

Ц 845  
Б - 184

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



4992/2-78

P10 - 11834

И.Байла, Г.А.Ососков

ПРОБЛЕМЫ И АЛГОРИТМЫ КАЛИБРОВКИ  
УСТРОЙСТВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СНИМКОВ  
С ТРЕКОВЫХ КАМЕР

**1978**

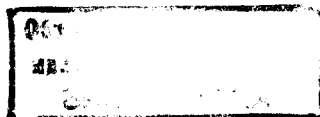
P10 - 11834

И.Байла,\* Г.А.Ососков

ПРОБЛЕМЫ И АЛГОРИТМЫ КАЛИБРОВКИ  
УСТРОЙСТВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СНИМКОВ  
С ТРЕКОВЫХ КАМЕР

---

\* Институт измерения и измерительной техники  
Словацкой академии наук (Братислава, ЧССР).



Байла И., Ососков Г.А.

P10 - 11834

Проблемы и алгоритмы калибровки устройств для измерения снимков с трековых камер

Рассматривается отношение между случайной и детерминистской сторонами задачи калибровки просмотрово-измерительных столов и сканирующих автоматов. Исследуются вычислительные и методические проблемы поиска коэффициентов калибровочного преобразования, которое определено как наилучшая линейная аппроксимация конечного множества измеренных координат полиномами от двух переменных в  $L_2$ -норме.

Дается описание универсальных калибровочных программ GENCAL и ORCAL, использующих ортогональные полиномы на конечном множестве точек и ортогональные полиномы на единичном квадрате  $\langle -1,1 \rangle \times \langle -1,1 \rangle$ . Программы представляют возможность выбора: эталонной решетки; системы аппроксимирующих полиномов; степени полиномов ( $1 \div 5$ ), весов аппроксимируемых точек.

Результаты вычислений по этим программам при разных значениях входных параметров и для разных наборов измеренных данных приводят к выводу, что в задачах калибровки степень аппроксимирующих полиномов должна быть равна или меньше 5, причем выбор конкретной степени ( $1 \div 5$ ) зависит от вида калибруемого прибора и не зависит от хода калибровочных измерений.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Bajla I., Ososkov G.A.

P10 - 11834

Calibration Problems and Algorithms of the Devices for Measurements of Track Chamber Pictures

The relation between random and deterministic features of the calibration problem for measuring devices with rectangular coordinate systems is considered. The numerical and methodological problems connected with the calculation of calibration coefficients are examined. The calibration transformation is defined as the best least squares approximation of some finite coordinate set by polynomials in two variables.

A description of the calibration programs GENCAL and ORCAL, which use the orthogonal polynomials at the finite point set and the orthogonal polynomials at the unit interval  $\langle -1,1 \rangle \times \langle -1,1 \rangle$ , is given. The results of computation by means of these programs for various values of input parameters and for various sets of the data measured are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

## 1. Введение

Основными данными, передаваемыми сканирующими автоматами и просмотрово-измерительными устройствами, обрабатывающими фильмовую информацию с трековых камер, программе геометрической реконструкции событий, являются упорядоченные пары чисел. Эти пары должны представлять точки измеряемого снимка в некоторой унифицированной системе декартовых координат. Невозможность получить такое представление непосредственным путем, что является общей чертой упомянутых измерительных устройств, приводит к задаче их калибровки.

По проблемам калибровки и вопросам соответствующего программного обеспечения было за последние годы опубликовано немало статей, см., например, /1-5/. Однако ряду вопросов, связанных с математической стороной и вычислительными особенностями построения программ калибровки, не было уделено внимание.

В настоящей работе анализируется связь случайной и детерминистской стороны задачи калибровки и рассматриваются вычислительные проблемы поиска наилучшей аппроксимации конечного множества измеренных координат полиномом двух переменных в  $L_2$ -норме. В итоге проведенного исследования пользователям предлагаются универсальные программы "GENCAL" и "ORCAL", к которым следует обращаться как к стандартным подпрограммам.

## 2. Постановка задачи

Пусть  $(x, y)$ -координаты некоторой точки А измеряемого снимка в некоторой идеальной системе декартовых координат на самом снимке, а  $(x_m, y_m)$  - пара чисел, получаемая в результате измерения точки А прибором, подлежащим калибровке.

Вследствие случайных и систематических дисторсий прибора и ошибок измерения снимка может оказаться, что не существует такого линейного преобразования  $L$ , чтобы для всех  $m$  было  $L(x_m, y_m) = (x, y)$ .

Возникает задача: разработать для конкретного измерительного прибора методику обработки данных измерения, позволяющую верное толкование полученных результатов. Основой такой методики в настоящих приборах для обработки фильмовой информации является калибровочное измерение, при котором в приборе измеряется специальная эталонная (калибровочная) пластина, состоящая из конечного набора крестов. Так как декартовы координаты этих крестов заранее определены с высокой точностью ( $\sim 1\mu$ ), соответствующую систему декартовых координат отождествляем с идеальной.

Обозначим через  $x_i, y_i$  идеальные координаты  $i$ -го ( $i=1, n$ ) креста а через  $x_{mij}, y_{mij}$  - измеренные значения координат ( $j=1, \ell$  - индекс текущего измерения).

Далее, пусть через  $\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}$  обозначено случайное отклонение, а через  $s_i^x, s_i^y$  - систематическое отклонение измеренных от идеальных значений. Тогда для описания соотношения идеальных и измеренных значений можно принять следующую модель:

$$x_{mij} = x_i + \Delta x_{ij} + s_i^x,$$

$$y_{mij} = y_i + \Delta y_{ij} + s_i^y,$$

где относительно случайных и систематических отклонений делаются следующие исходные допущения:

1) величины  $s_i^x, s_i^y$  ( $i=1, n$ ) являются значениями некоторых функций  $f_x(x, y; t), f_y(x, y; t)$  от двух переменных в точках плоскости (соответствующих центрам крестов), определенные и непрерывные на некотором двумерном интервале и, помимо того, зависящие от параметра - времени  $t$ ;

2) случайные отклонения (погрешности)  $\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}$  независимо от метода определения центров крестов являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевыми средними и среднеквадратичными значениями  $\sigma_{x_i}$  и  $\sigma_{y_i}$  соответственно, т.е. распределенными по законам  $N(0, \sigma_{x_i}), N(0, \sigma_{y_i})$ .

Для каждого из измерительных приборов важно установить период относительной стабильности, т.е. такой период, в течение которого можно считать систематические отклонения независимыми от времени.

Если такой период уже установлен, то верность принятых предположений можно эффективно проверить при помощи статистического критерия, введенного Ю.В.Линником<sup>/6/</sup> для проверки гипотезы об отсутствии систематического сдвига в наблюдениях. Излагая этот критерий, будем рассматривать только случай наблюдений  $x_{mij}$ , опуская для краткости индекс  $m$  (для  $y_{mij}$  рассуждения те же самые).

Пусть калибровочная пластина измерена последовательно  $\ell$  раз. Каждое наблюдение  $x_{ij}$  можно считать результатом измерения неизвестного значения величины  $x_i$ , так что  $x_{ij} = x_i + \Delta x_{ij}$ . Тогда по предположению 2) для каждого измеряемого креста имеем  $E(x_{ij}) = x_i$ . Для проверки гипотезы о стабильности  $x_i$  вводятся статистики<sup>/6/</sup>:

$$q_i^2 = \frac{1}{2(\ell-1)} \sum_{j=1}^{\ell-1} (x_{i,j+1} - x_{ij})^2,$$

$$s_i^2 = \frac{1}{\ell-1} \sum_{j=1}^{\ell} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2,$$

где  $\bar{x}_i = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} x_{ij}$ , и определяется частное  $r_i = \frac{q_i^2}{s_i^2}$ .

Если в течение измерений присутствует систематический сдвиг  $E(x_{ij})$ , то следует ожидать, что  $s_i^2$  будет много больше, чем  $q_i^2$ . Пользуясь таблицами квантилей  $r_{ip}$  порядка  $p$  распределения случайной величины  $r_i$  /6/ можно при заданном порядке  $p$  (обычно  $p=0,05$ ) сравнить значения  $r_{ip}$  и  $r_i$ . Если окажется, что  $r_i < r_{ip}$ , то считаем, что в наблюдениях  $x_{ij}$  в  $i$ -м кресте существует сдвиг, объясняемый нарушением гипотезы стабильности  $E(x_{ij})$  по времени.

