

3130/2-79



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

С 344.1Г
Б-144

13/8-79

P10 - 12327

С.А.Багинян, Л.В.Бубелева, В.И.Мороз, Л.В.Попкова

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ МАСОК СОБЫТИЙ.

II. Использование процедуры TRACK-MATCH

1979

P10 - 12327

С.А.Багинян,^{*} Л.В.Бубелева, В.И.Мороз, Л.В.Попкова

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ МАСОК СОБЫТИЙ.

II. Использование процедуры **TRACK-MATCH**

^{*} Ереванский физический институт.

Багинян С.А. и др.

P10 - 12327

Алгоритм проверки масок событий. II. Использование процедуры TRACK-MATCH

Для управления на сканирующем автомате HPD процессом измерения и фильтрации снимков с трековых камер используется маска события, представляющая собой результат измерений трех точек с точностью /20-40/ мкм на проекциях каждого трека. Ошибки, возникающие при измерении масок, снижают полезный выход HPD.

В работе рассмотрен алгоритм программ BERD, с помощью которой можно уже до измерений на HPD определить качество измерений масок. В BERD используется процедура TRACK-MATCH для определения соответствующих проекций каждого пространственного трека. Маска считается измеренной правильно, если все треки события могут быть реконструированы в объеме камеры и будут удовлетворять соответствующим критериям. Оценки показывают, что приведенной выше точности измерения масок снимков с 2-метровой водородной камеры достаточно для обнаружения ошибок измерения, если они превышают полуширину "дорожки" в программе фильтрации.

Программа BERD написана на языке ФОРТРАН-63 для ЭВМ CDC-1604A и занимает вместе с массивами 9695 слов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Baginian S.A. et al.

P10 - 12327

Algorithms for Testing Event Masks. II. Using the TRACK-MATCH Procedure

The efficiency of HPD system depends on the event mask quality. The elimination of event masks with errors before measurements on HPD will provide a more effective operation of the system. The algorithms of BERD program is described. It is intended for control measurements of masks of events registered in the bubble chamber and in other track chambers. For the analysis of event mask the BERD program uses the TRACK-MATCH procedure. The mask of event is considered as measured correctly, if tracks reconstructed in the chamber space comply with correspondent tests. The BERD program is written in the FORTRAN-63 language for CDC-1604A computer and occupies 9695 words.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

ВВЕДЕНИЕ

Для управления процессом измерения и фильтрации на сканирующем автомате HPD снимков с трековых камер используется маска события. Ошибки, возникающие при измерении масок, снижают полезный выход HPD. Исключение содержащих ошибок масок до начала измерений на HPD обеспечивает эффективность системы. Ошибку можно обнаружить, проанализировав маску. Соответствующий алгоритм реализован в программе BERD, предназначенной для контроля измерений масок событий, зарегистрированных в водородной пузырьковой камере и в других трековых камерах. Маска представляет собой совокупность измеренных точек, при этом на каждой проекции трека имеется три таких точки с точностью измерений 20-40 мкм. Для измерения масок используются столы БПС-2 на линии с ЭВМ ТРА-1001^{5/}.

Анализируя маску событий, программа BERD для каждого пространственного трека определяет соответствующие ему проекции /процедура TRACK-MATCH/. Маска считается измеренной правильно, если по ней программой BERD событие может быть правильно реконструировано в пространстве /объеме камеры/.

Таким образом, программа BERD представляет собой программу геометрической реконструкции с блоком TRACK-MATCH, рассчитанную на обработку событий с числом треков до 20 и измерениями трех точек на каждой проекции трека.

При реконструкции треков пренебрегается неоднородностью магнитного поля и ионизационными потерями. Точнее говоря, эти факторы учитываются только при выборе значений критериев, используемых в процедуре.

Блок пространственной реконструкции рассчитан на фотографическую систему камеры с параллельными оптическими осями, перпендикулярными к поверхностям раздела оптических сред*. Реперные кресты на проекции должны быть заданы в "оптической"

* Оптические оси параллельны OZ, поверхности раздела параллельны XOY.

