

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



СЗ44, 1т

E-601

13/III-78

P10 - 11127

1200/2-78

Г.А.Емельяненко, В.Г.Одинцов

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК
КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ
ФАКТОРИЗОВАННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ИНФОРМАЦИОННЫХ МАТРИЦ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ
ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1977

P10 - 11127

Г.А.Емельяненко, В.Г.Одинцов

ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК
КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ
ФАКТОРИЗОВАННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
ИНФОРМАЦИОННЫХ МАТРИЦ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ
ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Емельяненко Г.А., Одинцов В.Г.

P10 - 11127

Получение оценок кинематических параметров заряженных частиц с учетом факторизованного представления информационных матриц в экспериментах по физике высоких энергий

Рассмотрены некоторые вопросы эффективности оценки параметров заряженных частиц с учетом множественных случайных факторов. Получено удобное факторизованное представление информационных матриц, позволяющее построить эффективный вычислительный процесс для поиска кинематических параметров заряженных частиц в экспериментах по физике высоких энергий.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Emelianenko G.A., Odintsov V.G.

P10 - 11127

Evaluation of Charged Particle Kinematic Parameters with the Account of Factorized Representation of Information Matrices in High Energy Physics Experiments

Some problems of effective evaluation of charged particle kinematic parameters with the account of multiple random factors in experiments of high energy physics have been studied. A convenient factorized representation of information matrices has been obtained, that allows one to construct the effective calculation process for a search for charged particle kinematic parameters in high energy physics experiments.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Поиск кинематических параметров заряженных частиц осуществляется /во многих системах обработки, существующих в настоящее время в различных физических центрах/ на основании анализа координат точек вдоль треков событий в пространстве детектора. При этом координаты пространственных точек либо восстанавливаются по измерениям изображений треков на стереофотографиях /эксперименты с фильмовым съемом информации/, либо сразу фиксируются системой специализированных координатных детекторов /электронные эксперименты/. Сама же процедура фитирования оптимальной гипотезы о параметрах частицы, оставившей след в объеме детектора, связывается с минимизацией /в пространстве кинематических параметров/ функции правдоподобия.

Вид функции правдоподобия и тесно связанные с ней численные процедуры определения параметров частиц, конечно, во многом предопределяются особенностями указанных выше физических методик и собственно физикой изучаемых процессов. Однако независимо от выбора физической методики эксперимента на этапе генерирования оптимальной математической модели обработки информации /выбор из всевозможных моделей такой, которая обеспечивала бы максимальную точность при минимальных затратах времени на ЭВМ/ полезно исходить из общего математического метода /например, ^{1/} /, в рамках которого можно провести предварительное теоретико-численное сравнение различных моделей, учитывающих как методические особенности эксперимента, так и априорную совокупность факторов,

влияющих на точность восстановления параметров. В дальнейшем, по-видимому, следует провести сравнительный анализ /с учетом, например, /1/ / методов восстановления параметров частиц в различных типах экспериментов.

В настоящей же работе рассматриваются вопросы эффективности определения параметров частиц на основе одной из наиболее распространенных /для экспериментов с фильмовым съемом данных/ функций правдоподобия. Приводятся также модификация функции правдоподобия и связанные с ней эффективные численные процедуры поиска оценок кинематических параметров частиц*.

Использование основных результатов работы в существующих системах обработки не представляет трудностей, так как при этом в целом не затрагивается прежняя структура организации системы программ.

§1. О ТИПАХ ТРАЕКТОРИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И ФУНКЦИЯХ ПРАВДОПОДОБИЯ

Итак, как уже условились выше, будем предполагать, что в пространстве детектора для каждой заряженной частицы задан набор координат точек $\{M_k(x, y, z)\}_{k=0}^N$.

Будем также исходить из того, что в общем случае детектор :

А/ представляет для частицы тормозящую среду и помещен в неоднородное магнитное поле;

Б/ представляет для частицы рассеивающую среду;

В/ при регистрации прохождения частиц приносит аппаратурные погрешности**.