Если подобные статистические вычисления сделать также для координаты  $y$  и для всех измеренных крестов, то получим критерий стабильности прибора.

В случае положительных результатов проверки, проведенной по такому критерию, можно считать, что систематические отклонения измерений  $f_x, f_y$  не зависят от времени  $t$ .

Самое простое предположение относительно аналитического выражения этих функций - их линейность, т.е. наличие таких чисел

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, x_0, y_0$ , для которых имеют место равенства

$$f_x(x_i, y_i) = s_i^x = x_i - (a_{11}x_i + a_{12}y_i + x_0),$$

$$f_y(x_i, y_i) = s_i^y = y_i - (a_{21}x_i + a_{22}y_i + y_0), \quad \forall i = \overline{1, n}$$

где по-прежнему  $x_i, y_i$  - значения идеальных координат эталонных крестов.

Однако в случае сканирующих автоматов, особенно с электронно-лучевым сканированием, как показывает первый же взгляд на любое изображение результатов измерений, они уже не допускают возможности такой простой интерпретации из-за появления нелинейных, обычно бочкообразных или подушкообразных искажений. Возникает необходимость найти такое преобразование  $\mathcal{X}: E_2 \rightarrow E_2$ , которое на основе обработки данных измерения калибровочной пластины каждой точке  $X_m = (x_m, y_m)$  сопоставит точку  $X^* = \mathcal{X}(X_m)$ , причем расстояние  $\rho(X^*, X)$  должно быть минимальным в смысле некоторого выбранного критерия (здесь  $X = (x, y)$ ;  $x, y$  - идеальные координаты).

Окончательные результаты калибровки - калибровочные константы - предназначены для корректировки измерений конкретных снимков, выполненных в течение промежутка времени стабильности измерения, и поэтому они должны быть максимально независимыми от случайных ошибок. С этой целью обычно рекомендуется:

а) повторять калибровочные измерения  $\ell$  раз;

б) для калибровочной программы в качестве исходных данных - координат  $x_{mi}, y_{mi}$  крестов эталонной решетки ( $i = \overline{1, n}$ ) - брать выборочные средние значения

$$x_{mi} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} x_{ij}, \quad y_{mi} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} y_{ij}, \quad (1)$$

а в качестве оценки точности измерения любого креста  $i$  использовать выборочные дисперсии

$$\hat{D}_{x_i} = \frac{1}{\ell-1} \sum_{j=1}^{\ell} (x_{ij} - x_{mi})^2, \quad \hat{D}_{y_i} = \frac{1}{\ell-1} \sum_{j=1}^{\ell} (y_{ij} - y_{mi})^2. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь для каждого креста  $i$  случайную величину  $dx_{ij} = x_{ij} - x_i$ . На основе пункта 2 принятой модели и предположения о постоянстве во времени среднего  $E(x_{ij}) = x_i + s_i^x$  получаем

$$E(dx_{ij}) = E(x_{ij}) - x_i = s_i^x, \quad (3)$$

$$D(dx_{ij}) = E[(dx_{ij} - s_i^x)^2] = E[(\Delta x_{ij})^2] = D_{x_i}, \quad (4)$$

где  $D_{x_i}$  - дисперсия случайных погрешностей  $\Delta x_{ij}$ .

Как вытекает из отношения (4), оценки (2) независимы от систематических отклонений. Следовательно, любые количественные характеристики, которыми будем характеризовать качество корректировки систематических отклонений по полю измеряемого снимка, следует считать, с методологической точки зрения, не связанными с оценками дисперсий  $\hat{D}_{x_i}, \hat{D}_{y_i}$ .

### 3. Математические аспекты задачи калибровки

Если учесть предыдущие выводы, касающиеся отношения случайных и систематических отклонений, то с точки зрения единого изложения возникающих проблем целесообразно сформулировать задачу калибровки в терминах хорошо разработанной теории аппроксимации [7]. Введем необходимые для этого обозначения и определения.

Конечные множества идеальных координат  $x_i$  и  $y_i$  обозначим через  $\mathcal{M}_x$  и  $\mathcal{M}_y$ . Через  $P(x, y; A_x)$  обозначим линейную аппроксимирующую функцию вида

$$P(x, y; A_x) = \sum_{j=1}^m a_{xj} \varphi_j(x, y), \quad (5)$$

где  $a_{xj}$  - элементы неизвестного вещественного вектора  $A_x$ ,  $\varphi_j$  - некоторые линейно независимые непрерывные функции от двух переменных.

Пусть  $w_{xi}$  - система весовых значений по координате  $x$ , причем  $w_{xi} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Выражением

$$L_p(g) = \left[ \sum_{i=1}^n |g(x_i, y_i)|^p \right]^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

определяется дискретная  $L_p$  - норма функции  $g(x, y)$ , заданной в конечном числе точек  $(x_i, y_i)$ . Точно так же вводятся обозначения в случае функции  $Q(x, y; A_y)$  и весов  $w_{yi}$ .

Тогда задачу калибровки можно свести к двум отдельным проблемам теории линейной аппроксимации функций, относящимся к двум множествам координат  $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y$ :

- требуется найти наилучшую линейную аппроксимирующую функцию  $P(x, y; A_x)$  (или  $Q(x, y; A_y)$ ) конечного множества  $M_x$  (или  $M_y$ ) координат  $x_i$  (или  $y_i$ ), которые считаем значениями какой-нибудь функции  $h_x$  (или  $h_y$ ) от двух переменных, заданной в конечном числе точек  $Z_i = (x_{mi}, y_{mi})$ , в дискретной норме  $L_2$  с весами  $w_{xi}$  (или  $w_{yi}$ ). Следовательно, надо искать минимум функции расстояния:

$$L_2(w_x, P-h_x)^2 = \sum_{i=1}^n |P(x, y; A_x) - x_i|^2 \cdot w_{xi} \quad (6)$$

$$\text{(или } L_2(w_y, Q-h_y)^2 = \sum_{i=1}^n |Q(x, y; A_y) - y_i|^2 \cdot w_{yi} \text{)}$$

Решая эти две проблемы, т.е. находя векторы параметров  $A_x^*$ ,  $A_y^*$ , можем каждой измеренной точке снимка  $X_m = (x_m, y_m)$  сопоставить точку

$$X_m^* = (x_m^*, y_m^*) = (P(x_m, y_m; A_x^*), Q(x_m, y_m; A_y^*)),$$

и тем самым определить калибровочное преобразование

$$\mathcal{X}: (x_m, y_m) \rightarrow (x_m^*, y_m^*).$$

Вопросы, подлежащие дальнейшему рассмотрению, можно сгруппировать следующим образом.

А. Основные задачи линейной аппроксимации:

- (а) выбор системы аппроксимирующих функций,
- (б) выбор нормы аппроксимации,
- (в) выбор весов аппроксимированных значений.

Б. Вычислительные вопросы решения системы нормальных уравнений:

- (а) использование полиномов, ортогональных на конечном множестве точек  $Z_i$ ,
- (б) использование полиномов, ортогональных на квадрате

$$I_2 = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle.$$

В. Методические вопросы:

- (а) обратного преобразования и выбора систем полиномов для прямого и обратного преобразования,
- (б) оптимальной степени полиномов, связанные с влиянием степени полиномов на точность аппроксимации в узлах эталонной решетки и между ними,
- (в) выбора точностных характеристик калибровочных преобразований.

Рассмотрим эти проблемы более подробно.

А.

(а) Сама природа данных измерения, а также требование относительной простоты калибровочного преобразования и его представления единственной формулой для всех измеренных данных приводят к идее выбора аппроксимирующей функции в виде полинома от двух переменных.