системе координат: начало координат o на проекции лежит в точке пересечения оптической оси и плоскости изображения, оси oX и oY на проекции параллельны OX и OY .

Настоящий вариант программы написан на языке ФОРТРАН-63 для ЭВМ CDC-1604A. Длина программы вместе с общими массивами составляет 9695 слов. Обработка одного события вместе с вводом информации с МЛ и выдачей результата на АЦПУ занимает $2 \div 3$ секунды.

Контроль измерений масок событий с помощью программы геометрической реконструкции был, по-видимому, впервые осуществлен в Колумбийском университете США^{9/}. Но программа контроля не требовала от геометрической реконструкции автоматического опознавания проекций трека на различных стерео-проекциях /т.е. процедуры TRACK-MATCH/, и в этом отношении она близка к программе, изложенной в работе^{4/}.

1. ИНФОРМАЦИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ РАБОТУ ПРОГРАММЫ BERD, И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Информация, определяющая работу программы BERD, пробивается на перфокартах и вводится в следующем порядке*:

- а/ номер рулона; максимальный и минимальный номера кадров, которые должны быть обработаны;
- б/ координаты опорных крестов в оптической системе координат на каждой проекции. Таких крестов три;
- в/ координаты оптических осей;
- г/ коэффициенты преломления сред на пути светового луча от объекта до объектива;
- д/ толщины сред на пути луча света от объекта до объектива;
- е/ таблица поправочных коэффициентов;
- ж/ расстояние от выходного зрачка объектива до пленки.

Исходная информация для программы BERD записана на МЛ, являющейся выходной МЛ программы PREMIST^{3/}.

Предварительный анализ исходной информации, относящейся к одному событию, включает в себя проверку следующих условий:

- 1.1. Число стереопроекций не должно превосходить 3 или быть меньше 2.
- 1.2. Номер проекции должен быть в интервале [1; 3].
- 1.3. Номера проекций должны быть разными.
- 1.4. Номер события допускается в интервале [1; 8].

* Более детальное описание информации приведено в^{10/}.

1.5. Должны быть измерены координаты опорных крестов и задана цена единицы отсчета на БПС-2.

1.6. Координаты точек маски события и номера треков /кроме пучкового/ должны быть отличны от нуля. При удовлетворении условия $2 \leq N \leq 3$, где N - число измеренных проекций, удовлетворяющих условиям 1,1 \div 1,6, вызывается подпрограмма TEST2, которая является диспетчером дальнейшей работы программы.

2. ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА МАСКИ ПО РЕКОНСТРУИРОВАННОЙ ВЕРШИНЕ СОБЫТИЯ

2.1. Реконструированная вершина событий для любой стереопары должна попасть в рабочий объем камеры, т.е. должно выполняться условие:

$$X_{\min} < X_{ij} < X_{\max},$$

$$Y_{\min} < Y_{ij} < Y_{\max},$$

$$Z_{\min} < Z_{ij} < Z_{\max},$$

где X_{ij} , Y_{ij} , Z_{ij} - пространственные координаты вершины для стереопары i, j .

Если это условие не выполнено, то маска события бракуется.

2.2. Если вершина события измерена на трех проекциях, то она может быть реконструирована на трех разных стереопарах.

В этом случае разброс реконструированных точек не должен превышать допуска T , т.е.

$$\sum_{(i,j)}^3 (X_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{(i,j)}^3 X_{ij})^2 < T_x,$$

$$\sum_{(i,j)}^3 (Y_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{(i,j)}^3 Y_{ij})^2 < T_y,$$

$$\sum_{(i,j)}^3 (Z_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{(i,j)}^3 Z_{ij})^2 < T_z.$$

При разбросе, превышающем допуск, маска события бракуется.

Формулы, описывающие реконструкцию соответствующей точки /вершины/ и квази-соответствующих точек /вторая и третья точка маски/, приведены в^{1,10/}.