* Здесь мы специально остановили свой выбор на одной из распространенных функций правдоподобия, поскольку в дальнейшем это облегчит применение результатов работы для электронных экспериментов.

** Отсутствие любого из факторов, указанных в пунктах А/, Б/, В/, только упрощает геометрический анализ.

С учетом А/, Б/, В/ построение модели кинематического анализа осуществляется /например, /1/ / на основе анализа трех типов траекторий для одной и той же заряженной частицы*:

а/ $\langle \{\vec{R}/\vec{P}\}_k \}_{k=0}^N \rangle$ - модельная средняя $\langle a \rangle$ -траектория. Так была названа детерминированная компонента модели кинематической обработки треков, в основном обусловленная влиянием магнитного поля и энергетическими потерями;

б/ $[\{ \vec{R}/\vec{P} \}_k \}_{k=0}^N]$ - модельная /собственно физическая/ $[\delta]$ -траектория. Так называли среднюю $\langle a \rangle$ -траекторию, измененную многократным кулоновским и, возможно, кратным /ядерным/ рассеянием;

в/ $(\{ \vec{R}/\vec{P} \}_k \}_{k=0}^N)$ - измеренная (в) -траектория. Так называлась физическая $[\delta]$ -траектория, "испорченная" аппаратурными погрешностями.

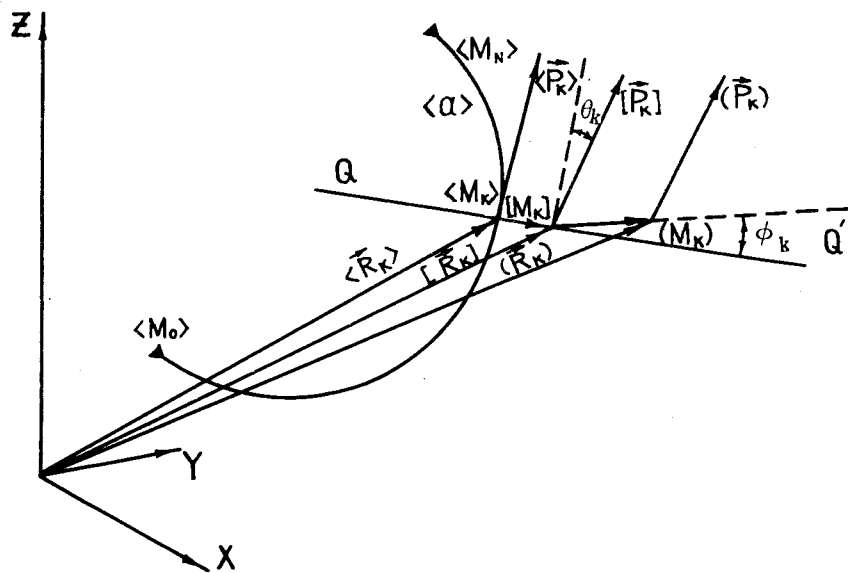
Каждый из трех указанных выше типов траекторий характеризуется своим набором переменных. Изменение переменных каждой группы обусловлено либо детерминированными законами /закон движения частицы в тормозящей среде, помещенной в неоднородное магнитное поле/, либо случайными процессами /многократное кулоновское рассеяние, кратное /ядерное/ рассеяние, аппаратурные погрешности/.

Для каждого отдельного трека /на основании, например, /1/ / можно получить наиболее правдоподобные оценки переменных, характеризующих любой из указан-

* Подобный формализм позволяет дать простую геометрическую интерпретацию идее получения функции правдоподобия. Вводятся $\langle \{\vec{R}/\vec{P}\}_k \rangle, [\{ \vec{R}/\vec{P} \}_k], (\{ \vec{R}/\vec{P} \}_k)$ - обозначения для радиус-векторов \vec{R}_k в точке M_k , а также значений векторов-импульсов \vec{P} частицы в точке M_k соответственно на средней $\langle a \rangle$, физической $[\delta]$, и измеренной (в) траекториях в пространстве детектора. При этом предполагается, что всего выбирается $N+1$ точек ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) и частицы начинают двигаться от точки $\langle \vec{R}/\vec{P} \rangle_0$, т.е. от точки с радиус-вектором $\langle \vec{R} \rangle_0$ и вектор-импульсом $\langle \vec{P} \rangle_0$.