Во многих существующих калибровочных программах<sup>/1,5/</sup> используются линейные комбинации полиномов системы  $\mathcal{F}_1 = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, y^m\}$  вида

$$P_m(x, y; A_x) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^j a_{xq} x^{j-i} y^i, \quad (7)$$

где  $q = \left[ \frac{j(j+1)}{2} + i \right]$ ,  $m$  - максимальная степень полиномов.

В отличие от них авторы<sup>/8/</sup> используют линейные комбинации, определяемые при помощи одномерных полиномов Чебышева  $T_j$  первого рода по формуле

$$P_m(x, y; C^x) = \sum_{j=0}^m T_j(x) \sum_{i=0}^{m-j} c_{ji}^x T_i(y). \quad (8)$$

Систему полиномов вида (8) обозначим через  $\mathcal{F}_2$ . При выборе вида аппроксимации следует проанализировать как точностные характеристики обеих систем полиномов, так и чисто вычислительную сторону дела, т.е. влияние вида аппроксимации на скорость вычислений, ошибки округления и т.д. Эти вопросы рассмотрим в пункте Б и В.

(б) Выбор дискретной  $L_2$ -нормы, т.е. аппроксимации методом наименьших квадратов, делаем, исходя из методической цели задачи калибровки и учитывая требования простоты вычислений. Использование условия минимума функций расстояния (6) (вместо самой нормы) обосновано упрощением метода поиска вектора неизвестных параметров  $A_x$ .

(в) В качестве весов, характеризующих меру точности измерений декартовых координат отдельных крестов калибровочной пластины, обычно берут величины, обратные среднеквадратичным разбросам:

$$v_{xi} = \frac{1}{\sigma_{x_i}} = \frac{1}{\sqrt{D_{x_i}}}$$

( $\hat{D}_{x_i}$  - оценка дисперсии измерений  $x_{ij}$  координаты  $x_i$  из (2)).

Согласно нашим предположениям эти веса не зависят от систематического отклонения  $s_{xi}$  в  $i$ -м кресте, и поэтому не должны влиять на вид аппроксимирующей функции. Без ущерба для точности можно упростить калибровочные вычисления, положив

$$w_{xi} = w_{yi} = 1, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Б.

(а) Следует учитывать возможность получения плохо обусловленной матрицы системы нормальных уравнений. Один из возможных способов решения возникающей здесь вычислительной проблемы, наиболее распространенный на практике, заключается в применении для решения системы линейных уравнений программ с двойной точностью. Однако можно выбрать и другой, более эффективный подход.

Известно, что если заменить полиномы системы  $\mathcal{P}_i$  полиномами, ортогональными на конечном множестве точек  $Z_i$ , матрица системы нормальных уравнений становится диагональной, следовательно искомые коэффициенты линейной аппроксимации получаются совсем простым путем. Исходная вычислительная задача решения системы нормальных уравнений сводится тогда к задаче поиска коэффициентов ортогональных полиномов.

Если в первоначальной задаче множество точек  $Z_i$  фиксировано, то достаточно один раз вычислить неизвестные коэффициенты ортогональных полиномов, чтобы пользоваться найденными значениями во всех остальных случаях.

Пусть формулой

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n \varphi_i(x_k, y_k) \varphi_j(x_k, y_k) \quad (9)$$

определено для конечного числа точек  $(x_k, y_k)$  скалярное произведение любых двух функций  $\varphi_i, \varphi_j$  из класса функций, определяющих согласно (5) линейную аппроксимацию  $P$  (или  $Q$ ). Тогда матрицу системы нормальных уравнений линейной аппроксимации в дискретной норме  $L_2$  можно записать следующим образом:

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Обозначим далее через  $\Delta_m$  детерминант матрицы, которую получим из матрицы  $S$  зачеркиванием последнего столбца и последней строки.

По заданной системе линейно независимых функций  $\varphi_j$  можно построить систему функций, ортогональных на заданном конечном множестве точек  $(x_k, y_k)$ , заменяя каждую из них соответствующей линейной комбинацией:

$$\Psi_m(x, y) = \sum_{i=1}^m c_{im} \varphi_i(x, y), \quad c_{mm} \neq 0, \quad (11)$$

и определяя коэффициенты  $c_{im}$  из условий ортогональности. Как известно<sup>9/</sup>, любой элемент такой ортогональной системы можно представить в виде:

$$\Psi_m = A_m \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m-1,1} & \dots & \dots & s_{m-1,m} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где  $A_m = c_{mm} / \Delta_m$  - нормировочная постоянная.

Элементы матрицы  $S$  все равно приходится вычислять в любой задаче аппроксимации в  $L_2$ -норме, следовательно элементы всех детерминантов, которыми определяются отдельные ортогональные функции  $\Psi_m$ , будут известны.

Таким образом, алгоритм вычисления неизвестных коэффициентов  $c_{im}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-1$  может быть построен на основе (12). Опишем вкратце его идею.

Для выбранного максимального значения параметра  $m$  вычисляются значения всех нужных скалярных произведений и строится исходная матрица  $S$ . Затем, опуская ее последнюю строку в зависимости от текущего значения параметра  $m$ , опускаем соответствующие столбцы и вычисляем надлежащие ее алгебраические дополнения для всех  $m$ . Значения этих дополнений при произвольном выборе значений  $c_{mm}$  ( $c_{mm} \neq 0$ ) представляют согласно (12) искомые коэффициенты ортогональных полиномов.

Исходя из постановки задачи и требований практики, была для реализации такого алгоритма в качестве исходной неортогональной системы функций выбрана система  $\mathcal{P}$  полиномов и в качестве точек  $Z_i$  точки  $(x_i/57, y_i/36) \in I_2$ , образующие решетку, полученную сжатием идеальной прямоугольной решетки с 260 узлами, шагом 6,0 мм вдоль оси  $x$  и  $y$ , числом строк 13, числом столбцов 20 (используемому в приборе АЭЛТ-2/160).

Разработаны были фортранные подпрограммы SUBMAT, ORTOG, VALOR, которые входят в калибровочную программу ORCAL. В результате вычислений по этой программе получены соответствующие коэффициенты ортогональных полиномов, приведенных в таблице I.

Таблица I.

$\psi_1 = 1$	$\psi_7 = -0,66094x + x^3$
$\psi_2 = x$	$\psi_8 = -0,36842y + x^2y$
$\psi_3 = y$	$\psi_9 = -0,38889x + xy^2$
$\psi_4 = -0,36842 + x^2$	$\psi_{10} = -0,69444y + y^3$
$\psi_5 = xy$	$\psi_{11} = 0,10261 - 0,93945x^2 + x^4$
$\psi_6 = -0,38889 + y^2$	$\psi_{12} = -0,66094xy + x^3y$
$\psi_{13} = 0,14327 - 0,38889x^2 - 0,36842y^2 + x^2y^2$	
$\psi_{14} = -0,69444xy + xy^3$	
$\psi_{15} = 0,11111 - 0,98016y^2 + y^4$	
$\psi_{16} = 0,28116x - 1,2096x^3 + x^5$	
$\psi_{17} = 0,10261y - 0,93945x^2y + x^4y$	
$\psi_{18} = 0,25703x - 0,38889x^3 - 0,66094xy^2 + x^3y^2$	
$\psi_{19} = 0,25585y - 0,69444x^2y - 0,36842y^3 + x^2y^3$	
$\psi_{20} = 0,11111x - 0,98016xy^2 + xy^4$	
$\psi_{21} = 0,29850y - 1,25000y^3 + y^5$	

(б) В случае нефиксированного множества точек  $Z_i$  (прямое калибровочное преобразование) поиск все новых и новых коэффициентов ортогональных полиномов может оказаться, относительно времени счета, не выгодным. Поэтому целесообразно рассмотреть возможности построения полиномов, ортогональных на каком-нибудь двумерном отрезке, содержащем точки  $Z_i$ , использование которых приводит к матрице, приблизительно диагональной.

Для решения задачи построения полиномов от двух переменных, ортогональных на квадрате  $I_2 = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$

был использован язык символического программирования REDUCE-2 /10/. Основой соответствующей программы служит метод Грамма-Шмидта. Полученные полиномы включены в калибровочную программу GENCAL.

В.

