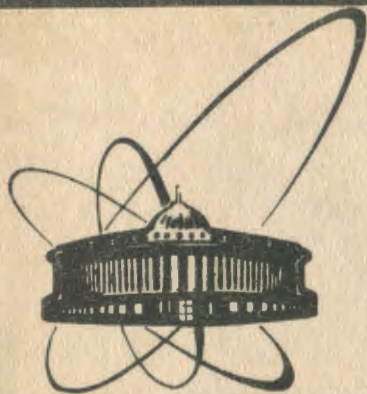


91-88



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P1-91-88

А. Д. Коваленко, В. В. Титков*

РАСЧЕТ ДВУМЕРНОГО ИМПУЛЬСНОГО
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
КАТУШКИ ЭМУЛЬСИОННОГО ДЕТЕКТОРА
КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ

*Ленинградский государственный технический университет

1991

Оконечные устройства систем генерации сильного ($B \geq 60$ Тл) импульсного магнитного поля с длительностью импульса порядка $10 \div 1000$ мкс выполняются, как правило, в виде массивных толстостенных проводников, обеспечивающих заданные параметры магнитного поля в рабочем объеме и необходимую прочность конструкции, подвергающейся в этих условиях значительным термическим и механическим нагрузкам. Примером таких устройств могут служить разнообразные одновитковые массивные катушки ^{1,2}. К этому же классу источников магнитного поля относится катушка установки СЛОН ³, выполненная в виде плоского витка сложного сечения (рис.1).

Использование толстостенных проводников обуславливает резко неоднородное по глубине проводника распределение тока, вследствие поверхностного эффекта. Широко распространенной моделью для численного анализа магнитного поля таких систем при резком поверхностном эффекте является использование приближения идеальной проводимости. При этом принимается, что глубина проникновения поля в стенку проводника стремится к нулю, весь ток сосредоточен в бесконечно тонком поверхностном слое и на поверхности проводника отлична от нуля только касательная составляющая индукции. Для отыскания распределения поверхностной плотности тока i' составляется интегральное уравнение, например

$$\int_{\Gamma} M(s, s') i'(s') d\Gamma(s') = \Phi(s), \quad (1)$$

где ядро $M(s, s')$ — коэффициент взаимоиנדукции между двумя произвольными токовыми контурами, проходящими по поверхности проводника, $\Phi(s)$ — величина потока магнитной индукции, сцепленного с данным контуром. Величина $\Phi(s)$ определяется с помощью дополнительных ус-

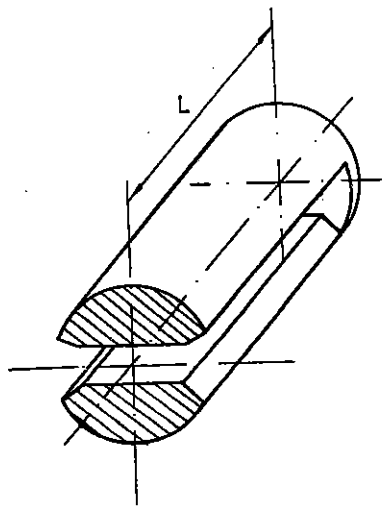


Рис.1. Профиль токонесущей части катушки магнитного поля установки СЛОН.

ловий, например, по заданному полному току, протекающему по проводнику^{/4/}. По найденной поверхностной плотности тока, используя хорошо известные формулы, можно рассчитать поля вне проводника. Результаты такого расчета обладают необходимой точностью в тех случаях, когда производится расчет магнитного поля на расстояниях от проводника, много больших глубины проникновения поля в его стенку.

В противном случае требуется знание истинного распределения плотности тока по толщине проводника. И уже совершенно необходимо иметь точную информацию о распределении полей и токов в проводнике, когда производятся расчеты джоулевых потерь и электромагнитных сил. Естественным развитием описанного метода в этом случае является постановка задачи в форме пространственного интегрального уравнения относительно плотности тока, некоторым образом распределенного по сечению проводника^{/5, 6/}:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} M(s, s') j(s') d\Sigma(s') + \ell \rho(s) j(s) = U(t),$$

где M — коэффициент взаимной индукции между двумя произвольными токовыми контурами, проходящими сквозь сечение проводника, U — напряжение источника питания, подключенного к зажимам проводника, ρ — удельное сопротивление, ℓ — длина токового контура. Для численного решения последнего уравнения сечение катушки разбивается на элементы и интегральное уравнение редуцируется к системе линейных уравнений. Число элементов разбиения, однако, не может быть очень большим, т.к. матрица системы является плотно заполненной. Поэтому при большом числе элементов разбиения (100 и больше) наряду с резким возрастанием вычислительных затрат получаемые решения становятся неустойчивыми и могут вообще утратить физический смысл.

