшие оценки этих параметров по информации, заключенной в гистограмме, а сама величина функционала в точке минимума χ_{\min}^2 , вычисленная для каждой из гипотез, позволяет определять ошибки найденных параметров, судить о качестве наших предположений и сравнивать гипотезы между собой.

Предпочтение отдается той гипотезе, величина χ_{\min}^2 для которой меньше. Благодаря тому, что χ_{\min}^2 имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы, равным разности числа n интервалов гистограммы и числа параметров, мы по таблицам χ^2 можем определить значимость расхождения наблюдаемых частот p_i и теоретиче -

ских вероятностей (8). Появление значения χ_{\min}^2 , не "укладывающегося" в вероятные пределы, можно объяснить действием таких факторов, как малая статистика, наличие плохо измеренных точек, тем, что в формуле (8) не учтены какие-то условия опыта или ошибки эксперимента. Наконец, не следует забывать, что ограничение двумя членами ряда для плотности $\psi(r)$ может оказаться недостаточным.

Учет условий эксперимента в формуле для $\psi(r)$ может быть проведен по следующей схеме.

Величины r_k , образующие выборку (4), могут быть представлены как суммы двух случайных величин

$$r = \xi + \eta,$$

где ξ — истинная величина амплитуды поперечного импульса, распределенная с плотностью $p_\xi(r)$, определяемой формулами (2) или (3), в зависимости от гипотезы, а η — случайная ошибка измерения, среднее квадратичное отклонение которой возрастает по линейному закону с ростом ξ . Если ξ приняло значение z , то η распределяется с плотностью

$$\phi_{\eta}(r) = \frac{1}{g(z) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-z)^2}{2g^2(z)}} \quad (8)$$

Существенное различие условий, в которых происходит измерение кратных и однократных точек, учтено в формуле для среднеквадратичного отклонения $g(r)$:

$$g(r) = \begin{cases} 0,05 r & \text{— для однократных точек,} \\ 0,15 r & \text{— для кратных точек.} \end{cases} \quad (9)$$

Выбор коэффициентов в формуле (9) в значительной мере условен, т.к. они характеризуют средние значения.

По-видимому, в дальнейшем эти коэффициенты нужно также считать неизвестными параметрами и уточнять, как и другие параметры, используя метод наименьших квадратов.

В соответствии с известными правилами теории вероятностей об определении плотности распределения суммы двух случайных величин плотность $\psi(r)$ получается как интеграл от произведения плотностей (1) или (3) на (8) по всем возможным значениям z .

Таким образом, для гипотезы 1 получаем

$$\psi_I(r) = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{z}{g(z)} \exp\left[-\frac{z^2}{\sigma^2} - \frac{(r-z)^2}{2g^2(z)}\right] dz, \quad (10)$$

для гипотезы II аналогично

$$\psi_{II}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{g(z)} e^{-\frac{(r-z)^2}{2g^2(z)}} P_{II}(z, \sigma_1, \sigma_2, c) dz. \quad (11)$$

К сожалению, при практических расчетах приходится еще более усложнять вид плотности $\psi(r)$ в связи с необходимостью учитывать реальное размещение кратных и однократных точек в гистограмме при подсчете как весов w_i , так и значений величины $g(z)$.

Как уже отмечалось, для определения весов w_i необходимо вычислять дисперсию $\sigma_{p_i}^2$ случайных величин p_i , имеющих биномиальное распределение. Для учета различного вклада в ошибки одно- и многократных точек представим p_i с помощью (5) в виде

$$p_i = \frac{\nu_i}{m} = \frac{\nu_{1i}}{m} + \frac{\nu_{2i}}{m}.$$

Отсюда в силу независимости результатов отдельных измерений

$$\sigma_{p_i}^2 = \frac{1}{m^2} \cdot \sigma_{(\nu_{1i} + \nu_{2i})}^2 = \frac{1}{m^2} [\sigma_{\nu_{1i}}^2 + \sigma_{\nu_{2i}}^2].$$

Оценим приближенно вероятность попадания точек кратности ν_{2i} в i -й интервал гистограммы отношением $\frac{\nu_{2i}}{m}$, аналогично вероятность попадания ν_{1i} точек в тот же интервал примерно равна $\frac{\nu_{1i}}{m}$. Получаем оценку для $\sigma_{p_i}^2$:

$$\sigma_{p_i}^2 = \frac{1}{m^2} \left[\frac{\nu_{1i}}{m} \left(1 - \frac{\nu_{1i}}{m}\right) + \frac{\nu_{2i}}{m} \left(1 - \frac{\nu_{2i}}{m}\right) \right] = \frac{\nu_{1i}(m - \nu_{1i}) + \nu_{2i}(m - \nu_{2i})}{m^3}.$$

Это дает выражения для весов w_i :

$$w_i = \frac{m^3}{\nu_{1i}(m - \nu_{1i}) + \nu_{2i}(m - \nu_{2i})} \quad (i = \overline{1, s}). \quad (12)$$