(а) Программы обработки снимков с трековых камер требуют кроме прямого также и обратное преобразование координат, определяющее переход от идеальных к измеренным координатам. К сожалению, нелинейность прямого преобразования не позволяет получить коэффициенты обратного преобразования с помощью обращения его матрицы. Поэтому обратное преобразование определяется опять-таки при помощи полиномов двух переменных, т.е. функциями  $P^{-1}(x, y; A'_x)$ ,  $Q^{-1}(x, y; A'_y)$ , заданным теперь в точках  $(x_i, y_i)$  идеальной решетки и линейно-аппроксимирующих:

- в случае  $P^{-1}$ , конечное множество  $M'_x$  измеренных координат  $x_{mi}$  ;  
 - в случае  $Q^{-1}$ , конечное множество  $M'_y$  измеренных координат  $y_{mi}$ .

Следует заметить важный с вычислительной точки зрения факт, что в случае прямого преобразования множество точек  $Z_i$ , в которых заданы функции  $P$  и  $Q$ , в каждом отдельном калибровочном измерении иное, в то время как для обратного преобразования фиксировано, поскольку состоит из точек идеальной решетки. Тогда оказывается весьма выгодным определить калибровочные преобразования при помощи двух разных систем полиномов:

- исходной неортогональной системы для прямого преобразования;  
 - системы полиномов, ортогональных на множестве узлов идеальной решетки для обратного преобразования.

Очевидно, что соответствующая калибровочная программа становится более простой и вычисления более быстрыми.

(б) Выбор оптимальной степени аппроксимирующих полиномов является важной проблемой относительно точности аппроксимации и времени счета по калибровочным программам. Рассмотрим ее основные черты.

I. Так как разные измерительные приборы характерны специфичным видом искажений, выбор оптимальной степени зависит, в первую очередь, от типа калибруемого прибора.



2. При аппроксимации полиномами более высоких степеней помимо резко возрастающих требований на память ЭВМ и время счета возникает опасность, что аппроксимирующая функция может "слишком хорошо" описать измерения пройдя точно по всем случайным отклонениям.

3. Калибровочное преобразование предназначено для преобразования любой точки измеряемого снимка, в то время как построено оно на основе конечного числа узлов эталонной решетки и его качество оценивается лишь посредством значений остатков в этих узлах. Следовательно, выбор оптимальной степени полиномов зависит от того, как ведет себя калибровочное преобразование между этими узлами. Этот вопрос можно исследовать на следующей модели.

Пусть в исходной измеренной решетке пропущены некоторые узлы при сохранении симметричного расположения. Для модифицированной таким образом решетки решим калибровочную задачу, затем вычисляем значения калибровочного преобразования для всех исходных узлов и сравниваем значения точностных параметров.

4. Вопрос выбора оптимальной степени полиномов следует решить только раз - при первоначальной калибровке данного прибора, в то время как программа калибровки предназначена для постоянной эксплуатации. Поэтому включение в нее процедуры выбора оптимума оказывается излишним и не эффективным.

Следовательно, выбор оптимальной степени целесообразно предоставить пользователю, для чего в программу введен специальный параметр.

(в) Критерии эффективности найденных преобразований естественно построить по уклонениям (невязкам):

$$R_{xi} = x_i - P(x_{mi}, y_{mi}; A_x^*), \quad R'_{xi} = x_{mi} - P^{-1}(x_i, y_i; A'_x),$$

$$R_{yi} = y_i - Q(x_{mi}, y_{mi}; A_y^*), \quad R'_{yi} = y_{mi} - Q^{-1}(x_i, y_i; A'_y),$$

$$R_i = \sqrt{R_{xi}^2 + R_{yi}^2}, \quad R'_i = \sqrt{R'_{xi}^2 + R'_{yi}^2}.$$

В качестве критериев обычно берут максимальную остаточную ошибку  $R_{\max}(R'_{\max})$ , среднее значение остаточных ошибок по полю  $\bar{R}(\bar{R}')$  и их среднеквадратическое значение  $\sigma_R(\sigma'_R)$ .

#### 4. Описание калибровочных программ GENCAL и ORCAL

##### Назначение

Программы GENCAL и ORCAL предназначены для вычисления коэффициентов калибровочных преобразований для просмотрово-измерительной аппаратуры и сканирующих автоматов, работающих в декартовой системе координат.

Программы реализованы на языке ФОРТРАН для ЭВМ CDC-6500 ОИЯИ. Результатом работы этих программ кроме массивов коэффициентов для прямого и обратного преобразования являются таблицы и гistogramмы остатков, значения точностных параметров  $R_{\max}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\sigma_R$  и в случае программы ORCAL также значения коэффициентов ортогональных полиномов для соответствующего преобразования на заданном конечном множестве точек.

##### Инструкции по использованию

Вычисления калибровочных коэффициентов должны проводиться периодически с частотой, определяемой стабильностью калибруемого прибора. Предполагается, что прямоугольная калибровочная пластина измерена повторно  $j$  раз ( $j = 5+10$ ) и измеренные декартовы координаты  $(X_M, Y_M)_j$  каждого из крестов пластины усреднены по  $j$ .

Значения координат  $X_M, Y_M$  должны быть подвергнуты масштабному преобразованию для перехода от отсчетных единиц данного измерительного устройства к миллиметрам.

Массивы  $X_M, Y_M$  входных данных должны быть упорядочены в порядке, указанном на рис. I.

NR	X	2NR	x	(NS.NR)	x
	⋮		⋮		
3	X (NR+3)		X		X
2	X (NR+2)		X		X
1	X (NR+1)		X	. .	X

Рис. I.

Число строк NR и столбцов NS произвольно, с ограничением:  $NR \cdot NS \leq 300$ . На шаг SX и SY калибровочной решетки ограничений нет.

Для использования программы ORCAL пользователь должен продекларировать в главной программе общий блок /G/C(21,21). В массиве C после вычислений будут храниться коэффициенты полиномов, ортогональных на соответствующем множестве точек, нужные для построения обратного калибровочного преобразования.

#### Обращение

CALL GENCAL(XM, YM, W, NR, NS, SX, SY, NPL, NIT, JAS, NPOL, IOR, IPT1, IPT2, IPT3, TR1, TR2, XMX, YMX, CFY1, CFY2, CFY3, CFY4);

CALL ORCAL(XM, YM, W, NR, NS, SX, SY, NPL, NIT, JAS, IPT1, IPT2, IPT3, TR1, TR2, XMX, YMX, CFY1, CFY2, CFY3, CFY4, C1).

#### Значения входных параметров

- XM - массив усредненных координат  $x_m$  в мм (максимальная размерность 300);
- YM - массив усредненных координат  $y_m$  в мм (максимальная размерность 300);
- W - массив весов той же размерности, что и  $x_m$ , для координат  $x_m$  и  $y_m$  веса должны быть одинаковыми, если нет специального выбора, массив W должен быть предварительно заполнен единицами;
- NR - число строк в решетке;
- NS - число столбцов в решетке;
- SX - шаг решетки по оси x (мм);
- SY - шаг решетки по оси y (мм);
- NPL - число членов аппроксимирующей линейной комбинации. Для максимальной степени полиномов  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  получаем соответственно  $NPL = 3, 6, 10, 15, 21$ ;
- NIT =  $\begin{cases} 1 - \text{вычисляется обратное преобразование,} \\ 0 - \text{обратное преобразование не вычисляется.} \end{cases}$

JAS =  $\begin{cases} 1 - \text{измерены все кресты прямоугольной калибровочной пластины,} \\ 0 - \text{кресты, лежащие в углах решетки, не измерены, в качестве координат (XM, YM) таких точек должны быть введены координаты (0,0).} \end{cases}$

#### Значения выходных параметров:

- TR1, TR2 - сдвиг координат  $x_m, y_m$  относительно центра идеальной решетки;
- XMX, YMX - коэффициент сжатия для координат x и y соответственно;
- CFY1, CFY2 - массив коэффициентов прямого калибровочного преобразования для координат  $x_m$  и  $y_m$  соответственно (максимальная размерность 2I);
- CFY3, CFY4 - массив коэффициентов обратного калибровочного преобразования для координат x и y соответственно (максимальная размерность 2I);
- C1 - коэффициенты полиномов, ортогональных на конечном множестве измеренных координат после сжатия (для определения прямого преобразования; раз.  $2I \times 2I$ ).