Более эффективно для расчета поля в катушке использование уравнений в частных производных, для решения которых имеются быстродействующие и устойчивые вычислительные алгоритмы. Однако для решения уравнений в частных производных необходимо задание граничных условий, а это невозможно сделать заранее даже для проводников не очень сложной формы. Строго граничные условия задаются в бесконечно удаленных точках. Однако при этом возникает необходимость расчета поля не только в проводнике, но и в непроводящих областях, простирающихся на весьма большие расстояния от проводников, что весьма обременительно в задачах с открытой границей, например, при расчете поля в уединенных катушках.

Для расчета полоскопараллельного магнитного поля в магните установки СЛОН предлагается комбинированный метод, использующий урав-

нение в частных производных для отыскания импульсного поля внутри проводника и интегральное уравнение относительно некоторой искусственной поверхностной плотности тока, определяющей такое поле вне проводника, которое эквивалентно полю, создаваемому реальными токами, протекающими сквозь его сечение. Решения внутренней и внешней задачи сопрягаются на границе проводника по условию непрерывности магнитного потока и его нормальной производной, фактически выражающему принцип непрерывности линий магнитной индукции. В среднем по длине сечении катушки установки СЛОН поле можно считать плоскопараллельным, поскольку поперечные размеры катушки примерно в три раза меньше продольных. Вводя в рассмотрение функцию магнитного потока

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} d\Sigma$$

и принимая во внимание, что вектор плотности тока имеет лишь одну компоненту

$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right),$$

уравнение электромагнитной индукции

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int E dl + U(t)$$

(где U — напряжение источника питания катушки, $E = \rho j$, ρ — удельное сопротивление, μ_0 — магнитная постоянная) в проводящей среде можно записать в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\rho}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \mathcal{E}, \quad (2)$$

где $\mathcal{E} = U/2L$, модифицированная функция потока $\Psi = \Phi/2L$, L — продольный размер катушки.

Компоненты индукции вычисляются как

$$B_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad B_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3)$$

а плотность тока

$$j = \left(\mathcal{E} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \frac{1}{\rho}. \quad (4)$$

Интегральное уравнение относительно искусственной поверхностной плотности тока, распределенного по поверхности катушки и внешнего экрана, который считается идеально проводящим, имеет вид

$$\int_{\Gamma} i'(s') M(s, s') d\Gamma(s') = \Psi_{\Gamma}(s), \quad (5)$$

где

$$M(s, s') = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln \frac{R(x_s, y_s, x_{s'}, -y_{s'}) R(x_s, -y_s, x_{s'}, y_{s'})}{R(x_s, y_s, x_{s'}, y_{s'}) R(x_s, -y_s, x_{s'}, -y_{s'})},$$

$$R^2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

а Ψ_{Γ} — функция потока на границе проводников, равная нулю на границе внешнего экрана, не имеющего источника питания.

Для сопряжения решений внутренней и внешней задач помимо Ψ_{Γ} необходимо определить касательную компоненту индукции на границе проводников $B_{\tau} = \partial \Psi / \partial n$. Для этого следует ввести в рассмотрение еще одно интегральное соотношение, связывающее поверхностную плотность тока с касательной компонентой индукции на границе и являющееся следствием закона Био — Савара^{4/}:

$$B_{\tau}(s) = \int i'(s') K(s, s') d\Gamma(s'), \quad s, s' \in \Gamma, \quad (6)$$

где

$$K(s, s') = \frac{\mu_0}{2\pi R} \left[\frac{x(s') - x(s)}{R} \cos(\Gamma(s), \hat{x}) + \frac{y(s') - y(s)}{R} \cos(\Gamma(s), \hat{y}) \right],$$

$$R^2 = [y(s) - y(s')]^2 + [x(s') - x(s)]^2.$$

Соотношение (6) дает граничное условие для уравнения (2), которое решается на последовательности шагов по времени. Таким образом, для расчета на одном временном шаге можно определить следующий итерационный процесс перехода от момента времени t_n к моменту t_{n+1} .

1. Выбирается начальное приближение для $\Psi_{\Gamma}^{(n+1)}$, например, по вытекающей из (2) формуле:

$$\Psi_{\Gamma(k)}^{(n+1)}(s) = \Psi_{\Gamma}^{(n)}(s) + \Delta t \cdot \mathcal{E}(t_{n+1}),$$

где $k = 1$ — номер итерации, Δt — шаг по времени.