Для того, чтобы реконструировать трек в пространстве, его проекции должны удовлетворять некоторым необходимым условиям, а именно:

- а/ проекции трека не идут вдоль стереобазы;
- б/ отсутствуют участки проекций трека, направленные вдоль стереобазы;
- в/ угол поворота проекции трека должен быть меньше 180° ;
- г/ обе проекции трека лежат по одну сторону стереобазы;
- д/ проекции трека имеют одинаковый знак кривизны.

Реконструкция трека в пространстве считается успешной, если реконструированные точки удовлетворяют двум условиям:

- а/ все точки попали в рабочий объем камеры;
- б/ вычисленная по всем точкам трека некоторая величина E^2 , названная гладкостью трека, не превышает определенного значения, являющегося функцией измерительных ошибок.

Раскроем содержание пункта б/ /более подробно см. 10/.

Если магнитное поле направлено вдоль оси Z и неоднородность его пренебрежимо мала, то α - угол погружения трека / α - угол между импульсом частицы и Z / можно считать интегралом движения /постоянство α будет нарушаться многократным и ядерным рассеянием, но в условиях водородной камеры эти факторы малы/.

В таком случае реконструированные точки должны лежать вблизи прямой на плоскости (η, Z) , где η - угол поворота проекции пространственного трека на плоскости (X, Y) . Мерой близости реконструированных точек к прямой $Z = \chi\eta - \chi_0$ является величина E^2 , где

$$E^2 = \min_{\{\chi, \chi_0\}} \sum_{i=1}^5 (Z_i - \chi\eta_i - \chi_0)^2.$$

Трек успешно реконструирован, а значит, измерен правильно, если

$$E^2 \leq k \cdot Dz \cdot Q, \quad /2.1/$$

где Dz есть величина, учитывающая измерительные ошибки, а $Q \geq 1$ - многократное рассеяние 11'. Dz может быть записана в упрощенном виде:

$$Dz = A_0^4 \cdot B_{ij}^{-2} \cdot \sigma^2 \cdot \phi_{ii}^{-2} (2 - 1, \chi \operatorname{ctg}^2 \theta_{i(i,j)} + \operatorname{ctg}^2 \theta_{j(i,j)}).$$

где $A_0 = z_2 \cdot \phi_{1i} + \phi_i$, σ^2 - измерительная ошибка оператора на столе БПС-2, B_{ij} - база, $\theta_{i(i,j)}$ - угол, образованный проекцией трека со стереобазой, ϕ_i, ϕ_{1i} определяются оптикой фотографической системы пузырьковой камеры 10'.

В условиях 2-метровой водородной камеры "Людмила" экспериментально подобранный коэффициент k равен 0,8, при этом критерию удовлетворяет более 0,998 истинных треков.

3. ПОИСК СООТВЕТСТВУЮЩИХ ДРУГ ДРУГУ ТРЕКОВ НА РАЗНЫХ СТЕРЕОПРОЕКЦИЯХ

Каждая проекция трека стереопроекции $V1$ исследуется на возможность пространственной реконструкции со всеми проекциями треков на стереопроекции $V2 / V1, V2, V3$ - условные номера проекций, каждый из которых может принимать любое значение/.

По аналогии с 12/ введем ряд определений.

Пара проекций треков k и l на стереопроекциях $V1$ и $V2$ называется возможной, если реконструкция пространственного трека по данной паре будет успешной.

Списки возможных пар проекций треков могут выглядеть, например, как показано на рис. 1.

Список I	Список II	Список III
$V1 - V2$	$V2 - V3$	$V3 - V1$
$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \\ 3, & 3 \\ 3, & 4 \\ 4, & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3, & 3 \\ 4, & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2, & 2 \end{pmatrix}$

Рис. 1. Списки пар проекций треков.

Списков может быть от одного до трех.

Возможная пара называется оригинальной, если проекции трека, входящие в нее, не встречаются в другой паре любого списка. Примером оригинальной пары может служить пара /2,2/ из третьего списка. Остальные называются сомнительными.