ных выше типов траектории, а также соответствующие корреляционные моменты. Полная совокупность переменных в /1/ названа расширенным вектором параметров модели кинематической обработки треков - *обобщенной функции правдоподобия*. Идея построения обобщенной функции правдоподобия связана с конструированием плотности вероятности оптимального согласования всех трех /указанных выше/ типов траекторий. Математический метод, развитый в /1/, позволяет получить также некоторые /используемые ранее в обработке/ частные виды функций правдоподобия путем интегрирования обобщенной плотности вероятности по любой из групп переменных, указанных выше. При этом переменные интегрирования определяются условиями /требованиями/ эксперимента.

Для геометрической иллюстрации дальнейших рассуждений на рисунке схематически изображены в системе



XYZ -координат детектора: средняя $\langle a \rangle$ -траектория заряженной частицы, радиусы-векторы \vec{R} точек $M(x, y, z)$ и векторы-импульсы \vec{P} в них соответственно на траек-

ториях: средней, физической и измеренной, а также след QQ' -плоскости, ортогональной $\langle a \rangle$ -траектории в точке $\langle M_k \rangle$.

Итак, пользуясь введенными выше типами траекторий, запишем следующие векторные соотношения*:

$$\begin{aligned} \vec{R}_k - [\vec{R}_k] &= \Delta \vec{R}_k^{(изм.)}, \\ [\vec{R}_k] - \langle \vec{R}_k \rangle &= \Delta \vec{R}_k^{(кул.)}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad /1.1/$$

где $\Delta \vec{R}_k^{(изм.)}$ и $\Delta \vec{R}_k^{(кул.)}$ - приращения радиусов-векторов положения частицы, обусловленные измерительными погрешностями и многократным кулоновским /или ядерным/ рассеянием соответственно. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что каждая из групп точек $\langle M_k \rangle, [M_k] \}_{k=0}^N$ принадлежит, а точки (M_k) могут и не принадлежать QQ' -плоскостям и, следовательно, пары векторов $\Delta \vec{R}_k^{(изм.)}$ и $\Delta \vec{R}_k^{(кул.)}$ могут не принадлежать соответствующим QQ' -плоскостям. В общем случае поэтому будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |[\Delta \vec{R}_k^{(изм.)}, \Delta \vec{R}_k^{(кул.)}]| &= \Delta R_k^{(изм.)} \cdot \Delta R_k^{(кул.)} \cdot |\sin \phi_k| \geq 0, \\ |(\Delta \vec{R}_k^{(изм.)}, \Delta \vec{R}_k^{(кул.)})| &= \Delta R_k^{(изм.)} \cdot \Delta R_k^{(кул.)} \cdot |\cos \phi_k| \geq 0, \quad /1.2/ \end{aligned}$$

а также соотношения

$$|(\langle \vec{P}_k \rangle, [\vec{P}_k])| = \langle P_k \rangle [P_k] \cdot |\cos \theta_k| \geq 0, \quad /1.3/$$

* При этом естественно предположить, что $|\Delta \vec{R}_0^{(кул.)}| = 0$, так как частица начинает двигаться от точки $\langle M_0 \rangle$, в которой $[\vec{R}_0] = \langle \vec{R}_0 \rangle$, и $|\Delta \vec{R}_0^{(изм.)}| \geq 0$, поскольку $(\vec{R}_0) - [\vec{R}_0] = (\vec{R}_0) - \langle \vec{R}_0 \rangle \neq 0$ из-за аппаратных погрешностей при измерениях /восстановлении/ координат первой точки.

