ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-10-2935

В.И. Мороз, А.В. Никитин, Ю.А. Троян,
Б.А. Шахбазян

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ КАНАЛА ЯДЕРНОЙ РЕАКЦИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

P-10-2935

В.И. Мороз, А.В. Никитин, Ю.А. Троян,
Б.А. Шахбазян

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ КАНАЛА ЯДЕРНОЙ РЕАКЦИИ

Направлено в ЯФ

Пусть в результате измерения зарегистрированного в камере события мы получим величины P_i $(i=1,\dots,N)$, которые будем считать для простоты независимыми. Измерительные ошибки будем полагать распределенными по нормальному закону с дисперсиями D_i.

Считаем, что о событии могут быть высказаны гипотезы $\alpha, \beta, \dots, \gamma$. Определение вероятностей ω_α, ω_β, ω_γ из этих гипотез обсуждается в настоящей работе.

Каждую из гипотез характеризуют:

1. Система уравнений связи

$$f_{\alpha k}(P_1,\dots,P_N)=0 \qquad k=1,\dots,K_\alpha;\ K_\alpha<N, \tag{1}$$

которой должны удовлетворять истинные значения параметров P_i, если эта гипотеза (α) справедлива. Область пространства $\vec{P}$, на которой уравнения (1) справедливы, обозначим A. (Для гипотез $\beta,\dots,\gamma$ области будут соответственно обозначены через $B,\dots,\Gamma$).

2. Система неравенств

$$F_{\alpha\kappa}(P_1,\dots,P_N)>0 \qquad \kappa=1,\dots,\kappa_\alpha, \tag{2}$$

которые характеризуют физически допустимые границы геометрического места точек, удовлетворяющих системе (1). Область пространства $\vec{P}$, в которой одновременно справедливы уравнения (1) и условия (2), обозначим через A_1. Примером неравенств (2) может быть условие, что суммарный импульс продуктов реакции не может превышать импульс инициирущей частицы, полученной на ускорителе. Неравенства дают ограничение области действия нормальных распределений физически разумными границами.

3. Априорная вероятность V_α

$$dV_\alpha=V_\alpha(P_1,\dots,P_N)\,dP_1\dots dP_N$$

определенная на A_i. V_α характеризует относительную вероятность обнаружить событие типа α около точки P.

4. Априорная вероятность Ω_α, характеризующая частоту появлений событий типа α, по сравнению с частотой появления событий типа $\beta, \ldots, \gamma$.

Введем функцию $W_\alpha(P)$

$$W_\alpha(P) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P \subset A, \\ 0, & \text{во всех остальных точках}. \end{cases} \tag{3}$$

Вероятность того, что событие, происшедшее около точки $P \subset A$, в интервале $(dP_1 \ldots dP_N)$ будет обнаружено в единичном интервале около точки $P_Э$, запишется как

$$L\, dP_1 \ldots dP_N = \prod_{i=1}^{N} \left\{ \frac{P_i}{(2\pi D_i)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(P_{iЭ} - P_i)^2}{2D_i} \right] \right\}. \tag{4}$$

Если исследуемое событие заведомо относится к одному из типов $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, то

$$\omega_\alpha = \frac{\Omega_\alpha \overline{W}_\alpha}{\Omega_\alpha \overline{W}_\alpha + \Omega_\beta \overline{W}_\beta + \ldots + \Omega_\gamma \overline{W}_\gamma}, \tag{5}$$

где

$$\overline{W}_\alpha = \left(\int \ldots \int W_\alpha V_\alpha L\, dP_1 \ldots dP_N \right) \left(\int \ldots \int W_\alpha dP_1 \ldots dP_N \right)^{-1} \tag{6}$$

при нормировке

$$\int \ldots \int V_\alpha W_\alpha\, dP_1 \ldots dP_N = \int \ldots \int W_\alpha\, dP_1 \ldots dP_N. \tag{7}$$

Исследуем выражение (6). Обозначим через P'_α $(P'_\alpha \subset A)$ точку с координатами $P'_1, \ldots, P'_N$, в которой L обращается в максимум на множестве A. Нахождению этой точки и вычислению величины

$$\chi^2_{\alpha\min} = \sum \frac{(P_i - P'_{i\alpha})^2}{D_i} \tag{8}$$

посвящен ряд работ, например, /1,2/.

