



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-363

P1-96-363

Р.Г.Бадалян, С.А.Корчагин\*

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО  
ДЛЯ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ,  
ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ВЫДЕЛЕНИИ РЕЗОНАНСОВ  
ИЗ КОМБИНАТОРНОГО ФОНА

---

\*Тюменский нефтегазовый университет

Метод Монте-Карло для большой системы линейных уравнений, возникающей при выделении резонансов из комбинаторного фона

Предложена процедура решения большой системы линейных уравнений, возникающей при выделении спектров резонансов из комбинаторного фона [2]. Она опирается на метод Монте-Карло и сводится к построению гистограмм с весами, вычисляемыми на случайных траекториях. Процедура решения проверяется на искусственных событиях распада резонансов.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод авторов

Badalian R.G., Korchagin S.A.

PI-96-363

Monte Carlo Method for a Big Number of Linear Equations System Rising from the Extraction of Resonances from Combinatorial Background

This paper presents the solution procedure for a big linear equations system rising from the resonance spectra extraction from combinatorial background. It is based on Monte Carlo method and is reduced to histogramming with weights, calculated on random trajectories. The procedure is tested on artificial events of resonance decays.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996

В исследованиях по физике элементарных частиц до сих пор актуальна проблема выделения комбинаторного фона. Один из путей преодоления этой методической трудности описан в работах [1,2]. В работе [2] было получено аналитическое выражение для вероятности наблюдать экспериментально совокупность четырех распадающих частиц от одной из двух предполагаемых пар резонансов, распадающихся по двухчастичному каналу. При этом каждой из двух возможностей объединения вторичных частиц (условно нуклонов и пионов) в два резонанса (условно  $\Delta$ -изобары) соответствуют различные вероятности, определяемые кроме вектор-импульсов вторичных частиц еще и совокупностью предполагаемых вектор-импульсов резонансов (их взаиморасположением).

Полученное для указанной вероятности выражение используется в [2] для построения системы линейных уравнений, связывающих совокупный спектр всех возможных объединений (комбинаций) вторичных частиц в резонансы со спектром только истинных резонансов (истинных комбинаций).

Из за того, что неизвестный спектр истинных резонансов является дифференциальным (многомерным) спектром по массам и импульсам обоих резонансов и углу  $\Psi$  между импульсами резонансов [2] (то есть пятимерным), число уравнений в системе может достигать сотен тысяч, что требует специальных подходов к ее решению. Пути решения указанной системы уравнений методом Монте-Карло были намечены в работе [2]. В данной работе представлены особенности и результаты ее решения.

#### Описание алгоритма решения

Как указано в [3], где изложен метод определения спектров неоднозначно определенных величин, использованный в [2], система, связывающая наблюдаемый и истинный спектры, переопределена: имеется  $N^2$  уравнений для  $N$  неизвестных бинов спектра истинных резонансов. Поэтому, просуммировав уравнения системы [2], например, по одному из индексов в левой части (по столбцам части, не содержащей неизвестные), приходим к системе  $N$  уравнений для  $N$  неизвестных вида

$$\sum_k a_{ik} = \sum_k g_{ik} n_k + n_i \sum_k g_{ki} = \sum_k (\delta_{ik} + g_{ik}) n_k. \quad (1)$$

Обозначения соответствуют работе [3], где подробно описана использованная в [2] и в данной работе общая методика. Переходя к обозначениям [2], можем записать (1) в несколько видоизмененном и общепринятом для системы линейных уравнений виде:

$$A_i = \sum_k W_{ik} n_k \quad (i, k = 1, \dots, N). \quad (2)$$

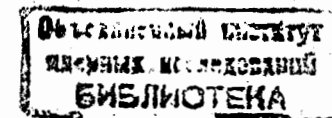
Здесь  $A_i$  - упомянутый выше совокупный спектр, а  $n_k$  - неизвестный спектр истинных резонансов.

Матрица системы для недиагональных элементов равна вероятности зарегистрировать  $i$ -е ложное объединение вторичных частиц в предполагаемые резонансы при истинном  $k$ -м объединении [2, 3]. Индексы  $i$  и  $k$  нумеруют совокупность характеристик пары резонансов: их значение тем больше, чем больше импульс резонанса с меньшим из двух импульсов, чем больше его масса, чем больше импульс и масса другого резонанса и, наконец, чем больше косинус угла между резонансами. Все это аналогично тому, как величина, зависящая от двух индексов  $i$  и  $k$  ( $i, k = 1, \dots, m$ ), представляется как величина, зависящая от одного индекса  $j = (k-1)m + i$  ( $j = 1, \dots, m^2$ ).