где θ_k - угол из-за многократного рассеяния, накопленный частицей при прохождении пути от M_0 до M_k ;

ϕ_k - угол между векторами $\Delta R_k^{(кул.)}$ и $\Delta R_k^{(изм.)}$. Далее, используя векторные соотношения /1.1/ и /1.3/ и опираясь на априорные статистические свойства случайных величин $\Delta R_k^{(кул.)}$ и $\Delta R_k^{(изм.)}$, ϕ_k и θ_k , строят обобщенную функцию правдоподобия, позволяющую, как указывалось выше, получить наиболее правдоподобные оценки переменных, характеризующих модели траекторий $\langle \vec{R}/P \rangle$, $[\vec{R}/P]$ и (R/P) .

Однако, как условилось выше, в данной работе нас будет интересовать функция правдоподобия, позволяющая получить лишь оценки параметров модели средней $\langle R/P \rangle$ -траектории, по измерениям (R) . Поэтому исключаем из дальнейшего рассмотрения соотношения /1.2/, /1.3/ при построении функции правдоподобия. Следовательно, остаются только соотношения /1.1/, которые приводятся к системе стохастических векторных уравнений:

$$\vec{R} - \langle \vec{R}(a, s) \rangle = \Delta R^{(изм.)} + \Delta R^{(кул.)}(a, s) \quad /1.4/$$

относительно искомого вектор-параметра $a = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и s -длины дуги искомой траектории $\langle \vec{R} \rangle = \langle \vec{R}(a, s) \rangle$. Далее заметим, что если бы $\Delta R^{(изм.)} \equiv \vec{0}$ и $\Delta R^{(кул.)} \equiv \vec{0}$, т.е. не было бы многократного рассеяния и отсутствовали бы аппаратные погрешности, то стохастические уравнения /1.4/ приобрели бы вид обычных векторных уравнений относительно только вектор-параметра a :

$$\vec{R} = \langle \vec{R}(a) \rangle. \quad /1.4/'$$

Регулярное решение этой переопределенной ($m \leq N+1$) системы можно было бы найти одним из известных методов, например методом наименьших квадратов. Однако, как

отмечалось выше, в общем случае $\Delta R^{(изм.)} \neq \Delta R^{(кул.)} \neq \vec{0}$. Поэтому решение /1.4/ находят статистическими методами. При этом точность оценок вектора a и дуги s ,

а также эффективность вычислительных процедур во многом определяются предположениями о законах распределения и взаимном геометрическом расположении слу-

чайных величин $\Delta R_k^{(изм.)}$ и $\Delta R_k^{(кул.)}$.

Оптимальность же выбора оценок \hat{a} -вектора кинематических параметров a , а также оценки \hat{s} -дуги $s \langle a \rangle$ -траектории /особенно/ означает практически квазисовме-

щение всех "треугольников-ошибок" со сторонами

$\Delta R^{(изм.)}$, ΔR и $\Delta R^{(кул.)}$ с соответствующими плоскостями * QQ' .

В тех же случаях /моделях обработки/, в которых дуга s не фитируется, а в качестве ее оценки выбирается ломаная линия, проходящая через точки (R) -траектории /возможно, с учетом уже найденных оценок \hat{a} / , делается *априори* не явное предположение о том, что все указанные треугольники принадлежат QQ' -плоскостям, что накладывает естественные ограничения на выбор системы координат, в которой осуществляется практическое фитирование вектора параметров a .

§2. ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ БЕЗ УЧЕТА ФАКТОРИЗОВАННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ МАТРИЦ

В соответствии со сказанным выше, будем исходить из того, что оба случайных вектора $\Delta R^{(кул.)}$, $\Delta R^{(изм.)}$ и суммарные вектор-смещения $\Delta \vec{R} = \Delta R^{(кул.)} + \Delta R^{(изм.)}$ принадлежат соответствующим QQ' -плоскостям, т.е. ΔR ортогонален $\langle a \rangle$ -траектории** в силу предположения о

*См. рисунок.