#### Выбор систем полиномов

Обозначим через:

- $\mathcal{Y}_1$  - по-прежнему систему полиномов  $\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, y^m\}$ ;
- $\mathcal{Y}_3$  - систему полиномов, ортогональных на единичном квадрате  $I_2$ ;
- $\mathcal{Y}_4$  - систему полиномов, ортогональных на множестве точек  $(XI/57, Y/36)$ , где  $(XI, Y)$  - идеальные координаты узлов эталонной решетки ( $I_3 \times I_2$ ,  $SX = SY = 6,0$  мм).

Программа ORCAL вычисляет сначала коэффициенты ортогональных полиномов и сохраняет их в массивах C1 (21, 21), C(2I, 2I). Для вычисления калибровочных коэффициентов программа ORCAL использует только эти полиномы.

Программа GENCAL может использовать в качестве аппроксимирующих полиномов полиномы систем  $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4$ . Управление выбором одной из этих систем осуществляется значениями параметров NPOL, IOR, задаваемых пользователем. Возможные комбинации выбора для прямого и обратного преобразования приведены в таблице 2.

Таблица 2.

NPOL	1	2	1	2
IOR	1	2	2	1
прямое μ	ψ <sub>1</sub>	ψ <sub>3</sub>	ψ <sub>1</sub>	ψ <sub>3</sub>
обратное μ	ψ <sub>1</sub>	ψ <sub>4</sub>	ψ <sub>4</sub>	ψ <sub>3</sub>

Печать результатов

Программы GENCAL, ORCAL выдают для прямого калибровочного преобразования печать

- 1) таблицы входных данных (мм);
- 2) граничных значений координат и значений величин TR1, TR2, XMX, YMX (мм) и остальных входных параметров;
- 3) в случае, когда решаются системы нормальных уравнений при помощи библиотечной программы LINEQ1, выдаются значения параметров NERROR, DET;
- 4) калибровочных коэффициентов CFX1, CFY1; CFX, CFY;
- 5) таблицы остатков DX, DY (RESIDUALS) в микронах с округлением, расположение их в плоскости совпадает с расположением крестов калибровочной решетки;
- 6) гистограммы расстояний  $R = \sqrt{DX^2 + DY^2}$  между точками идеальной решетки и преобразованными точками;
- 7) значений точностных параметров калибровочного преобразования в мм:
  - максимальный остаток  $R_{max}$ ,
  - номер креста с максимальным остатком,
  - среднее значение  $\bar{R}$  остатков R по полю,
  - средне-квадратичное отклонение  $\sigma_{\bar{R}}$  остатков R по полю.

В случае обратного преобразования первые три пункта печати опускаются. Дополнительной печатью можно управлять при помощи следующих параметров:

$$IPT1 = \begin{cases} 1 & \text{печатаются таблицы идеальных и преобразованных координат, остатки DX, DY по ряд в мм,} \\ 0 & \text{нет печати;} \end{cases}$$

$$IPT2 = \begin{cases} 1 & \text{печатаются гистограммы остатков R по отдельным квадрантам,} \\ 0 & \text{нет печати.} \end{cases}$$

Если измеренная решетка несимметрична, то JAS=2 и печати по отдельным квадрантам нет - независимо от значения IPT2.

$$IPT3 = \begin{cases} 1 & \text{печать гистограмм положительных и отрицательных остатков DX, DY,} \\ 0 & \text{нет печати.} \end{cases}$$

Программа ORCAL сверх того выдает на печать матрицу системы нормальных уравнений и коэффициенты  $C_{ij}$  в лексикографическом порядке, соответствующем последовательной записи ортогональных полиномов:

$$\Psi_1 = \sum_{j=1}^1 C_{1j} \Psi_j, \Psi_2 = \sum_{j=1}^2 C_{2j} \Psi_j, \dots, \Psi_{NPL} = \sum_{j=1}^{NPL} C_{NPL,j} \Psi_j.$$

Основная структура и ресурсы программ GENCAL и ORCAL

Калибровочные программы реализуют следующие основные алгоритмы:

- вычисление координат идеальной решетки с центром в точке (0,0);
- сжатие данных в единичный квадрат  $I_2 = \langle -1,1 \rangle \times \langle -1,1 \rangle$ ;
- решение линейной системы нормальных уравнений: либо при помощи библиотечной программы LINEQ1, либо прямо в программе;
- в программе ORCAL: матричные вычисления для получения коэффициентов ортогональных полиномов;
- вычисления остатков точностных параметров и параметров для печати результатов.

В ходе вычислений по программам GENCAL и ORCAL используются подпрограммы:

MAX, REZM, FMIN, COEF, SUBMAT, ORTOG, VALOR, QUADR, HIST, PRHIST.

Общий объем оперативной памяти ЭВМ CDC-6500, необходимой для счета по программе GENCAL, составляет около 56500<sub>8</sub>, ORCAL - около 60000<sub>8</sub>; вместе со всеми вспомогательными и библиотечными подпрограммами: GENCAL - 72000<sub>8</sub>, ORCAL - 73500<sub>8</sub>.

Программы не используют в своей работе никаких дополнительных устройств промежуточной памяти помимо системных дисков.

Время счета по программе GENCAL зависит от значения входных параметров NPL, NPOL и IOR, числа входных данных, а также от выбора печати (параметры IPT1, IPT2, IPT3).

Для NPL=21, NPI=220 при оптимальном выборе параметров NPOL=2, IOR=2, т.е. прямом преобразовании, определенном при помощи системы  $\mathcal{F}_3$ , и обратном - при помощи системы  $\mathcal{F}_4$ , оно составляет в случае полной распечатки около 9 с, в случае минимальной распечатки - около 5 с. Время счета по программе ORCAL составляет для NPL=21, NPI = 220 в случае полной распечатки - около 27 с, в случае минимальной распечатки - около 20 с.

Полная распечатка результатов вычислений программы:

- GENCAL включает около 26 страниц;
- ORCAL включает около 36 страниц.

Необходимость оснащения этих программ столь подробной печатью вызвана потребностями пользователей в дополнительной количественной информации о стабильности работы калибруемого измерительного устройства.

#### Использование калибровочных коэффициентов

Формулы для определения калибровочных преобразований должны быть построены с учетом параметров сдвига и сжатия данных измерения, поскольку линейная комбинация полиномов от двух переменных не инвариантна относительно таких преобразований данных.

Обозначим через  $p(p')$  полиномы для прямого (обратного) калибровочного преобразования координат  $x, y$ , а через  $(XМ, YМ)$  - любую измеренную точку снимка, координаты которой находятся в пределах значений измеренных координат крестов калибровочной пластины. Пусть  $(x, y)$  - любая точка, координаты которой считаем идеальными. Обозначим далее

$$\begin{aligned} \overline{XМ} &= (XМ - TR1) / XМХ, \\ \overline{YМ} &= (YМ - TR2) / YМХ, \\ \overline{X} &= X / XМХ, \\ \overline{Y} &= Y / YМХ, \end{aligned}$$

где TR1, TR2, XМХ, YМХ - параметры, вычисляемые программой и доступные пользователю.

Наконец, обозначим через  $(XМ^*, YМ^*)$  образ точки  $(XМ, YМ)$  в прямом, а через  $(x^*, y^*)$  - образ точки  $(x, y)$  в обратном калибровочном преобразовании.

Тогда прямое калибровочное преобразование определяется формулами:

$$XМ^* = XМХ \sum_{j=1}^{NPL} (CFX1)_j \cdot p(\overline{XМ}, \overline{YМ}),$$

$$YМ^* = YМХ \sum_{j=1}^{NPL} (CFY1)_j \cdot p(\overline{XМ}, \overline{YМ}),$$

а обратное формулами:

$$x^* = XМХ \sum_{j=1}^{NPL} (CFX)_j \cdot p'(\overline{X}, \overline{Y}),$$

$$y^* = YМХ \sum_{j=1}^{NPL} (CFY)_j \cdot p'(\overline{X}, \overline{Y}).$$

#### 5. Результаты вычислений

Во второй части были сформулированы некоторые проблемы, решение которых тесно связано с конкретными вычислениями. Подведем итоги этих вычислений, проведенных по программам GENCAL и ORCAL. Значения точностных параметров берутся в мм, если нет особых оговорок.