Диагональный элемент матрицы системы представляет собой сумму  $1 + W_{ii}$  - сумму нормировки вероятностей (единицы) и вероятности зарегистрировать  $i$ -е ложное объединение при истинном, соответствующем  $i$ -му же интервалу обобщенных индексов.

Из изложенного видно, что диагональный элемент матрицы больше суммы остальных элементов из той же строки (так как сумма вероятностей не больше нормировки), что обеспечивает устойчивость и сходимости решения системы (2) методом Монте-Карло [4].

Процедура решения системы линейных уравнений методом Монте-Карло согласно [4] предполагает построение случайных траекторий (цепочек) - последовательностей точек в пятимерном пространстве изменения характеристик пары резонансов, такой, что вероятность перехода из каждой предыдущей точки в последующую не равна нулю. В нашем случае этого можно достичь, если возможна ложная комбинация вторичных частиц, соответствующая пятимерной точке  $i+1$  при условии, что истинной является комбинация, которой соответствует точка  $i$ . Можно, например, как это сделано в данной работе, выбирать последовательные точки цепочки, меняя азимутальные углы вылета вторичных частиц в каждой фиксированной, исходной для данной траектории экспериментально зарегистрированной конфигурации частиц, то есть, поворачивая последовательно как целое [5] двухлучевые звезды от распадов предполагаемых резонансов на случайные углы вокруг вектор-импульсов резонансов. Тогда между последовательными "ложными" сочетаниями возможна цепочка - траектория.





Далее, по описанным в [4] правилам вводятся весовые функции каждой траектории, зависящие от матрицы системы (2), от плотности вероятностей, с которой генерируются случайные точки траектории, и от левой части системы. Усредняя определенную [4] случайную величину от этих весовых функций по множеству моделированных траекторий, можно получить неизвестный спектр либо, если необходимо, некоторый функционал от него (например, интегральный спектр по части из характеристик резонанса).

В данной работе использован способ перехода к сопряженному (2) уравнению (см. [4]). При этом функционал от решения системы (2), представляемый далее как скалярное произведение  $(\Phi, n)$ , получается усреднением по траекториям величины

$$\zeta_{|A|}^* = \frac{A(Q_0)}{P(Q_0)} \sum_{j=0}^{\infty} W_j^* \Phi_{(Q_0, j)} \quad (3)$$

Здесь  $P(Q_0)$  - вероятность, соответствующая точке  $Q_0$ , моделируемой в пятимерном пространстве,  $\Phi_{(Q_0, j)}$  - функция, формирующая функционал от решения,  $W_j^*$  - весовая функция, соответствующая матрице сопряженной задачи [4, 2.6] и траектории с числом звеньев, равным  $j$ . Таким образом, при большом числе  $M$  траекторий

$$(\Phi, n) \approx \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \zeta_{|A|_s}^* \quad (4)$$

Заметим, что  $A(Q_0)$  в выражении (3) - это содержимое бина гистограммы совокупного спектра, соответствующего точке  $Q_0$ . Эта гистограмма строится по всем наблюдаемым экспериментально возможным парам  $(\pi N)$ . Тогда при получении  $\zeta_{|A|}^*$  в (3) естественно все остальные сомножители (кроме  $A(Q_0)$ ) интерпретировать как вес, с которым каждая из таких пар (точек  $Q_0$ ) входит в бин гистограммы.

Предположим, что точка  $Q_0$  встречается при генерациях исходных точек траекторий [4] с той же вероятностью, что и экспериментально, в совокупном спектре (тогда отношение  $A(Q_0)/P(Q_0)$  равно константе - единице). В таком случае для получения суммы из выражения (4) можно из каждой экспериментальной точки  $Q_0$  генерировать траекторию, вычислять по формулам из [2;4]  $W_j^*$  и, если величины, по которым строится интегральный спектр резонансов (величины масс или импульсов резонансов, а также угла между ними) совпадают с аналогичными из пятимерной точки  $Q_0$ , то включать  $W_j^*$  в сумму (3). То есть применяется метод построения одной, соответствующей точке  $Q_0$  компоненты решения [4, 5.3]. Функция  $\Phi_{(Q_0, j)}$  при этом представ-

ляет собой вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме равной единице компоненты, соответствующей бину решения, содержащему точку  $Q_0$ . В (4) происходит усреднение по множеству из  $A(Q_0)$  точек из этого бина.

