

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-59

P1-96-59

Р.Г.Бадалян, С.А.Корчагин*

УЧЕТ КОМБИНАТОРНОГО ФОНА
МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Тюменский нефтегазовый университет

1996

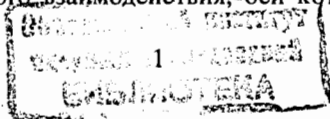
Данная работа посвящена улучшению и развитию процедуры выделения резонансов из комбинаторного фона, предложенной автором в [1]. В упомянутой работе описан метод выделения резонансов, распадающихся по двух-частичному каналу, который опирается на свойство азимутальной симметрии распадов и использует информацию о взаимном расположении резонансов (об угле между векторами их импульсов).

Пусть в событии сильного взаимодействия образовалось n резонансов (и не образовалось никаких других частиц). Метод позволяет получить вероятность истинности осуществления каждого из $n!$ возможных объединений $2n$ вторичных частиц в n предполагаемых резонансов. При этом, очевидно, только одно объединение (комбинация) истинное, а остальные $n! - 1$ составляют комбинаторный фон. Упомянутая вероятность зависит от углов между вторичными частицами, образовавшимися от различных распадов. Эти углы в свою очередь зависят от углов между резонансами и от углов вылета вторичных частиц. Иначе говоря, импульсы резонансов, полученных объединением распадных частиц, зависят от взаиморасположения вторичных частиц.

Так как вероятность комбинации частиц в n резонансах может быть представлена через вероятности C_n^2 возможных независимых сочетаний по два (пар) из образовавшихся в событии n резонансов, то рассмотрим важный частный случай пары резонансов.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ УГЛА МЕЖДУ ВТОРИЧНЫМИ ЧАСТИЦАМИ ОТ РАСПАДА РАЗНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Итак, пусть в событии образовалось два резонанса. Схематически такое событие изображено на рис.1. Стрелки соответствуют векторам импульсов частиц. Для простоты изложения будем именовать резонансы Δ -резонансами и полагать, что они распадаются на две частицы — пион и нуклон. В силу азимутальной симметрии импульсы вторичных частиц с одинаковой вероятностью могли бы быть направлены вдоль любой из образующих конусов, на боковой поверхности которых они лежат на схеме. Эти конусы с общей вершиной в точке сильного взаимодействия, оси которых направлены вдоль



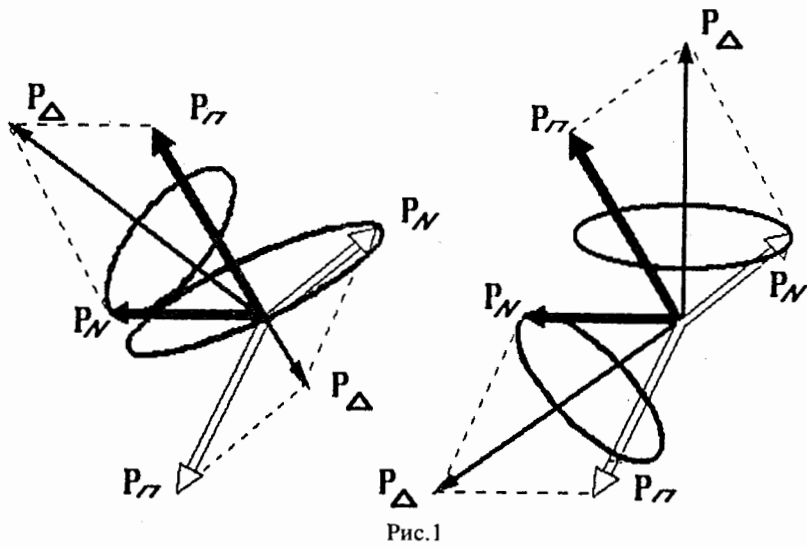


Рис.1

импульсов Δ -резонансов, соответствуют нуклонам от распадов разных резонансов.