2. По вычисленному $\Psi_{\Gamma^{(k)}}^{(n+1)}(s)$ путем решения интегрального уравнения (5) находится $i_k^{(n+1)}(s)$.

3. По найденному распределению $i_k^{(n+1)}(s)$ с помощью (6) вычисляется распределение касательной компоненты индукции $V_{\tau^{(k)}}^{(n+1)}(s)$, $s \in \Gamma$.

4. Численно решается уравнение (2) с граничным условием $V_{\tau^{(k)}}^{(n+1)}|_{\Gamma}$. В результате этого решения находятся значения функции потока для всех точек сечения катушки (включая граничные), значения Ψ в которых становятся очередным приближением для $\Psi_{\Gamma}^{(n+1)}(s)$. После чего расчет возобновляется с п.2. Итерации заканчиваются при выполнении условия

$$\| \Psi_{\Gamma^{(k+1)}}^{(n+1)} - \Psi_{\Gamma^{(k)}}^{(n+1)} \| \leq \epsilon, \quad \epsilon \approx 10^{-5} \div 10^{-6}.$$

Практически при проведении расчетов с использованием разумно малых шагов по времени Δt число итераций не превосходит 3. После окончания итераций начинается расчет очередного шага по времени, начиная с п.1.

Для вычисления поля вне проводников, например, в рабочем объеме катушки, используются граничные интегралы от поверхностной плотности тока. Например, для компоненты индукции магнитного поля V_x имеем

$$V_x(x_0, 0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{i'(s') y(s') d\Gamma(s')}{y^2(s') + (x(s') - x_0)^2}.$$

Кратко рассмотрим алгоритмы решения отдельных уравнений, входящие в общую схему расчета пп.1÷4. Для численного решения уравнения (2) проводящее сечение катушки (рис.2) покрывается расчетной сеткой, граничные ребра которой образуют граничные элементы для численного решения уравнения (5) и на которых вычисляются касательные компоненты вектора индукции $V_{\tau}|_{\Gamma}$. В качестве алгоритма для решения уравнения (2) в данной работе использована абсолютно устойчивая неявная конечно-разностная схема.

Интегральные соотношения (5), (6) путем замены интегралов суммами приводятся к матричному виду и уравнение (5), таким образом, сводится к линейной системе относительно вектора значений поверхностной плотности тока на граничных элементах, которая решается методом исключения Гаусса.

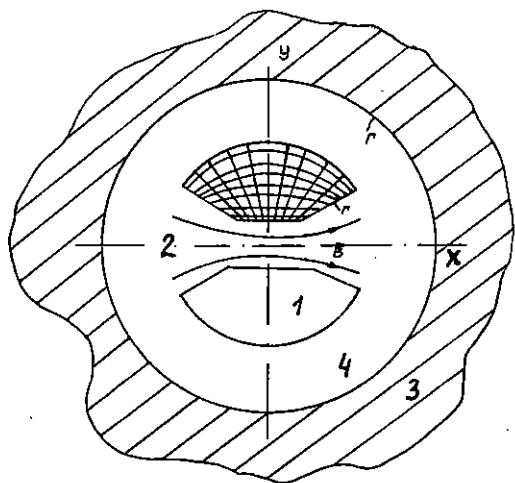


Рис.2. Сечение катушки магнитного поля установки СЛОН: 1 — токонесущие полюса с расчетной сеткой, 2 — рабочий зазор, 3 — металлический экран, 4 — изоляционный промежуток.

Следует отметить, что описанная методика расчета проникновения электромагнитного поля в проводники сложной формы легко реализуется путем соответствующей доработки уже имеющихся программ

расчета магнитного поля идеально проводящих тел методом граничных элементов.

Рассмотрим примеры расчетов. Катушка установки СЛОН через коллектор подключена к конденсаторной батарее. При этом на зажимах катушки создается импульс электрического напряжения вида

$$U(t) = U_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t.$$

Процесс проникновения поля в стенку катушки при разряде батареи конденсаторов можно рассмотреть на рис.3, где построены распределения плотности тока по сечению стальной катушки в момент $t = 80$ мкс, полученные в расчете при: $U_0 = 0,5$ кВ, $\omega = 2,09 \cdot 10^4$ с⁻¹. Реально в сильных маг-