Поскольку в один и тот же интервал гистограммы (a_{i-1}, a_i) попадали как кратные, так и однократные точки, функция $g(z)$, по-разному определенная для тех и других, была усреднена по каждому интервалу гистограммы и внутри i -го интервала считалась постоянной, равной

$$g_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \sqrt{\frac{\nu_{1i}(0,05)^2 + \nu_{2i}(0,15)^2}{\nu_i}}. \quad (13)$$

Подобное усреднение неизбежно при пользовании гистограммами, ошибка его тем меньше, чем короче интервал гистограммы Δ_i , однако, с другой стороны, учитывая то, что справедливость вышеприведенных оценок для σ_{p_i} , определяющих веса (12), требует достаточно большого числа попаданий в каждый интервал, мы не можем слишком уменьшать длины интервалов. Поэтому пришлось повторить все расчеты дважды при

конкретных значениях $S_1 = 18$ и $S_2 = 9$ и таким путем подобрать оптимальное значение с точки зрения минимальности χ^2 .

Замена функции $g(z)$ на кусочно-постоянную (13) позволяет записать выражения (10) и (11) для плотностей $\psi_I(r)$ и $\psi_{II}(r)$ в виде сумм

$$\hat{\psi}_I(r) = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^s \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{z}{g_i} p_I(z, \sigma) dz, \quad (14)$$

$$\hat{\psi}_{II}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^s \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{g_i} e^{-\frac{(r-z)^2}{2\sigma_i^2}} p_{II}(z, \sigma_1, \sigma_2, c) dz, \quad (15)$$

где $p_I(r, \sigma)$ определено в (1), а $p_{II}(z, \sigma_1, \sigma_2, c)$ - в (3).

Таким образом, мы получаем окончательный вид теоретических выражений для вероятностей P_I попадания в тот или иной интервал гистограммы с учетом особенностей эксперимента и гипотетических предположений.

$$P_{II} = \frac{2}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \int \left\{ \sum_{j=1}^s \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{z}{g_j} \exp \left[-\frac{z^2}{\sigma^2} - \frac{(r-z)^2}{2g_j^2} \right] dz \right\} dr, \quad (16)$$

$$P_{III} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \sum_{i=1}^s \frac{1}{g_i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left\{ \frac{z^2}{\sigma_1^2} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{(1-c)^2}{\sigma_2^2} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}} + \frac{2c(1-c)}{\sigma} z e^{-\frac{z^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)} I_0 \left(\frac{z^2}{4} \left| \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right| \right) \right\} e^{-\frac{(r-z)^2}{2g_j^2}} dz dr. \quad (17)$$

Подставляя (16) или (17), а также (12) в формулу (7), получаем функционал χ^2 , который в нашем случае обращается в функцию параметров σ_1, σ_2, c в случае гипотезы II и σ - в случае гипотезы I.

III

На опыте в неупругих $\pi^- - N$ - столкновениях при импульсе 7 Гэв/с было измерено 203 значения поперечных импульсов протонов $p_{\perp}^{1/8}$. С учетом кратности суммарное число случаев составило 352,5. Эти данные были последовательно опробованы по гипотезам II и I. В случае гипотезы II значения p_{\perp} от 0 до 840 Мэв/с разбивались на 18 интервалов. В расчетах вначале были взяты следующие параметры: $\sigma_1 = 260$ с весом 0,6 и $\sigma_2 = 420$; при этом было получено, что $\chi^2 = 202,3$. Второй набор параметров: $\sigma_1 = 260$ с весом 0,4 и $\sigma_2 = 300$ уменьшил χ^2 до 150,3.

Уравнивание параметров (то есть переход к гипотезе I) дало значение: $\sigma_1 = \sigma_2 = 261$, для которого $\chi^2 = 133$ (рис. 1). При этом величина $\langle p_{\perp}^2 \rangle^{1/2} = \sigma = \sqrt{2} \sigma_1 = 368$ Мэв/с. Далее для гипотезы I расчеты производились при разбиении значений на 9 интервалов (рис. 2). Это дало наиболее вероятное значение $\langle p_{\perp}^2 \rangle^{1/2} = \sigma = 415,4$, для которого $\chi^2 = 31,5$.

Теоретическое значение при 1% точности равно 20,1. Однако отметим, что вклад в χ^2 равный 25, даля крайние точки гистограмм (1-й и 9-й интервалы на рис. 2), в которых имелось всего 10 точек^{x/}. Для контроля зависимости σ от величины экспериментальных ошибок в формуле (13) был произведен расчет с удвоенными ошибками. Это дало $\sigma = 426,7$ и $\chi^2 = 29,6$, причем вклад крайних точек составлял 23. Полученная величина $\sigma = 426,7$ Мэв/с совпадает со значением $\langle p_{\perp}^2 \rangle^{1/2}$, вычисленным для экспериментального набора величины $p_{\perp i}$ с учетом кратности, которое по работе^{/8/} равно 410 ± 50 Мэв/с.

Таким образом, в рассмотренном случае показана справедливость распределения I для поперечных импульсов протонов в неупругих $\pi^- - N$ - столкновениях при импульсе 7 Гэв/с. Предложенный метод обработки экспериментальных данных - разложение неизвестной плотности распределения на суперпозицию нормальных законов - может оказаться полезным в других случаях.