Нас интересует распределение по косинусу угла между распадными нуклонами в случае, когда азимутальные углы вылета нуклонов с равной вероятностью принимают значения в области $0 < \phi_{1,2} < 2\pi$. Для его получения в [1] предлагалось моделирование на ЭВМ $k = 100$ вращений звезд от распадов как целого на случайные углы ϕ_1 и ϕ_2 в азимутальных плоскостях, перпендикулярных к направлениям импульсов соответственно первого и второго резонансов. При этом углы ϕ_1 и ϕ_2 выбирались равномерно и независимо в области $[0; 2\pi]$. В этом случае векторы импульсов нуклонов «вращаются» по обозначенным на рис.1 конусам. После каждой генерации углов ϕ_1 и ϕ_2 вычислялся косинус угла α между нуклонами и по статистике $k = 100$ генераций строилось распределение по $Q = \cos \alpha$, соответствующее данной комбинации вторичных частиц, в резонансы. Та комбинация, у которой плотность вероятности обнаружить значение $\cos \alpha$ вблизи экспериментально измеренного получалась наибольшей, полагалась истинной: как видно из рис.1, конусы истинной (слева на рис.1) и ложной (справа) комбинаций имеют разные растворы и углы между осями, что приводит к различию в упомянутых распределениях по $\cos \alpha$.

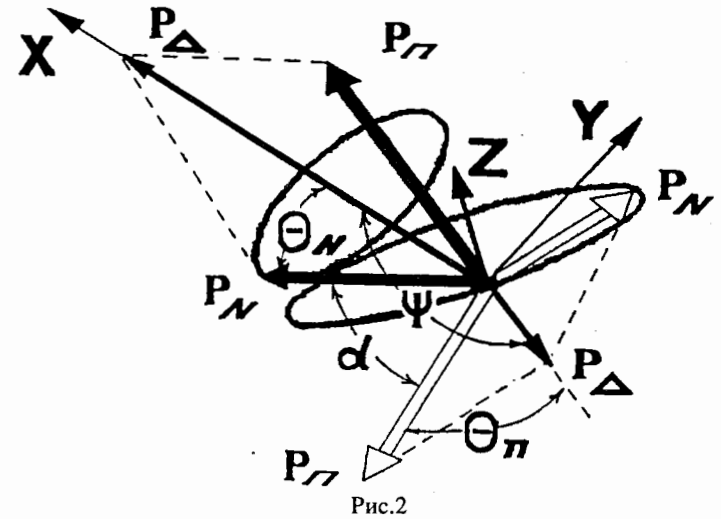


Рис.2

Чтобы избежать громоздкой процедуры моделирования, имеет смысл получить аналитическое выражение для функции распределения по косинусу угла между вторичными нуклонами (отметим, что взаиморасположение пионов определяется взаиморасположением нуклонов).

Пусть (см. рис.2) Ψ — угол между Δ_1 и Δ_2 , ϑ_1 и ϑ_2 — соответственно углы вылета нуклонов N_1 и N_2 . Так как нас интересуют только углы между частицами, будем полагать модули всех векторов на рис.2 единичными. Введем декартову систему координат так, что ее начало находится в точке взаимодействия, плоскость xOy соответствует плоскости, в которой расположены векторы импульсов резонансов, ось x направлена вдоль импульса первого резонанса. Координаты единичного вектора, направленного вдоль импульса первого нуклона, обозначим $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, а координаты единичного вектора вдоль импульса второго нуклона — $\{X_2, Y_2, Z_2\}$. Тогда координаты единичных векторов на рис.2

$$\Delta_1 = \{1, 0, 0\}; \quad \Delta_2 = \{\cos \Psi, \sin \Psi, 0\};$$

$$\{X_1, Y_1, Z_1\} = \{\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1 \cos \phi_1, \sin \vartheta_1 \sin \phi_1\};$$

$$\{X_2, Y_2, Z_2\} = \{\cos \Psi \cos \vartheta_2 - \sin \Psi \sin \vartheta_2 \cos \phi_2,$$

$$\sin \Psi \cos \vartheta_2 + \cos \Psi \sin \vartheta_2 \cos \phi_2, \sin \vartheta_2 \sin \phi_2\}. \quad (1)$$

(При получении $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ использована матрица преобразования декартовых координат при повороте вокруг оси Z на угол Ψ [2], так как систему, связанную с Δ_2 , можно представить как повернутую относительно системы, связанной с Δ_1).