Программа находит все оригинальные пары и вычеркивает их из списков. Найти оригинальную пару - это значит найти комбинацию номеров проекций трека на разных стереопроекциях, которые однозначно соответствуют одному пространственному треку. Поэтому число найденных оригинальных пар соответствует такому же числу пространственных треков.

Оригинальная пара составляется из проекций трека на стереоснимках $(V1, V2)$. С целью обнаружения потери или искажения информации по вине оператора на третьей проекции $(V3)$, реконструированный пространственный трек, соответствующий оригинальной паре, проектируется на проекцию $(V3)$. Если попытка составить возможную пару этой "мнимой" проекции трека на $V3$ хотя бы с одной из проекций треков $V1$ или $V2$, входящих в исходную оригинальную пару, окончится успехом, то про-

грамма запасает предупреждение оператору-измерителю*.

3.1. Анализ единственного списка с сомнительными парами

Пусть после выбора оригинальных пар останется один список /множество/ с сомнительными парами /см., например, рис. 2/.

V1	V2
1,	1
1,	2
2,	7
7,	7

Рис. 2. Список, содержащий сомнительные пары.

Две пары в списке, имеющие общую компоненту, называются родственными.

Например: /1,1/ и /1,2/ из списка рис. 2.

Число различных компонент пар в списке /рис. 2/ в левом и в правом столбцах обозначим соответственно NP и NP_1 .

Если $NP \neq NP_1$, то маска события бракуется. Для $NP = NP_1$ она бракуется, если из этого списка невозможно выделить новый, содержащий NP пар, являющихся в этом новом списке оригинальными.

Процедура такого анализа исходного списка для $NP = NP_1$ сводится к анализу специальной матрицы, состоящей из нулей и единиц /см. Приложение/. В приложении показано, что полный перебор всех возможных комбинаций пар из списка может быть заменен вычислением детерминанта или миноров этой специальной матрицы.

По неравенству нулю детерминанта матрицы или миноров ненулевого элемента делается заключение о возможности составления списка, содержащего только NP оригинальных пар. Эти пары определяют в пространстве NP треков.

Здесь и в дальнейшем число уже определенных пространственных треков обозначим $MATCH$.

*Предупреждение означает, что на $V3$ не измерена проекция трека, давшего оригинальную пару на $V1$ и $V2$. Поскольку "минимая" проекция успешно реконструируется с $V1$ и $V2$, то и истинная проекция трека была бы реконструирована с $V1$ или $V2$, т.е. пара на $V1$ и $V2$ перестала бы быть оригинальной.

Число треков данного события (NEV) определяется как максимальное число треков на разных проекциях /считается, что на одной из проекций должны быть измерены все треки/.

Если $MATCH + NP = NEV$, то маска события считается измеренной правильно. В противном случае она бракуется.

3.2. Построение и тестирование троек

Пусть теперь после выбора оригинальных пар останется несколько списков с сомнительными парами, из которых составляется список троек.

В нашем примере /рис. 1/ из пары /3,3/ списка I и пары /3,3/ списка II можно составить тройку /3, 3, 3/. Аналогично из пары /4,3/ списка I и пары /3,3/ списка II можно составить тройку /4, 3, 3/.

Введем некоторые определения.

Тройка называется оригинальной, если ни одна из ее компонент не входит ни в одну из других троек. В противном случае тройка называется сомнительной.

Неопределенной тройкой мы называем сомнительную пару, не вошедшую ни в одну из составленных троек и преобразованную в тройку с отсутствующей компонентой.

Две тройки называются родственными, если они имеют хоть одну общую компоненту. Две тройки T_1 и T_n называются эквивалентными, если имеются $(n-2)$ других троек T_i таких, что T_i родственна T_{i+1} для $i=1, \dots, n-1$. Тройка называется замкнутой, если она получена из трех списков пар, причем так, что первая компонента пары из I списка равна второй компоненте пары из третьего списка. Понятие замкнутости используется при определении средней компоненты тройки. Процесс опознавания пространственных треков по тройкам состоит в анализе троек с учетом приведенной выше их классификации, и начинается с выбора оригинальных троек из всего множества троек ($MATCH$ 3) и вычеркивания их из списков /множества/. Результат этой процедуры приведет к одному из двух случаев: либо 3.2.1, либо 3.2.2.