Таким образом, если для каждой из получаемых экспериментально точек  $Q_0$  построить вес  $\sum_{j=0}^{\infty} W_j^* \Phi_{(Q_0, j)}$ , то построенная с такими весами экспериментальная гистограмма будет соответствовать истинному спектру резонансов. В этом преимущество метода перехода к сопряженной задаче - она сводится к общепринятой методической процедуре введения веса пары резонансов, который вычисляется аналитически на точках моделируемой траектории.

#### Результаты проверки алгоритма

Для проверки изложенной методики по алгоритмам из [5] моделировались изотропные в системе покоя распады двух  $\Delta$ -резонансов, то есть рассматривались искусственные четырехлучевые события, состоящие из двух нуклонов и двух пионов.

Масса квази- $\Delta$ -резонансов генерировалась по нормальному закону со средним 1232 МэВ и дисперсией 80 МэВ.

Импульсный спектр резонансов соответствовал распределению вида

$$W_{(P)} dP = C \exp(-(P/D)^2) dP \quad (P > 0),$$

то есть в качестве значения импульса бралось абсолютное значение моделированной по нормальному распределению величины  $P$ . Здесь  $D = 0,7$  ГэВ/с, а  $C$  - коэффициент нормировки.

Угловое распределение резонансов в л.с., в отличие от [1], бралось не изотропным, а в виде совокупности двух "ступенек":

$$P_{(\cos \gamma)} = \begin{cases} 1/0,6; & -1 < \cos \gamma < -0,7, \\ 0, & -0,7 < \cos \gamma < 0,7, \\ 1/0,6; & 0,7 < \cos \gamma < 1. \end{cases}$$

Это делалось для того, чтобы фоновое распределение по косинусу угла между резонансами  $\cos \psi$  более заметно отличалось от истинного.

К полученным таким образом искусственным событиям применялась вышеописанная методика. Строились интегральные спектры по импульсу, эффективной

массе и косинусу угла разлета резонансов. Полученные с использованием предложенных здесь весов, а также фоновые и истинные, нормированные на единицу гистограммы представлены на рис.1-3.

Распределение по эффективной массе (рис.1) плохо пригодно для демонстрации применимости методики, так как истинное и фоновое распределения отличаются слабо. Оно приводится ввиду его важности для приложений. Из рис.1 видно, что и "вычисленное" распределение не сильно отличается от истинного.

Распределения по импульсу и по косинусу угла разлета лучше демонстрируют применимость методики: фоновое распределение по  $\cos \psi$  отличается от истинного более асимметричной формой и более высокими значениями вероятности в середине области изменения; фоновое распределение по импульсу заметно отличается от истинного в области малых импульсов.

Из рис.2,3 видно, что вычисленные распределения заметно ближе к истинному по сравнению с фоновыми.

Вычисления показали, что результаты расчетов слабо зависят от максимального числа точек в траектории. По-видимому, это следствие того, что матрица системы хорошо обусловлена (почти диагональна) и для ее решения достаточно нескольких итераций.

#### Заключение

Разработана несложная, сводящаяся к вычислению весов методика, позволяющая выделять спектры резонансов из комбинаторного фона. После обобщения [2] на события с большим числом резонансов и учета некомбинаторного фона ее можно будет применить к реальным событиям сильного взаимодействия. Оценки спектров, полученные с ее помощью, позволят более аккуратно применять подход из работы [1], учитывая при отборе истинной комбинации не только условную вероятность для угла между вторичными частицами от разных резонансов, обладающих измеренными характеристиками, но и вероятности этих характеристик (то есть оценки спектров резонансов).

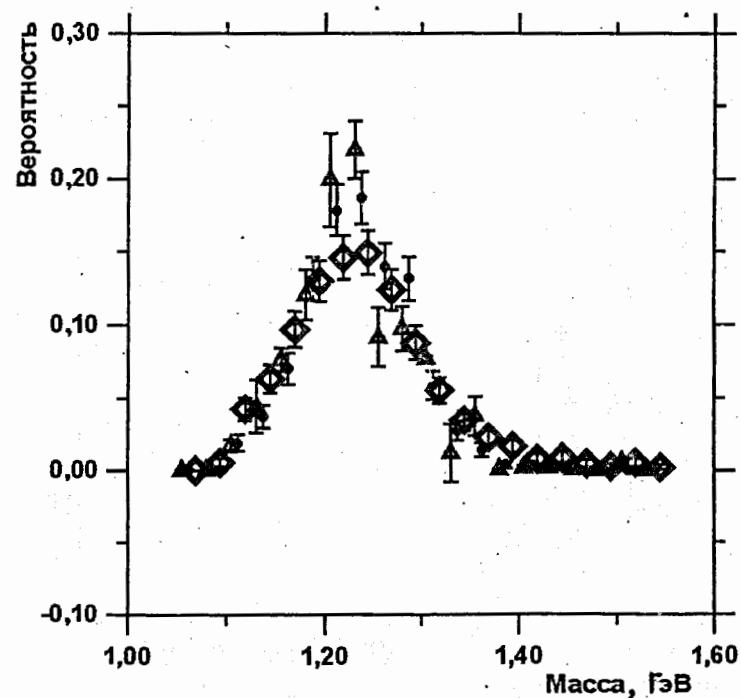


Рис. 1. Распределение по эффективной массе: ● — экспериментальное без фона; △ — расчетное; ◇ — экспериментальное с фоном.

