СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P10 - 11372

А.А.Ахундов, Г.В.Мицельмахер, Н.Л.Савельева

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ РАСПАДОВ π- И μ-МЕЗОНОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

1978

P10 - 11372

А.А.Ахундов[1], Г.В.Мицельмахер, Н.Л.Савельева[2]

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ РАСПАДОВ π- И μ-МЕЗОНОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

[1] Азербайджанский государственный университет, Баку.

[2] Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

Ахундов А.А., Мицельмахер Г.В., Савельева Н.Л.

P10 - 11372

Алгоритмы моделирования радиационных распадов π- и μ-мезонов методом Монте-Карло

Описываются эффективные алгоритмы моделирования распадов $\mu \to e\nu\nu\gamma$ и $\pi \to e\nu\gamma$ методом Монте-Карло. Разработанные алгоритмы, позволяющие существенно сократить время вычисления эффективностей регистрации распадов, использовались для моделирования в экспериментах по исследованию редких распадов пионов и мюонов.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Akhundov A.A., Mizelmacher G.V., Savelieva N.L.

P10 - 11372

Algorithms for Modeling Radioactive Decays of π and μ- Mesons by the Monte-Carlo Method

Effective algorithms for modeling decays of $\mu \to e\nu\nu\gamma$ and $\pi \to e\nu\gamma$ by the Monte-Carlo method are described. The algorithms developed allowed one to considerably reduce time needed to calculate the efficiency of decay detection, they were used for modeling in experiments on the study of pions and muons rare decays.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

При экспериментальном исследовании редких распадов возникает необходимость моделировать процессы на ЭВМ. Хорошо разработанным методом моделирования является розыгрыш конечных состояний частиц равномерно по фазовому пространству. При этом интеграл по фазовому объему вычисляется по формуле

$$I = \Omega \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i ,$$

где F_i – значение подынтегральной функции в случайной точке, N – число разыгранных точек, Ω – фазовый объем.

Однако если величины F_i сильно флуктуируют около среднего значения, сходимость к пределу будет очень медленной, и для получения результата с точностью не хуже 10% требуется неоправданно большое время. Ниже изложены алгоритмы моделирования процессов $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu + \gamma$, $\pi^+ \to e^+ + \nu_e + \gamma$, позволяющие провести интегрирование в разумные сроки. Нашей целью являлось вычисление вероятностей регистрации этих процессов.

I. Распад $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu + \gamma$. При расчетах мы использовали выражение для дифференциальной вероятности распада в системе покоя мюона, проинтегрированное по импульсам нейтрино [1,2]:

$$dW = \frac{\alpha G^2}{3(2\pi)^6 m_\mu} M^2 \frac{d^3p}{E} \frac{d^3k}{\omega} , \qquad (1)$$

где E, ω – энергии позитрона и фотона, p и k – их импульсы, $\alpha = 1/137$; $G \approx 10^{-5}/m_p^2$ – константа слабого взаимодействия;

$$M^2 = \left[g^2\left(\frac{m_\mu^2}{2} - g^2\right) + \frac{m_\mu^4}{2}\right] \frac{(1-\cos^2\theta_{e\gamma})}{\omega^2(1-\beta\cos\theta_{e\gamma})^2} + 4g^2 + [m_\mu\omega - \omega E(1-\beta\cos\theta_{e\gamma})]^2 \times$$
$$\times \frac{(2g^2+m_\mu^2)}{m_\mu \omega^2 E(1-\beta\cos\theta_{e\gamma})} ; \qquad g^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu(E+\omega) + 2E\omega(1-\beta\cos\theta_{e\gamma});$$

$\theta_{e\gamma}$ – угол между импульсами позитрона и фотона; $\beta = \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2}}{E}$, m_e, m_μ – массы электрона и мюона.