3.2.1. Все тройки оригинальны

Обозначим число оригинальных троек через NT . Тогда, если $MATCH + NT = NEV$, то маска события считается измеренной правильно. В противном случае она бракуется.

3.2.2. Не все тройки оригинальны

К каждой тройке оставшегося списка применяем два теста, которые описаны в /10.2/. Обозначим множество троек, удовлетворяющих тестам, через ω . К этому множеству снова применяется процедура выбора оригинальных троек. Такое множество оригинальных троек обозначим ω_2 .

Множеству троек ω ставится в соответствие множество пар ω_1 , из которых построены эти тройки. Из множества пар ω_1 исключаются пары, родственные парам, образующим оригинальные тройки ω_2 .

К оставшемуся множеству пар ω_3 снова применяется процедура выбора оригинальных пар, что исключает неоправданное требование повторного измерения события /см. рис. 3/.

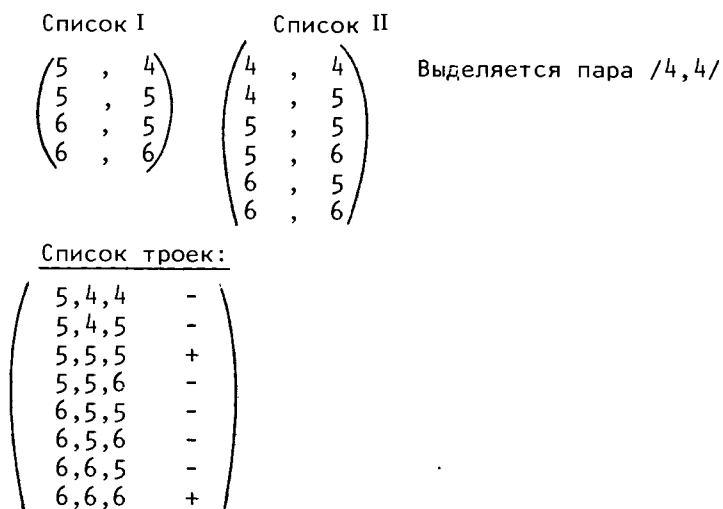


Рис. 3. Пример выбора пары /4,4/ после анализа списка пар.

Применение тестов и исключение троек, не удовлетворяющих тестам, может привести либо к тому, что множество ω будет содержать только оригинальные тройки /3.2.2.1/, либо к множеству ω , содержащему также сомнительные тройки /3.2.2.2/.

3.2.2.1. Множество ω содержит только NT оригинальных троек

В этом случае рассмотрим сумму MATCH + NT. Если MATCH:NT = NEV, то маска события считается измеренной правильно. В противном случае оператору дается указание повторить измерение маски.

3.2.2.2. Множество ω содержит родственные тройки

Введем определение: группа троек, каждая из которых эквивалентна хотя бы одной тройке этой группы, образует класс эквивалентных троек.

Разобьем множество троек ω на классы эквивалентных троек. Обозначим число полученных классов через m .

Нас интересует, какое максимальное число неродственных троек содержится в каждом классе. Применяя алгоритм, облегчающий полный перебор, найдем это число для каждого i -го класса (NT_i).

Если $MATCH = \sum_{i=1}^m NT_i = NEV$, то маска события считается измеренной правильно. В противном случае она бракуется.

4. ВОЗМОЖНОСТИ РАССМАТРИВАЕМОГО МЕТОДА АНАЛИЗА КАЧЕСТВА МАСОК

Первое применение программы BERD к результатам измерения масок для камеры "Людмила" /эксперимент рр, 22 ГэВ/с/ показало, что в большинстве случаев процедура контроля качества масок успешно завершается после применения критерия гладкости к парам. При этом либо все пары, либо выделенные тройки оказывались оригинальными. Дальнейшие тесты для троек требовались достаточно редко.