Как известно [2], распределения по азимутальным углам ϕ_1 и ϕ_2 одинаковы и равны $1/2\pi$ в интервале $[0; 2\pi]$. Тогда для плотности вероятности $F(\cos \alpha)$ справедливо

$$F(\cos \alpha) = \int_{\phi_2} \int_{\phi_1} (1/2\pi)(1/2\pi) \delta[\cos \alpha - (X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)] d\phi_1 d\phi_2,$$

где $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ задаются соотношениями (1), то есть

$$F(\cos \alpha) = (1/2\pi)^2 \int_{\phi_2} \int_{\phi_1} \delta[A - (f \cos \phi_1 + e \sin \phi_1)] d\phi_1 d\phi_2, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha - \cos \Psi \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 + \sin \Psi \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \cos \phi_2, \\ f &= \sin \Psi \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 + \cos \Psi \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \cos \phi_2, \\ e &= \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \phi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Проинтегрируем (2) по ϕ_1 в интервале $[0; 2\pi]$, избавляясь тем самым от δ -функции. Для этого воспользуемся известными соотношениями [3]:

$$\delta(F(x)) = \frac{1}{\left| \frac{\delta F}{\delta x} \right|_{x=x_m^0}} \delta(x - x_m^0) \quad \text{и} \quad P \cos \alpha + G \sin \alpha = \begin{cases} R \sin(\alpha + \gamma) \\ R \cos(\alpha - \eta) \end{cases} \quad (4)$$

где $\sin \gamma = P/R$; $\cos \gamma = G/R$; $\sin \eta = G/R$; $\cos \eta = P/R$; $R = (P^2 + G^2)^{1/2}$; x_m^0 — корни уравнения $F(x) = 0$.

Производная от аргумента сложной δ -функции в (2) по ϕ_1 равна $[-e \cos \phi_1 - f \sin \phi_1] = -R \cos(\phi_1 - \gamma)$, где $R = \sqrt{e^2 + f^2}$, $\sin \gamma = -f/R$; $\cos \gamma = e/R$. Нам нужно вычислить ее значение в точке ϕ_1^0 , где аргумент δ -функции равен нулю, то есть, где $A - (f \cos \phi_1 + e \sin \phi_1) = 0$. Воспользовавшись (4), это соотношение можно записать в виде $\sin(\phi_1^0 + \eta) = A/R$, где $\sin \eta = f/R$, $\cos \eta = e/R$. Следовательно, $|R \cos(\phi_1^0 - \gamma)| = |R \sqrt{1 - (A/R)^2}| = \sqrt{R^2 - A^2}$. Тогда из (2) для функции распределения $F(\cos \alpha)$ получим

$$F(\cos \alpha) = (1/2\pi)^2 \int_{\phi_2} \frac{d\phi_2}{\sqrt{R^2 - A^2}}. \quad (5)$$

Используя (3) и (4), получим

$$R^2 - A^2 = a \cos^2 \phi_2 + b \cos \phi_2 + c, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a &= -\sin^2 \Psi \sin^2 \vartheta_2, \\ b &= 2 \sin \Psi \sin \vartheta_2 (\cos \Psi \cos \vartheta_2 - \cos \alpha \cos \vartheta_1), \\ c &= \sin^2 \Psi \cos^2 \vartheta_2 \sin^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \vartheta_1 + 2 \cos \alpha \cos \Psi \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 - \\ &\quad - \cos^2 \Psi \cos^2 \vartheta_2 \cos^2 \vartheta_1 - \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, для функции распределения (5) получаем

$$F(\cos \alpha) = (1/2\pi)^2 \int_{\phi_2} \frac{d\phi_2}{\sqrt{a \cos^2 \phi_2 + b \cos \phi_2 + c}}.$$

После замены переменной $X = \cos \phi_2$, $d\phi_2 = -dX/(1 - X^2)^{1/2}$ это выражение принимает вид

$$F(\cos \alpha) = (1/2\pi)^2 \int_X \frac{d\phi_2}{\sqrt{S(X)}} = (1/2\pi)^2 \int_X \frac{d\phi_2}{\sqrt{(1+X)(1-X)(X-X_+)(X-X_-)}}, \quad (7)$$