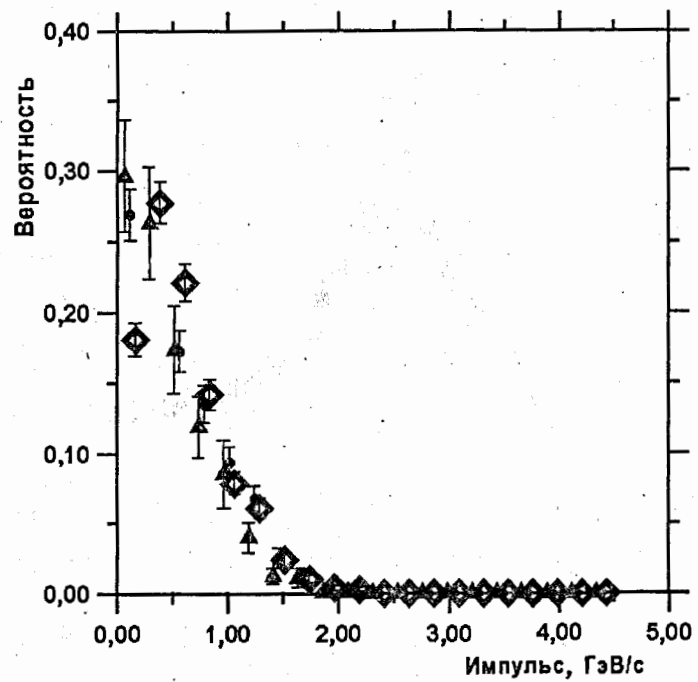


Рис. 2. Распределение по импульсу: ● — экспериментальное без фона; △ — расчетное; ◇ — экспериментальное с фоном.

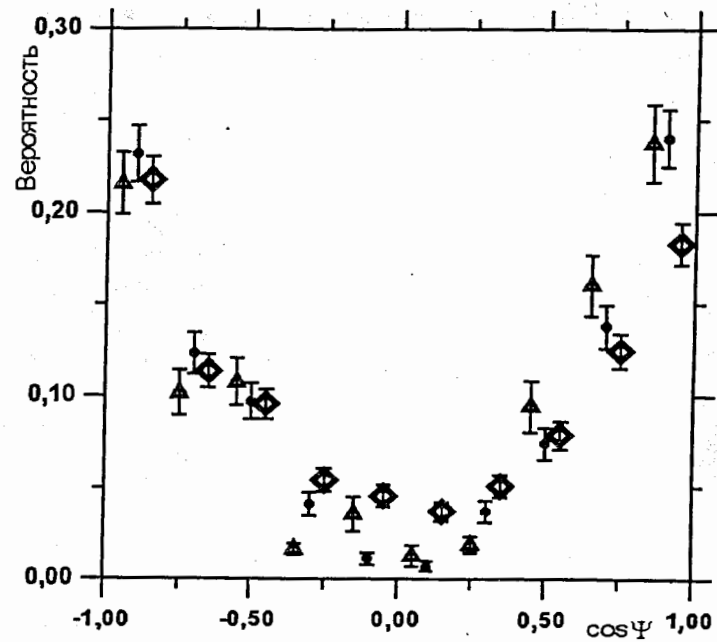


Рис. 3. Распределение по углу разлета: ● — экспериментальное без фона; △ — расчетное; ◇ — экспериментальное с фоном.

## Литература

1. Корчагин С.А. Метод выделения резонансных частиц по импульсам продуктов их распада в случае большого комбинаторного фона. ЯФ, 1993, т.56, вып.12, с.119.
2. Бададян Р.Г., Корчагин С.А. Учет комбинаторного фона методом интегральных уравнений. Препринт ОИЯИ Р1-96-59, Дубна, 1996.
3. Тахтамышев Г.Г. Метод построения спектров неоднозначно определенных величин . ОИЯИ - 2543, Дубна, 1966.
4. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло . М.:Наука, 1973.
5. Копылов Г.И. Основы кинематики резонансов . М.: Наука, 1970.