** Следует обратить еще раз внимание на то обстоятельство, что при таком предположении векторы $\langle R_k \rangle$ являются проекциями векторов (R_k) на $\langle a \rangle$ -траекторию.

коллинеарности случайных векторов $\Delta \vec{R}_k^{(изм.)}$ и $\Delta \vec{R}_k^{(кул.)}$.

Часто функцию правдоподобия выбирают в виде *

$$L = (2\pi)^{-N} \cdot |C|^{-1/2} \cdot \exp[-1/2 \Delta Y \cdot C^{-1} \cdot \Delta Y^T], \quad /2.1/$$

где $\Delta Y = Y - \langle Y \rangle$ - случайный вектор-строка измеренных координат точек на треке $Y = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$, $\langle Y \rangle$ - вектор средних значений для Y ,

$$C = \Sigma_{кул.} + \Sigma_{изм.}, \quad C^{-1} = (\Sigma_{кул.} + \Sigma_{изм.})^{-1}. \quad /2.2/$$

$\Sigma_{кул.}$ - ковариационная матрица кулоновского рассеяния, $\Sigma_{изм.}$ - матрица аппаратных погрешностей.

Основные недостатки при использовании модели /2.1/-/2.2/ уже обсуждались в работе /1/, поэтому не будем снова на них останавливаться.

Если теперь воспользоваться результатами работы /2/, то весовую матрицу C^{-1} можно представить в виде

$$C^{-1} = G^{-T} (V \cdot W) \cdot G^{-1}, \quad /2.3/$$

где (VW) и G^{-1} имеют вид:

$$VW = \begin{bmatrix} (V_1 W_1) & (V_1 W_2) & \dots & (V_1 W_m) \\ (W_2^T V_1^T) & (V_2 W_2) & \dots & (V_2 W_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (W_m^T V_1^T) & (V_m W_2) & \dots & (V_m W_m) \end{bmatrix} G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta s_1^{-1} \\ \Delta s_2^{-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta s_N^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad /2.4/$$

* Здесь и всюду далее будем предполагать /не теряя общности рассуждений/, что $N=2m$, т.е. число N элементарных дуг на трекке четно.

Здесь ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, N$) - элементарные дуги на трекке, а элементы матриц $\{V_k\}_{k=1}^m$ и $\{W_k\}_{k=1}^m$ размерности [2.2] каждая определены в работе /2/ как

$$(W_{k-1})_{ij} = - \sum_{\ell=1}^2 \left(\sum_{\eta=1}^2 (W_k)_{i\eta} (b_k)_{\eta\ell} + (W_{k+1})_{i\eta} (a_{k+1}^T)_{\eta\ell} \right) (a_k^{-1})_{\ell j}$$

для всех

$$i, j = 1, 2 \text{ и } k = m, m-1, \dots, 2, 1,$$

$$(V_{k+1})_{ij} = - \sum_{\ell=1}^2 (a_{k+1}^{-1})_{i\ell} \sum_{\eta=1}^2 (b_k)_{\ell\eta} (V_k)_{\eta j} + (a_k^T)_{\ell\eta} (V_{k-1})_{\eta j} \quad /2.5/$$

для всех $i, j = 1, 2$ и $k = 1, 2, \dots, m$,

$$W_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^m, \quad V_1 = -W_0^{-1}, \quad V_0 = W_{m+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1 = a_{m+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В /2.5/ матрицы $\{b_k\}_{k=1}^m$ и $\{a_k\}_{k=1}^m$ размерности [2.2] имели вид:

$$b_k = \begin{bmatrix} [1/3(\tilde{\gamma}_\mu^2 + \tilde{\gamma}_{\mu+1}^2) + \rho_{\mu+1}] & [1/6 \tilde{\gamma}_{\mu+1}^2 - q_{\mu+1}] \\ [1/6 \tilde{\gamma}_{\mu+1}^2 - q_{\mu+1}] & [1/3(\tilde{\gamma}_{\mu+1}^2 + \tilde{\gamma}_{\mu+2}^2) + \rho_{\mu+2}] \end{bmatrix}, \quad /2.6/$$