где X_{\pm} — корни трехчлена $a \cos^2 \phi_2 + b \cos \phi_2 + c$,

$$X_{\pm} = \sin \Psi \sin \vartheta_2 (\cos \Psi \cos \vartheta_2 - \cos(\alpha \pm \vartheta_1)). \quad (8)$$

Мы получили, что многочлен четвертой степени $S(X)$ под корнем в знаменателе выражения (7) имеет три действительных корня: $r_1 = 1$, $r_2 = X_+$, $r_3 = X_-$ в порядке убывания. Согласно [3] в этом случае канонической заменой переменной $X = X(\beta)$ подынтегральное выражение в (7) сводится к нормальной форме Лежандра для эллиптических интегралов. Так же приведены канонические преобразования, отображающие интервал интегрирования (a, X) в соответствующий интервал действительного переменного β между 0 и $\pi/2$ так, что

$$\frac{dX}{\sqrt{S(X)}} = \mu \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}. \quad (9)$$

В рассматриваемом нами случае трех действительных корней у многочлена $S(X)$ эти преобразования имеют вид:

1). Для $X \leq r_3 = X_-$ преобразование $X = r_1 - \frac{r_1 - r_3}{\sin^2 \beta}$, причем при $X = -\infty$ $\beta = 0$, а при $X = X_-$ $\beta = \pi/2$;

2). Для $X_+ \leq X \leq 1$ преобразование $X = \frac{r_2(r_1 - r_3) - r_3(r_1 - r_2) \sin^2 \beta}{r_1 - r_3 - (r_1 - r_2) \sin^2 \beta}$, причем при $X = X_-$ $\beta = 0$, а при $X = 1$ $\beta = \pi/2$.

В обоих предыдущих случаях

$$k_1^2 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3} = \frac{1 - X_+}{1 - X_-}. \quad (10)$$

3). В случае $X_- < X < X_+$ преобразование $X = r_3 + (r_2 - r_3) \sin^2 \beta$, причем при $X = X_-$ $\beta = 0$, а при $X = X_+$ $\beta = \pi/2$.

Для этого случая

$$k_2^2 = \frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3} = \frac{X_+ - X_-}{1 - X_-}. \quad (11)$$

Во всех трех случаях

$$\mu = \frac{2}{\sqrt{1 - X_-}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \sin \Psi \sin \vartheta_2 (\cos \Psi \cos \vartheta_2 - \cos(\alpha - \vartheta_1))}}. \quad (12)$$

Используя (7—12), получим, что распределение $F(\cos \alpha)$ выражается через полные эллиптические интегралы первого рода $K(k) + K^*(k)$ и имеет вид при $X_- < \cos \varphi_2 < X_+$

$$F(\cos \alpha) = \frac{\mu}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \beta}} = \frac{\mu}{\pi^2} K(k_2), \quad (13)$$

где

$$k_2^2 = \frac{2 \sin \vartheta_1 \sin \alpha \sin \vartheta_2 \sin \Psi}{1 - \sin \Psi \sin \vartheta_2 (\cos \Psi \cos \vartheta_2 - \cos(\alpha - \vartheta_1))};$$

при $-1 < \cos \varphi_2 < X_-$ и при $X_+ < \cos \varphi_2 < 1$

$$F(\cos \alpha) = \frac{\mu}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \beta}} = \frac{\mu}{\pi^2} K(k_1), \quad (14)$$

где

$$k_1^2 = \frac{1 - \sin \Psi \sin \vartheta_2 (\cos \Psi \cos \vartheta_2 - \cos(\alpha + \vartheta_1))}{1 - \sin \Psi \sin \vartheta_2 (\cos \Psi \cos \vartheta_2 - \cos(\alpha - \vartheta_1))};$$

Из (13; 14) видно, что, когда φ_2 меняется от 0 до $\pi/2$, $X = \cos \varphi_2$ дважды проходит от -1 до 1 и тем самым через интервалы $X_- < \cos \varphi_2 < X_+$ ($0 < k_2 < 1$), $-1 < \cos \varphi_2 < X_-$ и $X_+ < \cos \varphi_2 < 1$ ($0 < k_1 < 1$).