Обозначим $x = \frac{\omega}{m_\mu}$, $y = \frac{E}{m_\mu}$, $z = 1 - \beta \cos\theta_{e\gamma}$.
Перейдем к сферическим координатам:

$$d^3 p \, d^3 k = E^2 \omega^2 dE \, d\omega \, d\cos\theta_e \, d\cos\theta_\gamma \, d\varphi_e \, d\varphi_\gamma ,$$

здесь $\theta_e, \theta_\gamma, \varphi_e, \varphi_\gamma$ – полярные и азимутальные углы, определяющие направление импульсов позитрона и фотона.

Сделаем замену переменных $\omega \to x$, $E \to y$, $\cos\theta_e \to z$ и проинтегрируем по θ_γ, φ_e, φ_γ. Теперь выражение для вероятности регистрации можно записать в виде:

$$R = \int \frac{dW}{W_{\mu \to e\nu\nu}} \Phi = \frac{8\alpha}{\pi \beta m_\mu^2} \int x y \, M^2(x, y, z) \, \Phi \, dx \, dy \, dz . \qquad (2)$$

Здесь $W_{\mu \to e\nu\nu}$ – вероятность распада $\mu^+ \to e^+ \nu_e \tilde{\nu}_\mu$: $W_{\mu \to e\nu\nu} = \frac{m_\mu^5 G^2}{24(2\pi)^3}$;

Φ – функция, учитывающая зависимость вероятности регистрации от геометрии установки /3/.

Нетрудно установить, что физическая область изменения переменных x, y и z задается неравенствами

$$0 \le 1 + r - 2(x+y) + 2xyz \le (1 - \sqrt{r})^2, \quad 1 - \sqrt{1 - \frac{r}{y^2}} \le z \le 1 + \sqrt{1 - \frac{r}{y^2}} ,$$

где $r = (m_e / m_\mu)^2$.

В выражении (2) выберем следующий порядок интегрирования

$$\int dx \, dy \, dz = \int dy \int dx \int dz ;$$

тогда

$$\int dx \, dy \, dz = \int_{\sqrt{r}}^{\frac{(1+r)}{2}} dy \left[\int_0^{x_1} dx \int_{z_1}^{z_{max}} dz + \int_{x_1}^{x_{max}} dx \int_{z_2}^{z_{max}} dz \right] , \qquad (3)$$

где $z_1 = 1 - \sqrt{1 - \frac{r}{y^2}}$, $z_{max} = 1 + \sqrt{1 - \frac{r}{y^2}}$, $z_2 = \frac{2(x+y) - 1 - r}{2xy}$,

$$x_1 = 1/2 \left(1 - y - \sqrt{y^2 - r}\right), \quad x_{max} = 1/2 \left(1 - y + \sqrt{y^2 - r}\right).$$

В соответствии с выбранным порядком интегрирования разыгрываем в первую очередь y равномерно на интервале $\left[y_{min}, \frac{1+r}{2} \right]$, где y_{min} задается условиями эксперимента. Так как выражение для dW имеет особенности вида $1/x$ и $1/z$, будем разыгрывать x и z с плотностями, пропорциональными этим множителям. Разыгрываем x по формуле

$$x = x_{min} \exp\left\{ \gamma_x \ln \frac{x_{max}}{x_{min}} \right\} , \qquad (4)$$

где x_{min} также определено условиями эксперимента, γ_x – случайное число; затем разыгрываем z по формуле

$$z = z_{min} \exp\left\{ \gamma_z \ln \frac{z_{max}}{z_{min}} \right\} , \qquad (5)$$

где γ_z – случайное число; $z_{min} = z_1$, если $x < x_1$; $z_{min} = z_2$, если $x \ge x_1$.

Чтобы окончательно определить состояние системы, остается разыграть три переменные. Разыграем величины $\cos\theta_\gamma$, φ_e, φ_γ равномерно на интервалах $[-1, 1]$, $[0, 2\pi]$, $[0, 2\pi]$ соответственно. Теперь, промоделировав треки частиц в экспериментальной установке /3/ и отсеяв нерегистрируемые события, вычислим вероятность регистрации:

$$R = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Omega_i \left(\frac{x_i y_i M_i^2}{W_{\mu \to e\nu\nu}} \right) c_i , \qquad (6)$$

где $c_i = 1$, если событие регистрируется, и $c_i = 0$ в противном случае, а усреднение по Ω_i дает фазовый объем.