$$a_k = \begin{bmatrix} \eta_\mu & 0 \\ 1/6 \tilde{\gamma}_\mu^2 - q_\mu & \eta_{\mu+1} \end{bmatrix},$$

$$a_k^{-1} = \begin{bmatrix} \eta_\mu^{-1} & 0 \\ -(\eta_\mu \cdot \eta_{\mu+1})^{-1} \cdot (1/6 \tilde{\gamma}_\mu^2 - q_\mu) & \eta_{\mu+1}^{-1} \end{bmatrix},$$

для всех $k = 1, 2, \dots, m$ и $\mu = 2(k-1)$.

Здесь

$$\rho_i = \phi_{i-1} \left(1 + \frac{\Lambda s_{i-1}}{\Lambda s_i} \right) + \frac{\sigma_i^2}{\Lambda s_i^2} + \left(\frac{\sigma_{i-2}^2}{\Lambda s_{i-2}^2} \right) - \phi_{i-2} \left(1 - \frac{\Lambda s_{i-2}}{\Lambda s_{i-1}} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$q_i = \phi_{i-1} \left(\frac{\Lambda s_{i-1}}{\Lambda s_i} \right) + \phi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

$$\eta_i = \phi_{i-1} - \frac{\sigma_{i-1}^2}{\Lambda s_{i-1}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где:

$$\phi_{i-1} = \frac{\sigma_{i-1}^2}{\Lambda s_{i-1}^2} \left(1 + \frac{\Lambda s_{i-1}}{\Lambda s_i} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N;$$

$$\sigma_{-1}^2 = \sigma_0^2 = 0, \quad \Lambda s_{-1} = 1, \quad \Lambda s_0 = \Lambda s_1;$$

$$\eta_0 = \eta_1 = 1, \quad \eta_N = \eta_{N+1} = 1, \quad q_N = 1/6 \tilde{\gamma}_N^2; \quad /2.7/$$

$\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2$ - квадраты ошибок измерительных погрешностей,

$$\tilde{\gamma}_i^2 = \frac{(21.2)^2}{2} \cdot \frac{\Lambda s_i}{(i) X_{\text{рад.}}} \cdot \frac{E_{i+1} E_i}{(p_{i+1} p_i)^2}, \quad \tilde{\gamma}_0^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$/2.8/$$

(i) X рад. - радиационная длина i-элементарного рассеивателя, E_i, E_{i+1} и p_i, p_{i+1} - энергия и импульс частицы в начале и конце i-го элементарного участка траектории частицы, соответственно.

§3. ФУНКЦИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ С УЧЕТОМ ФАКТОРИЗОВАННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ МАТРИЦ

С учетом всего сказанного выше функция правдоподобия /2.1/ может быть записана теперь в виде:

$$L = (2\pi)^{-N} \left(\prod_{k=1}^N \Lambda s_k^2 \det B \right)^{-1/2} \cdot \exp[-1/2 \Delta t (VW) \Delta t^T], \quad /3.1/$$

где матрица В является обратной к (VW) и имеет квазитрехдиагональный вид /3/:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & & & & & \\ a_2^T & b_2 & a_3 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & a_{m-1}^T & b_{m-1} & a_m \\ & & & & & & a_m^T & b_m \end{bmatrix} \quad /3.2/$$