Поэтому, произведя в (7) интегрирование по φ_2 , для распределения по $\cos \alpha$ получим

$$F(\cos \alpha) = \frac{\mu}{\pi^2} (K(k_1) + K(k_2)). \quad (15)$$

Легко видеть, что $k_1 = \sqrt{1 - k_2^2}$. Используя известные соотношения [3] $k^* = \sqrt{1 - k^2}$ и $K(k^*) = K^*(k)$, выражение (15) можно записать в виде функции от одного аргумента (k_1 или k_2):

$$F(\cos \alpha) = \frac{\mu}{\pi^2} (K(k) + K^*(k)), \quad (15a)$$

где k — это k_1 или k_2 .

Согласно (13) и (14) k_1 и k_2 зависят от $\cos \alpha$. Тогда и область изменения аргумента функций $K(k)$ и $K^*(k)$ в (16) определяется областью изменения $\cos \alpha$. Рассмотрим, в каких пределах изменяется угол α , учитывая, что φ_1 и φ_2 меняются в области $[0; 2\pi]$ при постоянных Ψ и $\vartheta_{1,2}$. Предварительно отметим, что из (10) и (11) следует, что k_1 (либо k_2) тем ближе к единице (а сопряженный аргумент к нулю), чем ближе лежат значения X_+ и X_- , то есть, чем меньше разность $\cos(\alpha + \vartheta_1) - \cos(\alpha - \vartheta_1)$. Если $X_+ = X_-$, то угол α равен либо нулю, либо π . В этом случае полные эллиптические интегралы в распределении (15, 16) имеют интегрируемую бесконечность [3] при $k = 1$ (либо при $k^* = 1$).

Пределы изменения угла α легко установить, непосредственно опираясь на рис.2. Легко видеть, что α не превышает π при условии $\Psi + \vartheta_1 + \vartheta_2 < \pi$. Если при этом выполняется и $\Psi - \vartheta_1 - \vartheta_2 > 0$, то телесные углы, соответствующие конусам, по которым «вращаются» нуклоны, не перекрываются. В этом случае $\alpha_{\max} = \Psi + \vartheta_1 + \vartheta_2$, а $\alpha_{\min} = \Psi - \vartheta_1 - \vartheta_2$.

Если $\Psi - \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$, то телесные углы, соответствующие конусам, перекрываются полностью или частично. Если они перекрываются частично, то боковые поверхности конусов имеют пересечения. При этом $\alpha = 0$ соглас-

по определению угла α , и при соответствующих значениях k распределение имеет упомянутую интегрируемую бесконечность. Таким образом, в случае частично перекрывающихся конусов $\alpha_{\min} = 0$. Для случая полностью перекрывающихся конусов введем обозначения $\gamma_1 = \Psi + \vartheta_1 - \vartheta_2$, $\gamma_2 = \Psi - \vartheta_1 + \vartheta_2$. В указанном случае $\alpha_{\min} = \min\{|\gamma_1|, |\gamma_2|\}$. Конусы перекрываются частично, если $\min\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq 0$, и полностью, если $\min\{\gamma_1, \gamma_2\} < 0$. Для всех рассмотренных выше случаев взаиморасположения конусов $\alpha_{\max} = \Psi + \vartheta_1 + \vartheta_2$.

Ситуация, когда $\Psi + \vartheta_1 + \vartheta_2 > \pi$, в отличие от предыдущих, сводится к уже рассмотренным инверсией одного из конусов (резонансов) относительно начала координат. При этом, чтобы вернуться к случаю исходного расположения конусов, нужно использовать соотношения, связывающие исходные и полученные после инверсии (они помечены штрихом) угловые координаты: $\vartheta'_{1,2} = \pi - \vartheta_{1,2}$, $\Psi' = \pi - \Psi$, $\alpha' = \pi - \alpha$. Очевидно, что α'_{\min} соответствует α_{\max} , а α'_{\max} переходит в α_{\min} .

МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ СПЕКТРОВ РЕЗОНАНСОВ

Ниже описывается методика выделения комбинаторного фона, основанная на решении интегральных уравнений и являющаяся дальнейшим развитием методики [1], опирающейся на метод максимума правдоподобия.

Рассматриваемые события сильного взаимодействия состоят в том, что экспериментально зарегистрированы импульсы двух нуклонов и двух пионов. Возможны две комбинации этих вторичных частиц в два резонанса. Каждую комбинацию будем характеризовать парой 4-векторов импульсов резонансов. Это можно делать, задавая массы M_1^Δ, M_2^Δ и модули импульсов P_1^Δ, P_2^Δ резонансов, углы вылета одной из распадных частиц (например, нуклона от распада первого резонанса ϑ_1^N и пиона от распада второго ϑ_2^N), азимутальные углы ϕ_1^N, ϕ_2^N этих распадных частиц в системах соответствующих резонансов и дополнительно угол Ψ между векторами импульсов резонансов и угол α между импульсами указанных распадных частиц.

Если одна из комбинаций истинная, то вторая — ложная. Любая из возможных комбинаций является истинной с тем большей вероятностью, чем больше неизвестная вероятность $P_{\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}}$ для рассматриваемых сильных взаимодействий состоять из резонансов с величиной импульсов P_1^Δ, P_2^Δ и углом между импульсами резонансов Ψ . Кроме того, вероятность

конкретной реализации (регистрации) на эксперименте этой комбинации, то есть гиперточки $\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}$, зависит также от вероятности распадов резонансов на вторичные частицы с зарегистрированными значениями $P_1^N, P_2^N, \vartheta_1^N, \vartheta_2^N$ и α . Аналитические выражения для распределений $W(P, \vartheta)$ по параметрам P и ϑ одной из вторичных частиц при двухчастичном изотропном распаде резонанса с массой M^Δ и импульсом P^Δ приведены, например, в [2]. Выражение для условной вероятности того, что импульсы вторичных частиц от распада разных резонансов разлетятся под зарегистрированным для конкретного события углом α при определенных $P_1^N, P_2^N, \vartheta_1^N, \vartheta_2^N$ и Ψ , получено нами в предыдущем пункте. Обозначим эту условную вероятность через $W(\alpha)$.

Наша задача — получить неизвестный спектр истинных комбинаций в резонансы $P_{\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}}$. Для этого воспользуемся методикой, описанной в работе [4].

Пусть экспериментально зарегистрировано событие, такое что одна из комбинаций имеет параметры $\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}$, а другая — $\{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}$. Будем строить аналогичный искомому совокупный спектр комбинаций $Q[\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}, \{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}]$, соответствующий числу указанных событий в экспериментальной статистике. Таким образом, в совокупный спектр включаются и истинные, и ложные комбинации.

Вероятность $R[\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}, \{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}]$ конкретной реализации, полученной в событии конфигурации вторичных частиц (т.е. вероятность регистрации некоторого события), при условии, что истинные резонансы имеют параметры $\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}$, согласно изложенному выше может быть записана в виде

$$R[\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}, \{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}] = \\ = P_{\{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}} W(M_1^\Delta, P_1^N, \vartheta_1^N) W(M_2^\Delta, P_2^N, \vartheta_2^N) W(\alpha).$$

Совокупный спектр тогда получится как сумма таких вероятностей для истинной комбинации $\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}$ (ложной $\{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}$) и истинной комбинации $\{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}$ (ложной $\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}$):

$$\begin{aligned}
Q[\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}, \{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}] = \\
= R[\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}, \{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}] + \\
+ R[\{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}, \{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}] = \\
= P_{\{M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*\}} W(M_1^\Delta, P_1^N, \vartheta_1^N) W(M_2^\Delta, P_2^\pi, \vartheta_2^\pi) W(\alpha) + \\
+ P_{\{M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi\}} W(M_1^{*\Delta}, P_1^{*N}, \vartheta_1^{*N}) W(M_2^{*\Delta}, P_2^{*\pi}, \vartheta_2^{*\pi}) W(\alpha^*). \quad (16)
\end{aligned}$$