2. Распад $\pi^+ \to e^+ \nu_e \gamma$. Этот процесс моделировался, в основном, аналогично распаду $\mu^+ \to e^+ \nu_e \tilde{\nu}_\mu \gamma$. Выражение для вероятности распада приведено в /4,5/. Вероятность распада сильно меняется при значениях переменных x и u, близких к нулю. Здесь x – энергия фотона в единицах $m_\pi / 2$, m_π – масса пиона, $u = x + y - 1 - r$, y – энергия позитрона в единицах $m_\pi/2$, $r = \left(\frac{m_e}{m_\pi}\right)^2$. В принципе, не составляет труда устранить особенности по обеим переменным x и u. Однако поскольку в конкретном эксперименте, для которого проводился расчет, события с малыми значениями x не регистрировались, оказалось достаточным устранить неравномерность матричного элемента в зависимости от u.

Вероятность регистрации распада дается формулой:

$$R = \int \frac{1}{u} \Delta R' \, \Phi \, dx \, du , \qquad (7)$$

где $\Delta R' = u \Delta R$; $\Delta R = \frac{1}{W_{\pi \to \mu\nu}} \frac{d^2 W}{dx \, du}$; $W_{\pi \to \mu\nu}$ – вероятность распада $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, функция Φ учитывает геометрию экспериментальной установки. Соответственно этому выражению, x разыгрывалась равномерно, u разыгрывалась по формуле $u = u_{min} \exp\left\{ \gamma \ln \frac{u_{max}}{u_{min}} \right\}$.

Вообще говоря, u_{max} и u_{min} зависят от x, но так как получить явное выражение для $u_{max}(x)$ довольно сложно, мы воспользовались следующим приемом: значение u разыгрывалось в интервале от наименьшего до наибольшего значения $u_{min} = \frac{2}{5} r \le u \le 1 - r = u_{max}$. Величина $\frac{2}{5} r$ получена для $x_{min} = \frac{2}{7}$, даваемого условиями эксперимента. Затем вычисляем $y = u - x + 1 + r$ и засчитываем событие с весом "ноль", если x или y оказываются за пределами кинематической области

$$y_{min} = \frac{1}{7} \leq y \leq 1 + \tau = y_{max} ,$$

$$x_{min}(y) = 1 - y/2 - \sqrt{y^2 - 4\tau}/2 \leq x \leq 1 - y/2 + \sqrt{y^2 - 4\tau}/2 = x_{max}(y) .$$

Здесь вместо $y_{min} = 2\sqrt{\tau}$ мы выбрали $y_{min} = 1/7$ из условий эксперимента.

Разработанные алгоритмы успешно использовались для моделирования распадов $\mu^+ \to e^+ \nu_e \tilde{\nu}_\mu \gamma$ и $\pi^+ \to e^+ \nu_e \gamma$ при выполнении экспериментов /6/.

Авторы благодарны Д.Ю.Бардину, С.М.Коренченко и Б.Ф.Костину за полезные обсуждения.

Литература

I. Behrends R.E., Finkelstein R.J., Sirlin A. Phys. Rev. 101, 866, 1956.
2. Lee J. Columbia University preprint. Nevis - 86, 1960.
3. Коренченко С.М., Морозов А.Г., Некрасов К.Г., Роднов Ю.В. ОИЯИ, PI3-5I70, Дубна, I970.
4. Brown S.G., Bludman S.A. Phys. Rev. 136, B1160, 1964.
5. Бардин Д.Ю., Биленький С.М. ОИЯИ, P2-6329, Дубна, I972.
6. Коренченко С.М., Костин Б.Ф., Мицельмахер Г.В. и др. ЖЭТФ, 70, 3, I976. ЖЭТФ, 7I, 69(I976).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта I978 года.