Здесь $\{b_i\}_{i=1}^m$ и $\{a_i\}_{i=1}^m$ - матрицы размерности [2.2], элементы которых имеют вид /2.6/, /2.7/. Вектор случайных величин имеет вид

$$\Delta t = \delta t - \langle \delta t \rangle, \quad /3.3/$$

Здесь

$$\delta t = \{(t_1, t_2 - t_1), (t_3 - t_2, t_4 - t_3), \dots, (t_{N-1} - t_{N-2}, t_N - t_{N-1})\};$$

$$\langle \delta t \rangle = \{ \langle t_1 \rangle, \langle t_2 - t_1 \rangle, \langle t_3 - t_2 \rangle, \langle t_4 - t_3 \rangle, \dots, \langle t_{N-1} - t_{N-2} \rangle, \langle t_N - t_{N-1} \rangle \},$$

$$/3.4/$$

где

$$t_1 = \frac{Y_1}{\Lambda s_1}, \quad t_k = \frac{Y_k - Y_{k-1}}{\Lambda s_k}, \quad k = 2, \dots, N;$$

$$\langle t_1 \rangle = \frac{\langle Y_1 \rangle}{\Delta s_1}, \quad \langle t_k \rangle = \frac{\langle Y_k \rangle - \langle Y_{k-1} \rangle}{\Delta s_k}, \quad k = 2, \dots, N. \quad /3.5/$$

Воспользуемся далее следующим разложением* матрицы (VW):

$$VW = \begin{pmatrix} (V_1 W_1) & (V_1 W_2) & \dots & (V_1 W_m) \\ (W_2^T V_1^T) & (V_2 W_2) & \dots & (V_2 W_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (W_m^T V_1^T) & (W_m^T V_2^T) & \dots & (V_m W_m) \end{pmatrix} = \quad /3.6/$$

$$= \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & & & \\ E & E & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E & \dots & E & \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (\beta_1 - \beta_2) & & & \\ (\beta_2 - \beta_3) & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (\beta_{m-1} - \beta_m) & & \\ & & & (\beta_m - \beta_{m+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & & & \\ E & E & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E & \dots & E & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ 0 \\ V_m \end{pmatrix}^T$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta_k = (W_k V_k^{-T})$ - матрицы размерности [2.2]. Симметричная квазидиагональная матрица с элементами $\{(\beta_k - \beta_{k+1})\}_{k=1}^m = \{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \}_{k=1}^m$ и $\beta_{m+1} = 0$, в свою очередь, может быть представлена в виде

*Разложение /3.6/ приводится без доказательства. Как условились ранее, $m = \frac{N}{2}$.

$$\begin{pmatrix} (\beta_1 - \beta_2) & & & \\ (\beta_2 - \beta_3) & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & (\beta_m - \beta_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q_m \end{pmatrix}^T \quad /3.7/$$

где

$$Q_k = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \dots & \\ (k) a_{21} & & 1 \\ & & & \\ (k) a_{11} & & & \end{pmatrix}, \quad \omega_k = \begin{pmatrix} (k) a_{11} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & (k) a_{22} & - \frac{(k) a_{12} (k) a_{21}}{(k) a_{11}} \\ & & & (k) a_{11} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\dots,N. \quad /3.8/$$

Принимая во внимание разложения /3.6/-/3.8/ матриц (VW) и $\{\beta_k - \beta_{k+1}\}_{k=1}^m$ соответственно, получим удобное факторизованное представление функции правдоподобия:

$$L = (2\pi)^{-N} \prod_{k=1}^N \Delta s_k^2 \prod_{k=1}^m (\det^2 V_k^{-1} \det^2 Q_k^{-1} \det \omega_k^{-1})^{-1/2} \times \exp[-1/2 \Delta u D \Delta u^T]. \quad /3.9/$$

Здесь

$$\Delta u = \{ (\sum_{i=1}^k \Delta t_i V_i) Q_k \}_{k=1}^m, \quad /3.10/$$

а матрица ошибок D является диагональной:

$$D = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_m \end{pmatrix}. \quad /3.11/$$

Теперь легко воспользоваться приведенными выше результатами для определения кинематических параметров по результатам измерений треков заряженных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельяненко Г.А. Автореферат диссертации. ОИЯИ, П1-6076, Дубна, 1971.
2. Будагов Ю.А. и др. ОИЯИ, Р10-9950, Дубна, 1976.
3. Емельяненко Г.А. ОИЯИ, Р11-6933, Дубна, 1973.

*Рукопись поступила в издательский отдел
5 декабря 1977 года.*