В дальнейшем будем считать функции (1) достаточно линейными, чтобы в окрестности точки P'_α порядка $\sqrt{D}$ можно было считать выполненным условие

$$\Sigma(P_{1Э}-P_1)^2 D_1^{-1}=\Sigma(P_{1Э}-P'_{1a})^2 D_1^{-1}+\Sigma(P'_{1a}-P_1)^2 D_1^{-1} \tag{9}$$

$$P\subset A_1,\ P'_a\subset A_1 .$$

Если $P'_a \subset (A-A_1)$, то окрестность, где выполнено (9), считаем по порядку величины $(\sqrt{D}+R)$, где R – расстояние от P'_a до границы A_1.

В этих условиях (6) может быть записано в виде:

$$\overline{W}_a=(\int\ldots\int W_a\, dP_1\ldots dP_N)^{-1}(\int\ldots\int W_a V_a L_a\, dP_1\ldots dP_N)\exp(-\frac{1}{2}\chi^2_{a\min}), \tag{10}$$

где

$$L_a=\prod_i\{(2\pi D_i)^{-1/2}\exp[-(P'_{ia}-P_i)^2(2D_i)^{-1}]\}. \tag{11}$$

Если принять, что $V=\mathrm{const}$, то

$$\frac{\omega_a}{\omega_\beta}=(\frac{\Omega_a}{\Omega_\beta})(\frac{\int\ldots\int W_a L_a\, dP_1\ldots dP_N}{\int\ldots\int W_\beta L_\beta\, dP_1\ldots dP_N})(\frac{\int\ldots\int W_\beta\, dP_1\ldots dP_N}{\int\ldots\int W_a\, dP_1\ldots dP_N})\exp(-\frac{\chi^2_{a\min}-\chi^2_{\beta\min}}{2}) \tag{12}$$

Если каналы a и β характеризуются одинаковым числом линейных уравнений (1), отличающихся только свободными членами, точки $P'_a\subset A_1$ и $P'_\beta\subset B_1$ находятся достаточно далеко (по сравнению с $\sqrt{D}$) от границ областей A_1 и B_1 соответственно, то второй множитель в (12) обращается в единицу[x)].

В области, достаточно далекой от порога рождения каналов a и β, можно считать, что и третий множитель в (12) равен единице.

В указанных предположениях (12) запишется в виде:

$$\frac{\omega_a}{\omega_\beta}=(\frac{\Omega_a}{\Omega_\beta})\exp(-\frac{\chi^2_{a\min}-\chi^2_{\beta\min}}{2}),$$

т.е. ω_a/ω_β определяется произведением отношения априорных вероятностей (величина постоянная для всего статистического ансамбля) и экспоненты, в показателе которой стоит полуразность $\chi^2_{\min}$ для рассматриваемых гипотез (величина, характеризующая данное событие из ансамбля).

Рассмотрим случай разного числа уравнений связи, полагая для определенности, что канал a характеризуют 4 уравнения законов сохранения энергии и импульса, а канал β характеризуется одним уравнением закона сохранения энергии, отличающимся только константой от соответствующего уравнения канала a.

x) Если допустить, что P'_a лежит по j переменным на границе A_1, а по остальным переменным далеко внутри A_1 и P'_β лежит далеко внутри области B_1, то второй множитель в (12) будет равен $\approx(\frac{1}{2})^j$.

Предположив при этом, что P'_α и P'_β находятся внутри областей A_1 и B_1, достаточно далеко от границ, и что начальная энергия достаточно далеко превышает пороги каналов α и β, получим (по порядку величины)

$$\frac{\int\ldots\int W_\alpha L_\alpha dP_1\ldots dP_N}{\int\ldots\int W_\beta L_\beta dP_1\ldots dP_N}\cdot\frac{\int\ldots\int W_\beta dP_1\ldots dP_N}{\int\ldots\int W_\alpha dP_1\ldots dP_N}\approx\frac{(f_{2max}-f_{2min})(f_{3max}-f_{3min})(f_{4max}-f_{4min})}{(2\pi)^{3/2}\Delta f_2\cdot\Delta f_3\cdot\Delta f_4} \qquad (13)$$

где

$$\Delta f_q=\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial f_{\alpha q}}{\partial P_1}\right)^2 D_1}\,, \qquad q=2,3,4.$$

$f_{q\,max}$ и $f_{q\,min}$ – максимальное и минимальное значения функции $f_{\alpha q}$ на области B_1 $(q=2,3,4)$.