Поэтому представляет интерес оценить величину допустимой ошибки при измерении маски трека, соответствующей допуску в критерии гладкости /2.1/, и сопоставить эту величину с шириной начального полукоридора в программе фильтрации измерений HPD HAZE2 7.

Можно считать, что программа BERD работает успешно, если она в состоянии обнаружить ошибки, меньшие или равные полуширине коридора, необходимого для успешной работы HAZE2.

Оценим для условий камеры "Людмила" изменение измеренной координаты Δu поперек проекции трека, соответствующее выбранной величине k в критерии гладкости /см. формулу 2.1/.

Пусть рассматриваемый трек направлен под малым углом к пучку /ось OX/, тогда, пренебрегая дисторсией и разницей объективов, будем из выражения для Z

$$Z = \frac{B}{\phi_1(y_{\text{л}} - y_{\text{п}})} - \frac{\phi}{\phi_1}$$

иметь

$$\Delta Z^2 = 2 \frac{(\Delta y)^2 \cdot B^2}{\phi_1^2 \cdot (y_{\text{л}} - y_{\text{п}})^4}, \quad /4.1/$$

где: B - база стереофотоаппарата для проекций л и п, $y_{\text{л}}$, $y_{\text{п}}$ - координаты соответствующих точек на проекциях л и п, ΔY - ошибка в Y -координате измеренной точки маски, ΔZ - ошибка в Z -координате реконструированной точки маски, $\phi_1 \approx h^{-1}$ - обратное расстояние от выходного зрачка объектива до плоскости изображения, ϕ - масштаб на нижней поверхности верхнего стекла камеры по отношению к пленке.

Из выражения /2.1/ для E^2 имеем

$$E^2 = 3 \cdot (\Delta Z)^2,$$

если не учитывать корреляции вследствие измерительных ошибок между точками. Учет этой корреляции приводит к выражению

$$E^2 = 12,7 \cdot (\Delta Z)^2 \quad /4.2/$$

/вывод формулы приведен в приложении 2 к работе /10//.

Подставляя /4.1/ и /4.2/ в формулу /2.1/, получим

$$(\Delta y^2) \leq \frac{7}{24} \cdot \frac{\phi_1^2 (y_{\text{л}} - y_{\text{п}})^4}{B^2} \cdot Dz \cdot k. \quad /4.3/$$

Для камеры "Людмила" имеем

$$\phi \cdot (y_{\text{л}} - y_{\text{п}}) \approx B = 46 \text{ см}, \quad \phi_1 \approx (0,004 \cdot \phi) \text{ см}^{-1},$$

$$Dz \approx 3,3 \text{ см}^2, \quad \phi \approx 15,1.$$

После подстановки этих величин в /4.3/ получим

$$\Delta y \leq 1,19 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{k} \text{ см}. \quad /4.4/$$

Обсчет событий показывает, что для большинства хорошо измеренных треков неравенство /4.4/ будет выполнено при $k = 0,005$, чему соответствует

$$\Delta y_{k=0,005} \approx 8,45 \text{ мкм}$$

на пленке.

Из анализа измерений следует, что границей для правильно измеренных треков следует выбрать $k = 0,8$, чему соответствует изменение координаты y поперек трека на

$$\Delta y_{k=0,8} \approx 107 \text{ мкм}.$$

Величина полукоридора в программе HAZE2 принята равной $200 \div 400$ мкм.

Следовательно, треки, которые не в состоянии отфильтровать программа HAZE2 из-за плохой маски, уже на уровне контроля масок могут быть обнаружены.

Авторы глубоко признательны А.П.Стельмаху и В.Н.Шигаеву за постоянный интерес к работе и полезные замечания. Авторы также признательны В.И.Никитиной и Г.Н.Тентюковой за предоставление материалов по программе "1-8".