(а) На рисунках 2 и 3 приведены гистограммы остаточных ошибок по полю и точностные параметры калибровочных преобразований данных из сканирующего автомата BRASME в CERN-e, полученных при использовании аппроксимирующих полиномов 5-й степени систем  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  соответственно, т.е. вида (7)-(б).

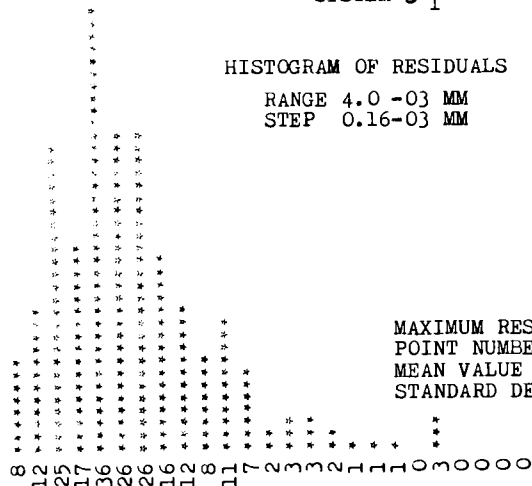
Эти значения показывают, что аппроксимация полиномами системы  $\mathcal{F}_2$  хуже, чем полиномами системы  $\mathcal{F}_1$ . Так как этот результат можно ожидать и в случае других данных с того же типа измерительных устройств, предпочтение в калибровочных задачах системы  $\mathcal{F}_1$  перед  $\mathcal{F}_2$  обосновано.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 5

SYSTEM  $\mathcal{P}_1$

HISTOGRAM OF RESIDUALS

RANGE 4.0 -03 MM  
STEP 0.16-03 MM



MAXIMUM RESIDUAL 3.3-03 MM  
POINT NUMBER 190  
MEAN VALUE 0.9-03 MM  
STANDARD DEVIATION 0.6-03 MM

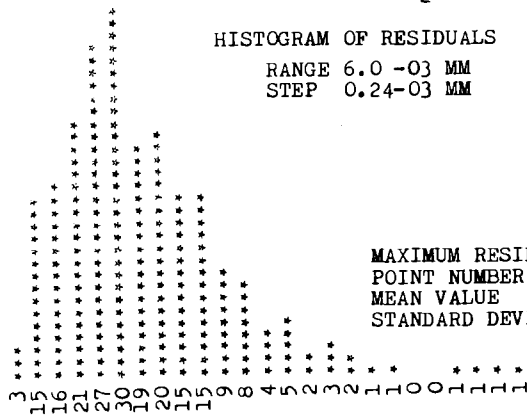
Рис. 2.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 5

SYSTEM  $\mathcal{P}_2$

HISTOGRAM OF RESIDUALS

RANGE 6.0 -03 MM  
STEP 0.24-03 MM



MAXIMUM RESIDUAL 5.9-03 MM  
POINT NUMBER 21  
MEAN VALUE 1.6-03 MM  
STANDARD DEVIATION 1.0-03 MM

Рис. 3.

(б) Зависимость выбора оптимальной степени полиномов от типа измерительного устройства очевидна из гистограмм (рисунки 4,5 и рисунки 6+11), полученных в результате вычислений по программе GENCAL для данных из просмотрово-измерительного стола САМЕТ и сканирующего автомата ERASME (измерения в ОИИ и ЦЕРне).

Значения точностных параметров, соответствующие отдельным степеням полиномов, использованных в первом случае, приведены в таблице 3.

Таблица 3.

степень пол. парам.	1	2	3	4	5
$R_{\max} (\mu)$	33,32	32,76	29,70	30,28	27,93
$\bar{R} (\mu)$	9,39	9,35	8,77	8,18	7,79
$\sigma_{\bar{R}} (\mu)$	5,49	5,39	5,27	5,02	4,71

Очевидно, что в первом случае для целей просмотра достаточно взять в качестве калибровочного преобразования полином первой степени. Объясняется это тем фактом, что в устройствах типа САМЕТ, как было уже сказано в части I, систематические отклонения вызваны в основном аффинным преобразованием декартовых координат. Как следует из таблицы 3, увеличение точности с ростом степени аппроксимирующего полинома невелико, а затраты времени для счета калибровочной программы растут значительно.

В следующей таблице (т.4) приведены значения точностных параметров для входных данных из сканирующего автомата ERASME.

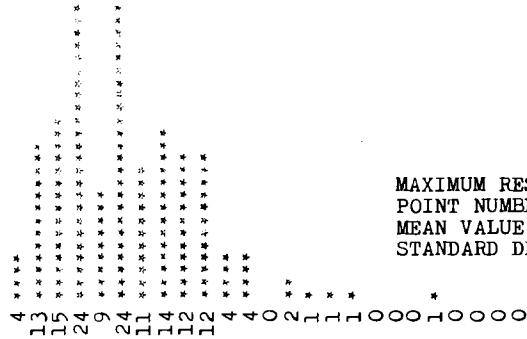
Таблица 4.

степень пол. парам.	1	2	3	4	5	6
$R_{\max} (\mu)$	997,8	940,5	22,9	10,9	3,3	2,3
$\bar{R} (\mu)$	338,1	332,5	6,7	3,6	0,99	0,8
$\sigma_{\bar{R}} (\mu)$	175	172,6	3,9	1,8	0,62	0,5

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 1

HISTOGRAM OF RESIDUALS

RANGE 40.0-03 MM  
STEP 1.6-03 MM



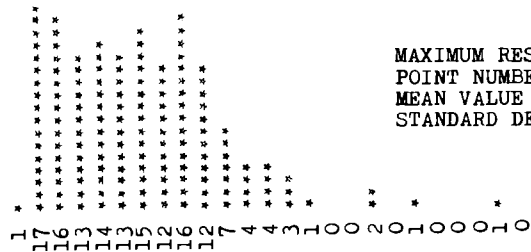
MAXIMUM RESIDUAL 33.3-03 MM  
POINT NUMBER 110  
MEAN VALUE 9.4-03 MM  
STANDARD DEVIATION 5.5-03 MM

Рис. 4.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 5

HISTOGRAM OF RESIDUALS

RANGE 30.0-03 MM  
STEP 1.2-03 MM



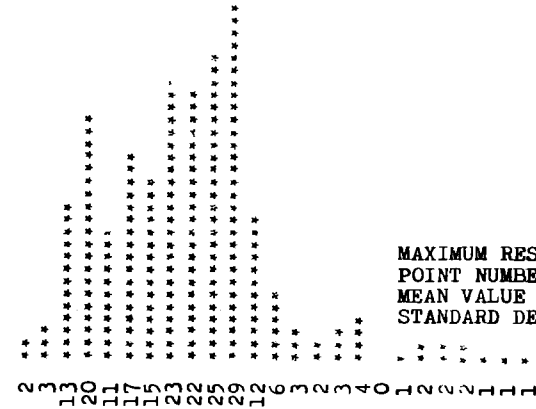
MAXIMUM RESIDUAL 27.9-03 MM  
POINT NUMBER 110  
MEAN VALUE 7.8-03 MM  
STANDARD DEVIATION 4.7-03 MM

Рис. 5.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 1

HISTOGRAM OF RESIDUALS

RANGE 1.000 MM  
STEP 0.040 MM



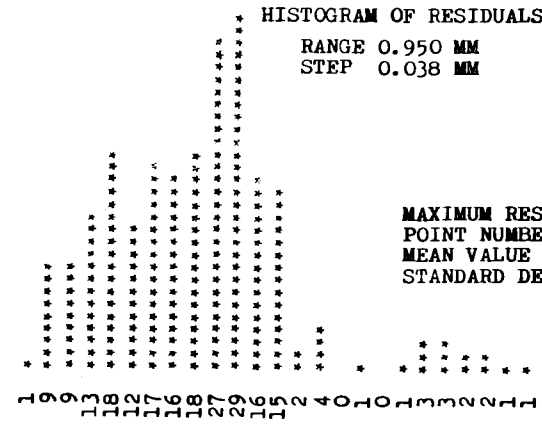
MAXIMUM RESIDUAL 0.998 MM  
POINT NUMBER 203  
MEAN VALUE 0.338 MM  
STANDARD DEVIATION 0.175 MM