Подставляя (13) в (12), для рассматриваемого случая будем иметь:

$$\frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta}\approx\frac{\Omega_\alpha}{\Omega_\beta}\cdot\frac{(f_{2max}-f_{2min})(f_{3max}-f_{3min})(f_{4max}-f_{4min})}{(2\pi)^{3/2}\Delta f_2\cdot\Delta f_3\cdot\Delta f_4}\exp\left(-\frac{\chi^2_{\alpha\,min}-\chi^2_{\beta\,min}}{2}\right). \qquad (14)$$

Пусть рассматриваемый процесс таков, что можно считать $\Omega_\alpha\approx\Omega_\beta$. Если при этом ошибки измерения данного события будут достаточно малы, чтобы (13) было много больше 1, и если при этом разность между величинами $\chi^2_{\alpha\,min}$ и $\chi^2_{\beta\,min}$ невелика, то из (14) следует, что канал α будет много более вероятен, чем канал β.

Рассмотренный случай является типичным для многих задач разделения каналов реакций методикой трековых камер и кратко может быть сформулирован так:

Если о событии могут быть высказаны гипотезы α и β, характеризуемые разным числом уравнений связи (1) и разность $(\chi^2_{\alpha min}-\chi^2_{\beta min})^2$ невелика, то более вероятным является канал, характеризуемый большим числом уравнений связи. При этом следует быть уверенным, что в условиях эксперимента выполнено

$$\frac{\Omega_\alpha}{\Omega_\beta}\left(\frac{\int\ldots\int W_\alpha V_\alpha L_\alpha dP_1\ldots dP_N}{\int\ldots\int W_\beta V_\beta L_\beta dP_1\ldots dP_M}\right)\left(\frac{\int\ldots\int W_\beta dP_1\ldots dP_N}{\int\ldots\int W_\alpha dP_1\ldots dP_N}\right)\exp\left(-\frac{\chi^2_{\alpha min}-\chi^2_{\beta min}}{2}\right)>1.$$

Авторы выражают благодарность А.А. Тяпкину за полезную дискуссию.

Литература

1. R. Böck, CERN, 61–29.
2. З.М. Иванченко и др. Препринт ОИЯИ Р-2399, Дубна 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 сентября 1966 г.

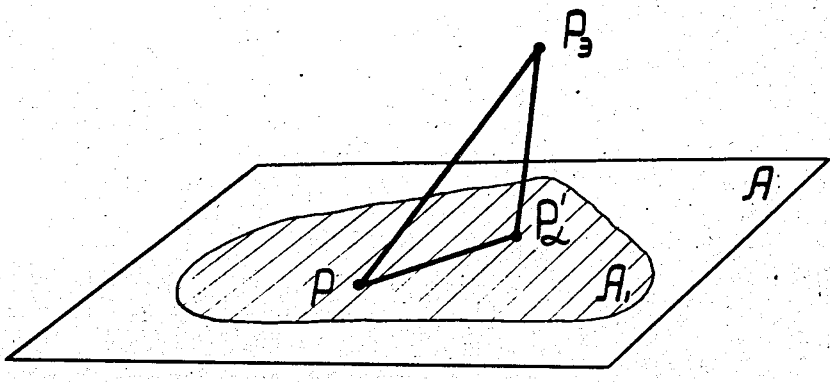

Рис. 1. На рисунке изображена в N мерном пространстве $\bar{P}$ область A, которая определяется уравнениями (1) и область A_1, на которой $W_a = 1$. $P_э$ – экспериментальная точка с координатами ($P_{1э}$, ... , $P_{Nэ}$). P'_a – точка из области A с координатами ($P'_{a1}, \ldots, P'_{aN}$), обращаюшая в минимум выражение для χ^2_a. Если A определяется линейиыми уравнениями, то для PCA выполнено (9).