ПРИЛОЖЕНИЕ

Построение и анализ специальной матрицы

Изменим нумерацию треков, входящих в список пар, таким образом, чтобы левый и правый столбцы списка состояли из последовательности начальных элементов натурального ряда $1, 2, \dots, n$. Например, списку рис. 2 /см. 3.1/ будет соответствовать список рис. 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ 1 & , & 2 \\ 2 & , & 3 \\ 3 & , & 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Список пар.

Примем элементы левого столбца за номера строк матрицы, а номера правого столбца - за номера столбцов матрицы. Построим квадратную матрицу, все элементы которой равны нулю кроме находящихся на пересечении i -ой строки и j -ого столбца, где (i, j) есть пара из вышеуказанного списка. На этих местах будут стоять единицы.

Нетрудно заметить, что исследование возможности выделения из списка пар /рис. 4/ нового списка, содержащего только n оригинальных пар /см. 3.1/, сводится к анализу этой квадратной матрицы порядка n , $A = (a_{ij})$, содержащей в каждой строке и в каждом столбце хотя бы одну 1.

Выберем из каждой строки вышеописанной матрицы по одному ненулевому элементу a_{ij} . Получим некоторое множество Ω , мощностью $\Omega = n$.

Назовем матрицу A отделимой, если существует такое множество Ω , все элементы которого находятся в различных столбцах матрицы A . Заметим, что для отделимой матрицы A можно построить список, содержащий только n оригинальных пар.

Определим условия, при удовлетворении которых матрица A будет отделимой.

Обозначим детерминант квадратной матрицы A порядка n через $|A^n|$. Запишем разложение детерминанта $|A^n|$ по последнему столбцу

$$|A^n| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot |A^{n-1}|_i. \quad /1/$$

Если ниже будет идти речь о минорах, то подразумеваются только миноры, соответствующие ненулевому элементу.

Пусть среди миноров $n-1$ порядка из /1/ существует минор со столбцом, не все элементы которого равны нулю. Запишем разложение такого минора по этому столбцу аналогично /1/. Полученные миноры $n-2$ порядка исследуем и разложим аналогично минорам $n-1$ порядка и т.д. Получится цепочка миноров $|A^{n-1}|, |A^{n-2}|, \dots$, строго соответствующая определенному набору элементов матрицы A $\{a_{ij} = 1\}$. Чтобы получить все множество цепочек, необходимо перебрать в разложениях типа /1/ все миноры /см. рис. 5/.

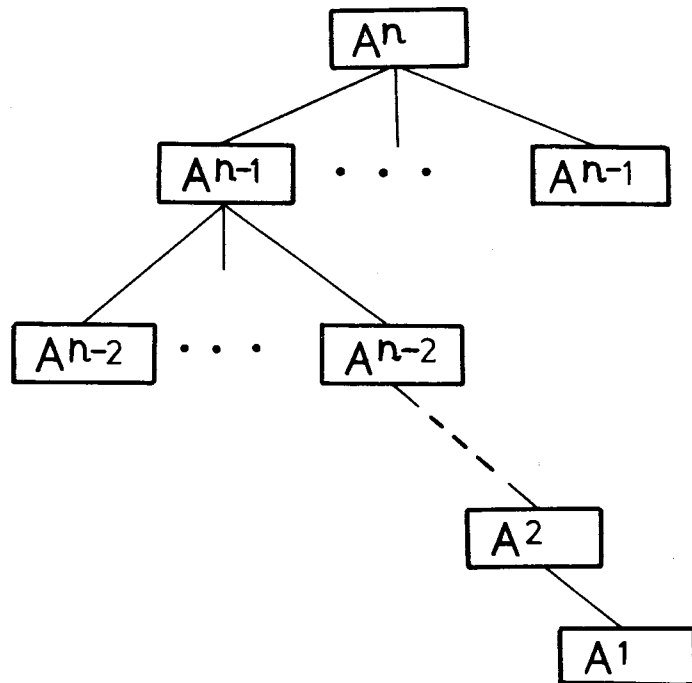


Рис. 5. Диаграмма построения всего множества цепочек.