Рис. 6.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 2

HISTOGRAM OF RESIDUALS

RANGE 0.950 MM  
STEP 0.038 MM



MAXIMUM RESIDUAL 0.940 MM  
POINT NUMBER 9  
MEAN VALUE 0.333 MM  
STANDARD DEVIATION 0.173 MM

Рис. 7.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 3

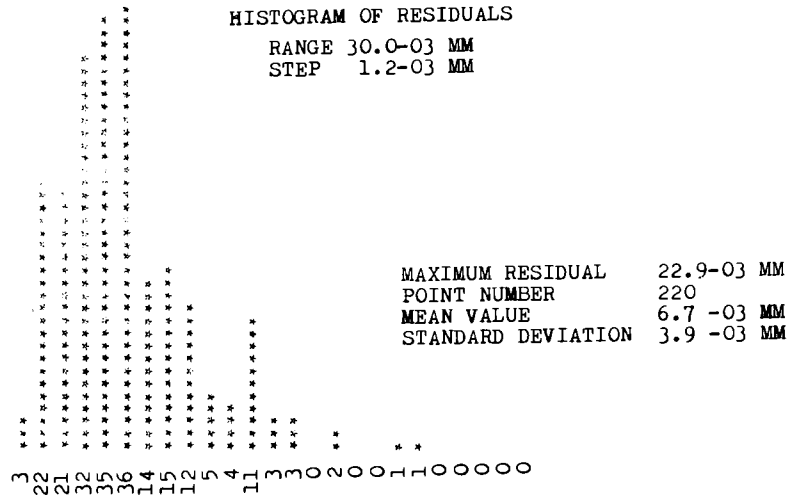


Рис. 8.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 4

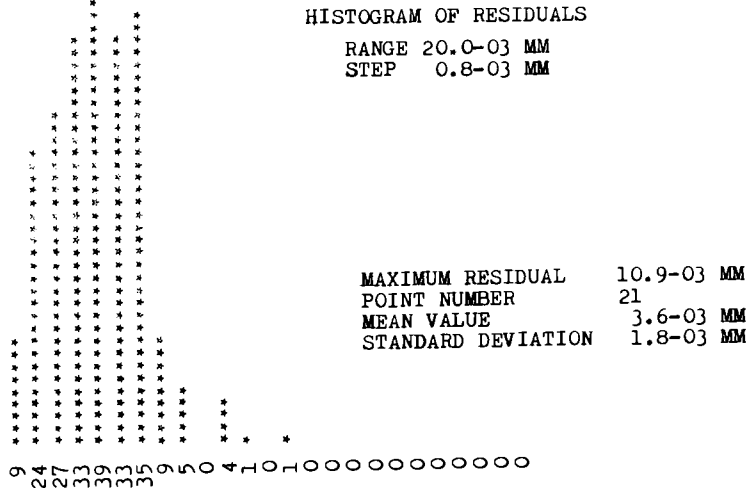


Рис. 9.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 5

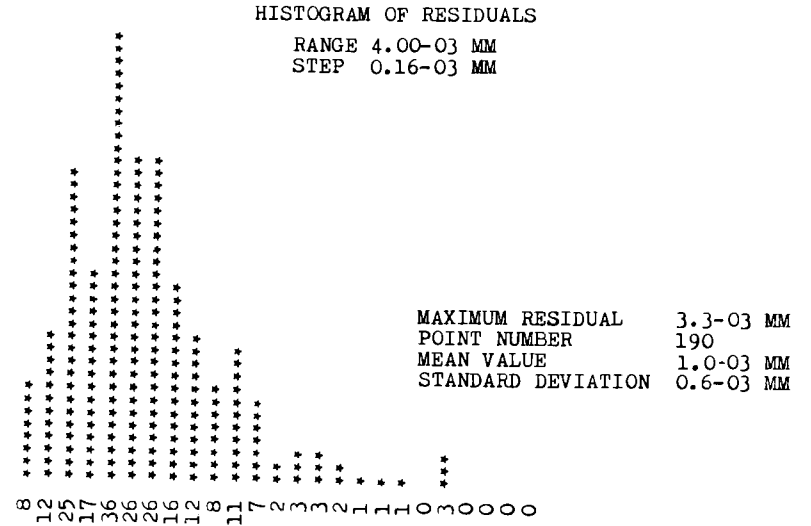


Рис. 10.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 6

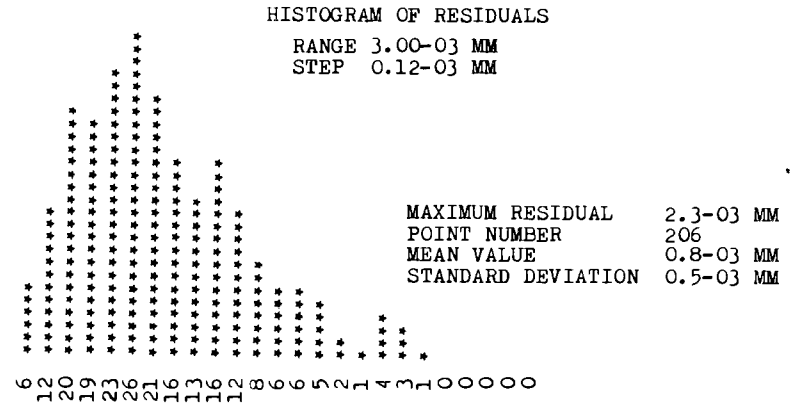


Рис. 11.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 3

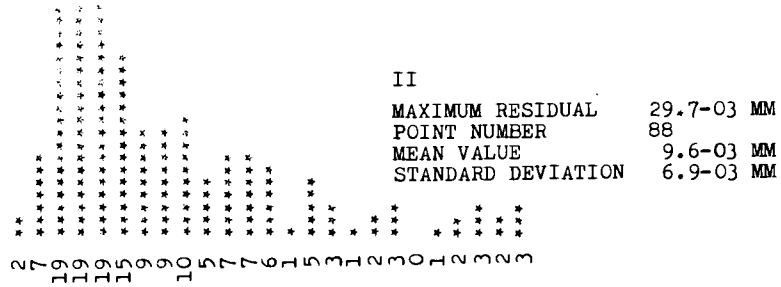
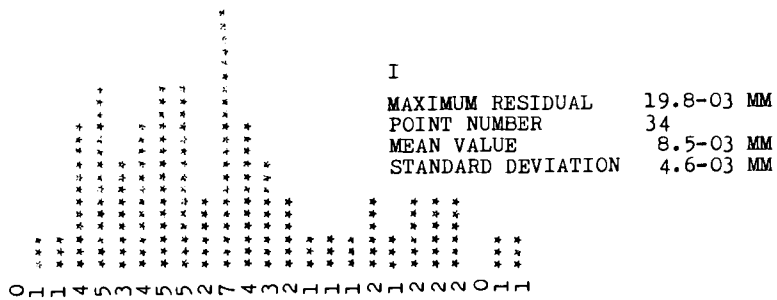


Рис. 12.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 5

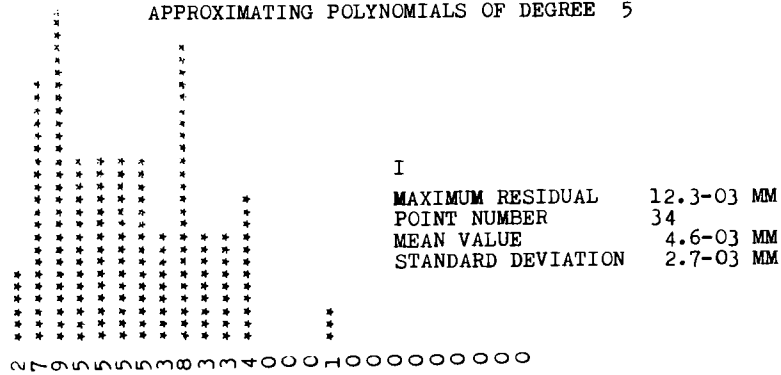


Рис. 13.