Авторы благодарят И.Н. Сялина за полезные консультации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления $F(r)$ - функции распределения длины вектора, построенного на составляющих ξ_1 и ξ_2 , надо проинтегрировать совместную плотность распределения независимых величин ξ_1 и ξ_2

$$f(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) \quad (18)$$

по кругу $x^2 + y^2 \leq r^2$.

^{x/} Как известно, χ^2 -асимптотическое распределение, и поэтому теоретическое значение χ^2 справедливо в случае, когда в каждом интервале содержится не менее 20 точек.

Таким образом,

$$F(r) = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy ,$$

или, переходя к полярным координатам

$$x = \rho \cos \phi ,$$

$$y = \rho \sin \phi ,$$

получаем с учетом (18) и (1) $i = 1,2$:

$$F(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \left(\frac{c}{\sigma_1} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{(1-c)^2}{\sigma_2} \frac{\rho^2}{2\sigma_2^2} + \frac{2c(1-c)}{\sigma_1\sigma_2} \rho e^{-\left[\frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{2\sigma_1^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \phi}{2\sigma_2^2}\right]} \right) d\rho .$$

Выполняя интегрирование по ϕ в первых двух членах и дифференцируя $F(r)$ по r , получим плотность распределения интересующей нас длины вектора:

$$P_{II}(r) = \frac{c^2}{\sigma_1^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{(1-c)^2}{\sigma_2^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma_2^2}} + \frac{2(1-c)c}{2\pi\sigma_1\sigma_2} r \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}\left[\frac{\cos^2 \phi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{\sigma_2^2}\right]} d\phi . \quad (19)$$

Выразим интеграл в (19) через известные функции. Для этого преобразуем показатель подинтегральной функции

$$-\frac{r^2}{2} \left[\frac{\cos^2 \phi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{\sigma_2^2} \right] = -\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) - \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \cos 2\phi .$$

Замена

$$t = \cos 2\phi , \quad d\phi = -\frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}}$$

приводит интеграл в (19) к виду

$$e^{-\frac{r^2}{4}\left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right]} \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)t} \frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}} = 2\pi e^{-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} I_0 \left[\frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \right] , \quad (20)$$

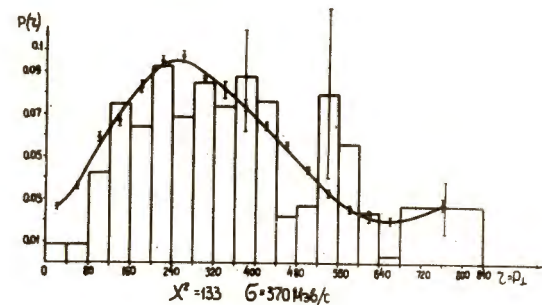
где $I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [9]. Подставляя (20) в (19), получим

$$P_{II}(r) = \frac{c^2}{\sigma_1^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{(1-c)^2}{\sigma_2^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma_2^2}} + \frac{2c(1-c)}{\sigma_1\sigma_2} r e^{-\frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} I_0 \left[\frac{r^2}{4} \left| \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right| \right] .$$

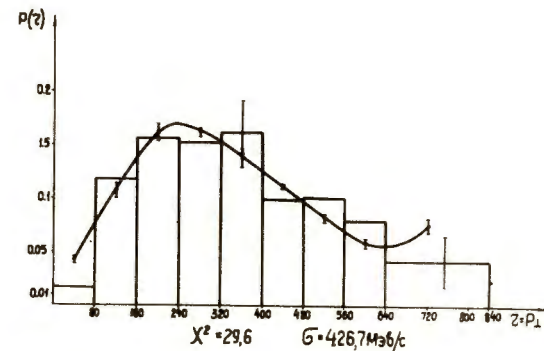
Л и т е р а т у р а

1. Y.K. Lim et al. . *Suplemento Nuovo Cimento*, 15, 382 (1960).
2. C. Waddington. *Supl. Nuovo Cim.*, 19, 37 (1961).
3. М.И. Подгорецкий, Э.Н. Цыганов. Препринт ОИЯИ, Р-839, Дубна, 1961.
4. К.Д. Толстов. Препринт ОИЯИ, Р-864, Дубна, 1962.
5. С.Н. Соколов, К.Д. Толстов. Журн. "Теория вероятностей и ее применения", 8, 234 (1963); Препринт ОИЯИ, Р-1085, Дубна, 1962.
6. Б.Л. Ван дер Варден. *Математическая статистика*, ИЛ, М, 1960.
7. С.Н. Соколов, И.Н. Сидин. Нахождение минимизмов функционалов методом линеаризации. Препринт ОИЯИ, Д-810, Дубна, 1961.
8. К.Д. Толстов. Препринт ОИЯИ, Р-1469, Дубна, 1963.
9. Э. Грей, Г. Метьюз. *Функции Бесселя*, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 ноября 1966 г.



Р и с. 1



Р и с. 2