К каждой цепочке /рис. 5/ добавим общий элемент $|A^n|$.

Если при построении очередной цепочки получится минор порядка больше 1, все элементы которого равны 0, построение данной цепочки обрывается. Назовем такую цепочку неполной. Цепочки типа $|A^n|, |A^{n-1}|, \dots, |A^1|$ называются полными. Полная цепочка называется ненулевой, если элемент $|A^1| \neq 0$, т.е. $|A^1| = 1$.

Для того чтобы существовала полная ненулевая цепочка, необходимо и достаточно существование хотя бы одной цепочки $|A^n|, |A^{n-1}|, \dots$ с минором $|A^k| \neq 0$, где $k = n, n-1, \dots, 1$.

Если $k=1$, то достаточность доказана. Пусть $k \neq 1$. Тогда разложим минор $|A^k|$ по формуле /1/. Среди миноров $k-1$ порядка найдется хоть один, отличный от нуля, и т.д. В результате получим минор $|A^1| \neq 0$, и, следовательно, построим полную ненулевую цепочку. Так как в ней существует минор, отличный от нуля /а именно $|A^1| \neq 0$ /, то этим самым необходимость доказана.

Для того чтобы матрица была отделимой, необходимо и достаточно существование хотя бы одной полной ненулевой цепочки.

Действительно, полной ненулевой цепочке $|A^n|, |A^{n-1}|, \dots, |A^1|$ соответствует множество Ω с мощностью $|\Omega| = n$ элементов матрицы A , равных 1, каждому из которых однозначно соответствует минор в данной цепочке. Все элементы множества находятся в различных строках и столбцах матрицы A , что следует из определения построения цепочки. Покажем необходимость существования полной ненулевой цепочки, для того чтобы матрица A была отделима. Пусть наша матрица отделима. Это значит, что существует множество $\Omega = \{X | X \in A, X = 1\}$ с мощностью $|\Omega| = n$, все элементы которого находятся в различных строках и столбцах матрицы A .

Допустим, что элемент множества Ω , находящийся в n -ом столбце, лежит на i -ой строке ($a_{in} \in \Omega$). Возьмем соответствующий ему минор $|A^{n-1}|_i$. Из определения отделимости следует, что будет существовать элемент $a_{jn-1} \in \Omega$ $i \neq j$. Соответствующий ему минор будет $|A^{n-2}|_i$. Этот процесс продолжим до получения минора первого порядка $|A^1|_i = a_{L1} = 1$. Таким образом, мы построим полную ненулевую цепочку.

На основании изложенного следует, что анализ возможности построения списка, содержащего только n оригинальных пар, сводится к алгоритму определения отделимости матрицы по результатам вычисления миноров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркова Н.Ф. и др. ОИЯИ, Р10-3768, Дубна, 1968.
2. Мороз В.И. и др. ОИЯИ, 10-7612, Дубна, 1973.
3. Слепнев С.К. ОИЯИ, Р10-7343, Дубна, 1973.
4. Багинян С.А. и др. ОИЯИ, Р10-10898, Дубна, 1977.
5. Ермолаев В.В. и др. ОИЯИ, Р10-6451, Дубна, 1972.
6. Ледницки Р. и др. ОИЯИ, Б2-10-7737, Дубна, 1974.
7. Шигаев В.Н. ОИЯИ, Б2-10-10086, Дубна, 1976.
8. Буздавина Н.А. и др. ОИЯИ, 11-5079, Дубна, 1970.
9. Programming for Flying Spot Devices. Proceedings. of a Conf. Held at Columbia University, New York, N.Y., 27-29 October, 1965, p.16.
10. Багинян С.А. и др. ОИЯИ, Б1-10-11797, Дубна, 1978.
11. Иванченко З.М., Мороз В.И. ОИЯИ, Р10-9689, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1979 года.