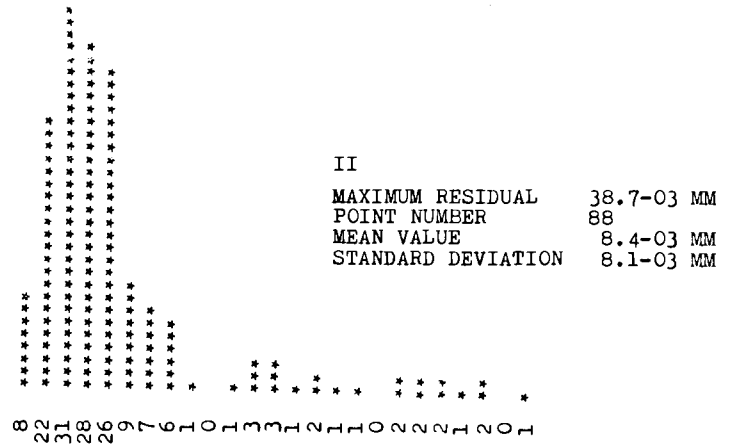


Рис. 14.

APPROXIMATING POLYNOMIALS OF DEGREE 7

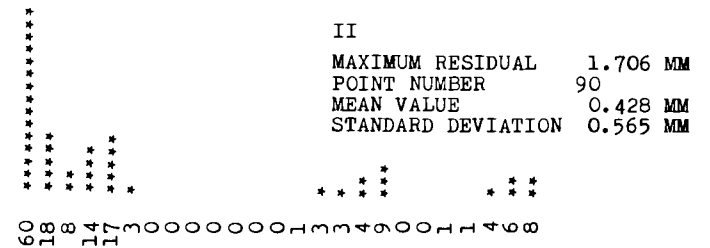
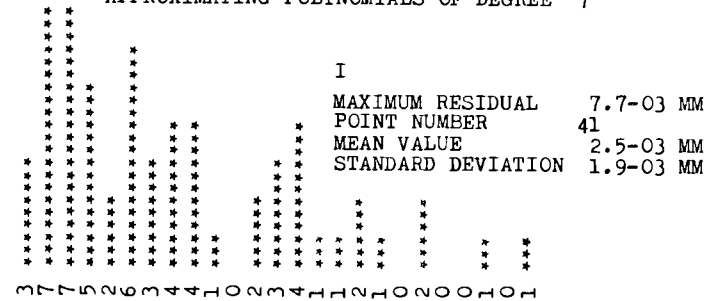


Рис. 15.



На основе приведенных гистограмм и таблицы 4 можно сделать вывод, что по сравнению с просмотрно-измерительными столами для достаточной корректировки систематических отклонений в сканирующих автоматах необходимо прибегнуть к более высоким степеням полиномов. Как показывают результаты вычислений, удовлетворительное калибровочное преобразование получаем в таких случаях уже при полиномах 5-й степени. Итак, это значение степени можно считать нижней границей степеней полиномов калибровочного преобразования сканирующих автоматов.

(в) Открытым остался вопрос о верхней границе степени полиномов. Этот вопрос был решен на основе модели, предложенной в части 3 (В.б). Результаты вычислений, проведенных по модифицированной программе GENCAL, приведены на страницах 28 и 29 (рис. I2+I5), причем символом I обозначены результаты для узлов модифицированной решетки и символом II - для остальных узлов исходной решетки (не входящих в калибровочные вычисления).

Таблица 5.

степень пол. параметр	3		4		5		6		7	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
$R_{\text{max}} (\mu)$	19,8	29,7	15,3	35,6	12,3	38,7	10,2	109,8	7,7	1706
$\bar{R} (\mu)$	8,5	9,6	6,7	8,7	4,6	8,4	4,1	30,4	2,5	428
$\sigma_{\bar{R}} (\mu)$	4,6	6,9	3,6	8,0	2,7	8,1	2,6	28,0	1,9	565

На основе таблицы 5 можно утверждать, что повышение степени полинома приводит к медленному улучшению аппроксимации в узлах эталонной решетки, в то время как между узлами качество аппроксимации резко ухудшается. Для степеней выше 5 значения точностных параметров становятся для задачи калибровки недопустимо большими.

### 6. Заключение

Проведенный в работе анализ отношения случайных и систематических ошибок измерения снимков на рассматриваемых измерительных устройствах и детерминистская формулировка основной задачи калибровки дали возможность методического разграничения встречающихся в калибровке проблем.

По значениям точностных параметров (таблица 4,  $N=5$ ),  $\bar{R} = 0,99 \mu$ ,  $\sigma_{\bar{R}} = 0,62 \mu$ , которые характеризуют меру остаточных систематических отклонений измерительного устройства по полю измеряемого снимка после процедуры калибровки, можно судить, что результаты обработки того же самого набора данных по программам GENCAL и ORCAL близки как результатам обработки по программой ERASME (CERN), так и результатам обработки по калибровочным программам /1,5/.

Однако с вычислительной точки зрения программа ORCAL более надежна, так как основной алгоритм решения системы нормальных уравнений (2Iх2I) при помощи библиотечных подпрограмм типа DOUBLE PRECISION заменен простым фортранным оператором.

Если требования относительно времени счета и оперативной памяти становятся более важными, то оказывается целесообразным использовать программу GENCAL при  $NPOL=2$ ,  $IOR=2$ . Тогда: 1) прямое преобразование определено при помощи полиномов, ортогональных на квадрате  $I_2$ , дающих приблизительно диагональную матрицу, причем для вычисления калибровочных коэффициентов достаточно обратиться к библиотечной программе LINE Q1; 2) обратное преобразование определено при помощи уже известных полиномов, ортогональных на конечном множестве точек идеальной решетки:  $I3 \times 20$  крестов с шагом 6 мм, следовательно, калибровочные коэффициенты получаем простым и быстрым путем.

Анализ вопросов оптимизации степени полиномов приводит к выводу, что в калибровочных программах можно обоснованно использовать полиномы максимальной степени 5. Выбор конкретной степени I+5 зависит от вида калибруемого прибора (искажений) и не зависит от хода калибровочных измерений, т.е. степень полиномов достаточно для данного прибора установить один раз.

Программы GENCAL и ORCAL являются программами универсального назначения. Они предоставляют возможности выбора:

- эталонной решетки,
- системы аппроксимирующих полиномов ( $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ ),
- степени этих полиномов (I+5),
- весов аппроксимируемых точек.

Печать, которой оснащены эти программы увеличивает возможности использования полученных количественных результатов в качестве широкого проверочного средства для контроля стабильности калибруемого измерительного устройства.

В заключение авторы выражают благодарность за предоставление данных измерения и полезные обсуждения В.Н.Шкунденкову, Н.В.Барашенковой и Н.П.Богачеву.

#### Литература

1. Анисеев В.Б. и др. ИИЭЭ, ОМВТ 75-91, Серпухов, 1975.
2. Калмыкова Л.П. и др. ОИИИ, IO-8808, Дубна, 1975.
3. Войтенко Ю.Г. и др. ОИИИ, P10-10610, Дубна, 1977.
4. Астахов А.Я. и др. ОИИИ, IO-10837, Дубна, 1977.
5. Карлов А.А., Сенченко В.А. ОИИИ, IO-III55, Дубна, 1977.
6. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. ГИИИЛ, Москва, 1962.
7. Rice J.R. The Approximation of Functions. Vol.1. Linear Theory. Addison-Wesley publishing Company, INC. London 1964.
8. Klein F., Ströbele H. A Fortran Program for PEPR Calibration using Chebyshev Polynomials. Proceedings of International Conference on Data Handling Systems in High-energy Physics. Cambridge 1970. CERN 70-21.
9. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. Издательство "Наука", Москва, 1974.
10. Hern A.C. REDUCE-2 user's manual. University of Utah, Salt Lake City, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 августа 1978 года.