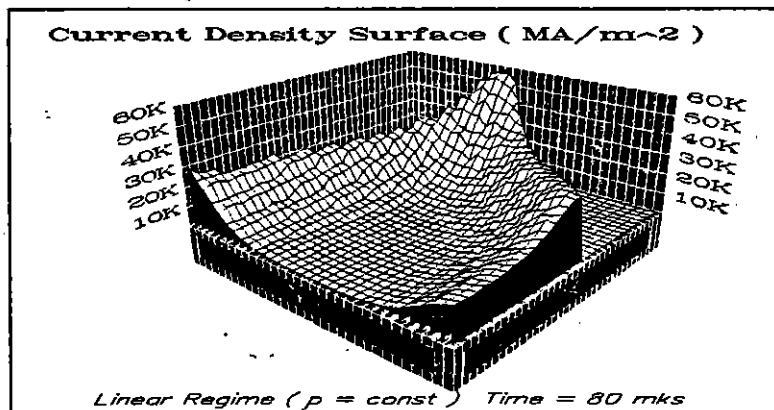


Рис.3. Распределение плотности тока по сечению полюса в линейном режиме.

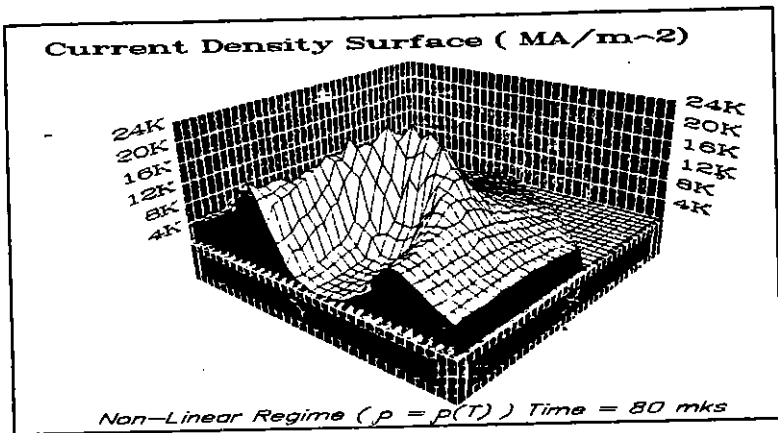


Рис.4. Распределение плотности тока по сечению полюса с учетом зависимости удельного сопротивления материала от объемного тепло- содержания.

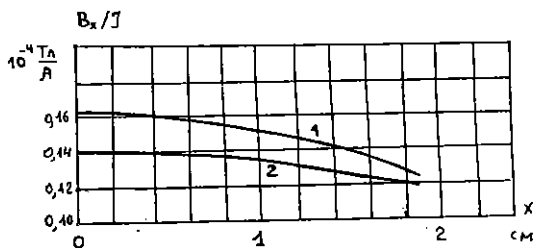
нитных полях изменение удельного сопротивления при нагреве проводника оказывает самое существенное влияние на процесс диффузии импульсного электромагнитного поля в стенку катушки. Это наглядно иллюстрирует рис.4, где построены распределения плотности тока, полученные при расчете упомянутого выше режима с учетом зависимости удельного сопротивления от объемного теплосодержания Q :

$$\rho = \rho_0(1 + \beta Q),$$

где β — тепловой коэффициент удельного сопротивления,

$$Q = \int_0^t \rho j^2 dt.$$

Рис.5. Изменение распределения индукции в рабочем зазоре вследствие нелинейной диффузии поля ($B \geq 70$ Тл) в катушку:
1. $t = 40$ мкс; 2. $t = 80$ мкс.



Влияние диффузии магнитного поля в стенку катушки на его характеристики в рабочем объеме иллюстрируют кривые распределения индукции $B_0(0, x)$ на оси симметрии $y=0$ (рис.5), построенные для различных моментов времени. Из кривых на рис.5 видно, что переход тока в процессе диффузии в глубину проводника приводит к уменьшению степени однородности поля в рабочем объеме. Поэтому выбор конфигурации катушек для получения сильного магнитного поля с высокой однородностью следует проводить с учетом нестационарного процесса диффузии поля, при котором относительные токораспределения в начале и в конце импульса могут заметно различаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дашук П.Н. и др. — Техника больших импульсных токов и магнитных полей. М.: Атомиздат, 1970.
2. Монтгомери Д. Получение сильных импульсных магнитных полей с помощью соленоидов. — М.: Мир, 1971.
3. Аверичев С.А. и др. — ОИЯИ, Р1-89-649, Дубна, 1989.
4. Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. — Л.: Энергоиздат, 1981.
5. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численные расчеты электромагнитных полей. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
6. Бондалетов В.Н., Гусаров А.А., Балтаханов А.М. — Электричество, 1982, № 7, с.41-46.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 февраля 1991 года.