Опираясь на свойство (16), связывающее совокупный спектр с истинным спектром P , интегрируя по параметрам вторичных частиц, можно получить интегральные уравнения для этих спектров. При этом не видно принципиальных трудностей получения таких интегральных уравнений в аналитическом виде. Однако есть более простая процедура [4] сведения задачи к системе линейных алгебраических уравнений, не зависящая к тому же от вида определяемого спектра. Поясним ее на рассматриваемом нами случае получения дифференциального спектра резонансов по $M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^\Delta, P_2^\Delta, \Psi$.

Интервалы измерения величин M^Δ, P^Δ и $\Psi([0; 2\pi])$ разобьем на N подынтервалов, сводя задачу к дискретному случаю. Введем матрицы $Q_{pqijk, rslmn}$, $W_{pqijk, rslmn}$ в качестве счетчиков характеристик события ($p, q, i, j, k, r, s, l, m, n = 1, \dots, N$, индексы p, q, l, m, n соответствуют истинным параметрам $\{P^\Delta, P^\Delta, \Psi\}$, а r, s, i, j, k — параметрам, зарегистрированным при таких истинных в совокупном спектре). В элемент $Q_{pqijk, rslmn}$ будем добавлять единицу, если в событии один из импульсов P_1^Δ, P_2^Δ попадает в i -й подынтервал, другой (из той же комбинации, что и первый) — в j -й, одна из масс M_1, M_2 попадает в r -й интервал, другая — в q -й, а соответствующий комбинации угол между импульсами — в k -й подынтервал области $[0; 2\pi]$. При этом параметрам второй из возможных комбинаций четырех вторичных частиц в два резонанса $M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*\Delta}, P_2^{*\Delta}, \Psi^*$ должны соответствовать подынтервалы r, s, l, m, n .

Элементы матриц W и W^* , соответствующих при дискретизации задачи ядру интегрального уравнения, связывающего истинный и совокупный спектры, можно получить двумя способами:

1). Аналитически, вычисляя выражения $W(M_1^\Delta, P_1^N, \vartheta_1^N) W(M_2^\Delta, P_2^\pi, \vartheta_2^\pi) W(\alpha)$ и $W(M_1^{*\Delta}, P_1^{*N}, \vartheta_1^{*N}) W(M_2^{*\Delta}, P_2^{*\pi}, \vartheta_2^{*\pi}) W(\alpha^*)$ на равномерных сетках в области изменения переменных $M_1, M_2, P_1^N, \vartheta_1^N, P_2^\pi, \vartheta_2^\pi, \Psi, \alpha, M_1^*, M_2^*, P_1^{*N}, P_2^{*\pi}, \Psi^*$.

2). Методом Монте-Карло, разыгрывая распады резонансов с параметрами $M_1, M_2, P_1^N, P_2^\pi, \Psi$, распределенными равномерно (в области их изменения в эксперименте). Искомая матрица получается путем построения вероятностей для ложных комбинаций иметь параметры $M_1^{*\Delta}, M_2^{*\Delta}, P_1^{*N}, P_2^{*\pi}, \Psi^*$ при условии, что истинная имеет $M_1^\Delta, M_2^\Delta, P_1^N, P_2^\pi, \Psi$.

После того, как матрицы Q, W, W^* будут построены, мы придем к соотношениям вида

$$\begin{aligned}
Q_{pqijk, rslmn} = W_{pqijk, rslmn} P_{rslmn} + W_{rslmn, pqijk} P_{pqijk} \\
(p, q, i, j, k, r, s, l, m, n = 1, \dots, N). \quad (17)
\end{aligned}$$

Решив эту систему линейных уравнений [14], можно получить истинный спектр резонансов P_{pqijk} .

Как отмечено в [4], система (17) переопределена: если число неизвестных равно M , то число уравнений в системе — M^2 . Следовательно, число уравнений можно уменьшать, например, суммируя левые и правые части некоторых из уравнений (17), и использовать эти суммы для построения новой системы уравнений. Можно также применить метод понижения числа уравнений, предложенный в [4]. Однако в любом случае число уравнений должно быть не меньше числа неизвестных. А это число, равное числу бинов в экспериментальной гистограмме, в случае дифференциального спектра очень велико.

Для решения системы (17) и линейных систем, полученных из нее, разумно использовать методы Монте-Карло [5]. В [5], гл.5, п.5.6 показано, что если число неизвестных больше 90, то применение методов Монте-Карло выгоднее, чем применение методов линейной алгебры (число генерируемых траекторий при этом полагается порядка тысячи). Кроме того, методы Монте-Карло позволяют непосредственно строить линейные функционалы от вектора решения линейной системы уравнений ([5], гл.5, п.5.3 и 2.4). Это позволяет непосредственно строить решения, уже просуммированные по части индексов (интегральные спектры). Для сокращения необходимого для решения машинного времени можно воспользоваться результатами п.2.6 из гл.5 работы [5]. Способ решения системы (17) будет рассмотрен в отдельной работе.

Таким образом, предложенная методика получения спектра резонансов универсальна в том смысле, что она пригодна для построения самых разных (одномерных и многомерных) спектров. В силу изложенного выше ее можно назвать интегральным методом учета комбинаторного фона.

Если нас интересуют только спектры пар резонансов или спектры одиночных резонансов, то случай, когда событие состоит из N резонансов, не отличается принципиально от простого случая событий из двух резонансов. Из совокупности вторичных частиц можно составить $N!$ возможных событий.

Каждое такое событие из N резонансов можно представить как совокупность C_N^2 воображаемых событий из всех различных пар, которые можно получить из N резонансов, и рассмотрение сведется к изложенному выше. Если же нас интересуют N -частичные спектры (корреляции в системах из N резонансов), то и в этом случае в правой части соотношения, соответствующего (17) для случая событий из N резонансов, будет стоять сумма, слагаемые которой соответствуют всем возможным комбинациям N нуклонов и N пионов в событии из N резонансов. Таким образом, неизвестный спектр будет входить в правую часть этого соотношения, связывающего совокупный и истинный спектры в виде $N!$ разных слагаемых, аналогично тому, как мы имели $2! = 2$ слагаемых в случае событий из двух резонансов. Но размерность задачи при этом пропорциональна N^2 , что резко повышает требования к экспериментальной статистике.

Хотя применение методики предполагает отсутствие нерезонансного фона (то есть отсутствие нуклонов и пионов, не являющихся вторичными частицами от распадов резонансов), ее можно применять для получения промежуточных спектров, свободных от комбинаторного фона. К таким спектрам можно далее применять обычно используемые методы выделения резонансов, например метод эффективных масс.

В заключение авторы выражают благодарность М.И.Подгорецкому, А.А.Кузнецову и Е.Н.Кладницкой за обсуждения и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корчагин С.А. — Метод выделения резонансных частиц по импульсам продуктов их распада в случае большого комбинаторного фона. Ядерная физика, 1993, т.56, вып.12, 1993, с.119—122.
2. Копылов Г.И. — Основы кинематики резонансов. М.: Наука, 1970.
3. Корн Г., Корн Т. — Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
4. Тахтамышев Г.Г. — Метод построения спектров неоднозначно определенных величин. Препринт ОИЯИ 2543, Дубна, 1966.
5. Соболев И.М. — Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 февраля 1996 года.

Бадалян Р.Г., Корчагин С.А. P1-96-59
Учет комбинаторного фона методом интегральных уравнений

Получено аналитическое выражение для вероятности регистрации пары резонансов, зависящее от взаиморасположения вторичных частиц при их (двухчастичном) распаде. Оно используется в предлагаемом методе учета комбинаторного фона по совокупности комбинаций вторичных частиц.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод авторов

Badalian R.G., Korchagin S.A. P1-96-59
Consideration of the Combinatorial
Background Using Integral Equations

Registration probability expression for a couple of resonances is obtained. It depends upon the interlocation of secondary ones from the two-particle decay. The obtained expression is used in the proposed combinatorial background control method, which is based on the whole complex of secondary combinations.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996