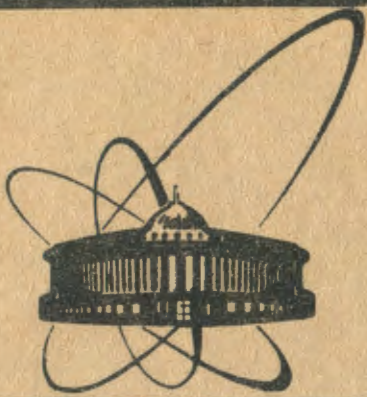


89-151

8



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

K663

P1-89-151

А. Корейво

ГРАДИЕНТНЫЙ ПОИСК
ПАРАМЕТРОВ ПРЯМЫХ ТРЕКОВ

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе Ю.А.Яцуненко¹¹ отмечались сложности в аналитической формулировке задачи реконструкции многотрековых событий, основанной на минимизации χ^2 .

Кроме того, даже для одотрекового события минимизация χ^2 может приводить к довольно значительным искажениям параметров траектории, если одна из измеренных координат является "далеко отстоящей" от прямой, вблизи которой лежат остальные точки. Причины возникновения таких искажений координат могут быть различными (неточность юстировки детектора, шумовой отсчет и т.п.). Таким образом, в общем случае необходимо предусматривать довольно громоздкую процедуру отбраковки¹².

Для реконструкции треков в работе¹¹ была предложена функция параметров траектории; в частности, для прямых треков на плоскости XZ (детекторы расположены по оси Z) эту функцию представляет формула:

$$R(A, B) = \sum_{n=1}^N [\sigma_n * G(A * z_n + B - a_n; \sigma_n)], \quad (1)$$

где A, B — параметры трека $x = A * z + B$; N — число детекторов; n — номер детектора; σ — размер кластера; $G(x - a, \sigma)$ — функция точности детектора:

$$G(x - a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * e^{-[(x - a)^2 / 2\sigma^2]},$$

a — измеренная координата. Функция $R(A, B)$ имеет в пространстве параметров A, B главный максимум, если измеренные детекторами координаты a_n образуют прямую линию $a_n = A * z_n + B$.

Функция (1) приближенно включает в себя χ^2 ¹¹, стр.41 для треков, близких к идеальным (т.е. таких, где $|x(z_n) - a_n| \ll \sigma_n$), но в упомянутом случае "далеко отстоящей" точки можно ожидать, что кроме главного максимума функция имеет локальные максимумы (меньшие, чем основной).

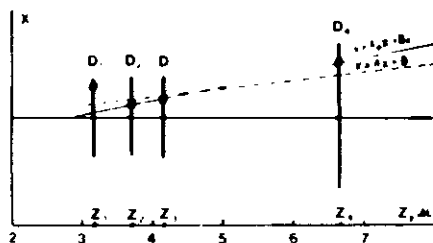


Рис. 1. Расположение координатных детекторов ($D_1 \div D_4$).

Задача данной публикации заключается в разработке численного метода поиска максимума функции (1) и сравнении получаемых параметров траектории с результатами применения традиционной минимизации χ^2 . Для этой цели анализировалось простое однострековое событие в геометрии установки "Аномалон" (рис. 1).

2. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ПОИСКА МАКСИМУМА

При выборе метода поиска максимума и создании усовершенствованных версий учитывались особенности анализируемой функции (1) и методики проведения расчетов на ЭВМ. Из большого числа методов поиска был выбран градиентный метод, называемый методом скорейшего спуска [3 - 5]. Суть его такова: исходя из некоторой начальной точки, можно совершить движение в направлении вектора градиента. Различные версии метода отличаются в основном способами вычисления оптимального шага итерации и корректировки направления.

Разработанная версия использует расчет шага итерации в виде функции первых и вторых производных анализируемой функции. Поиск максимума проводится путем сведения многомерной задачи к одномерной. Направление поиска определяют координаты вектора градиента, оптимальный шаг λ_0 вычисляется в параболическом приближении (т.е. задача приведена к поиску максимума функции одной переменной $F(\lambda)$, которая является "разрезом" функции $R(a, \beta)$ в направлении градиента; предполагается, что $F(\lambda)$ — полином второй степени):

$$|\lambda_0| = \frac{f'_p}{f''_p}, \quad (2)$$

где f'_p, f''_p — производные функции R в направлении градиента.

Представив производные в направлении градиента с помощью производных по координатам a и β (a, β соответствуют, например, A, B), можно вычислить значение шага поиска по формуле:

$$|\lambda_0| = \frac{(f'_\alpha{}^2 + f'_\beta{}^2)^{3/2}}{f''_{\alpha\alpha} f''_{\alpha\alpha} + 2f'_\alpha f'_\beta f''_{\alpha\beta} + f''_{\beta\beta} f''_{\beta\beta}} \quad (3)$$

Параболическое приближение справедливо лишь для $|A * z + B - a| \ll \sigma$. Чтобы расширить область его действия, в частности, устранить тенденцию "перескакивания" за максимум (характерную для анализируемой экспоненциальной функции типа функции R и увеличивающуюся с возрастанием абсолютного значения показателя экспоненты), были приняты следующие меры:

1) шаг умножался на эмпирически подобранный коэффициент $CF = 0,8$;

2) максимальные значения составляющих $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ вектора $\vec{\lambda}$ не превышали значений, создающих сдвиг точки пересечения прямой с любым детектором больше, чем на σ_{\min} , где σ_{\min} — минимальное значение σ по всем экспериментальным точкам;

3) если уменьшалась одна из составляющих вектора $\vec{\lambda}$, то вторая уменьшалась во столько же раз, чтобы направление вектора $\vec{\lambda}$ осталось совпадающим с направлением градиента.

Завершение итерации происходит при выполнении нескольких условий:

1) сумма абсолютных значений составляющих вектора $\vec{\lambda}$ в двух последних итерациях (отдельно для λ_α и λ_β) должна быть значительно меньше (50 ÷ 100 раз) значения, вызывающего сдвиг любой точки на $\Delta x = \sigma_{\min}$; учитывались две последние итерации, так как возможна ситуация, когда чередуются итерации с большим и малым шагом;

$$2) f''_{\alpha\alpha} < 0 \text{ (или } f''_{\beta\beta} < 0) \text{ и } \begin{vmatrix} f''_{\alpha\alpha} & f''_{\alpha\beta} \\ f''_{\beta\alpha} & f''_{\beta\beta} \end{vmatrix} < 0.$$

Не проверялись отдельно значения первых производных, так как первое из вышеуказанных условий содержит этот критерий.

Описываемый метод можно расширить на произвольное число переменных.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА В РАСЧЕТЕ ПАРАМЕТРОВ ТРЕКА

В анализируемых событиях три точки были расположены точно на прямой, заданной уравнением $x = A_0 * z + B_0$ (где $A_0 = 0, B_0 = 0$), четвертая (в первом детекторе) смещена относительно этой прямой на $\Delta x = (0 \div 10) * \sigma$; все значения σ были одинаковы.

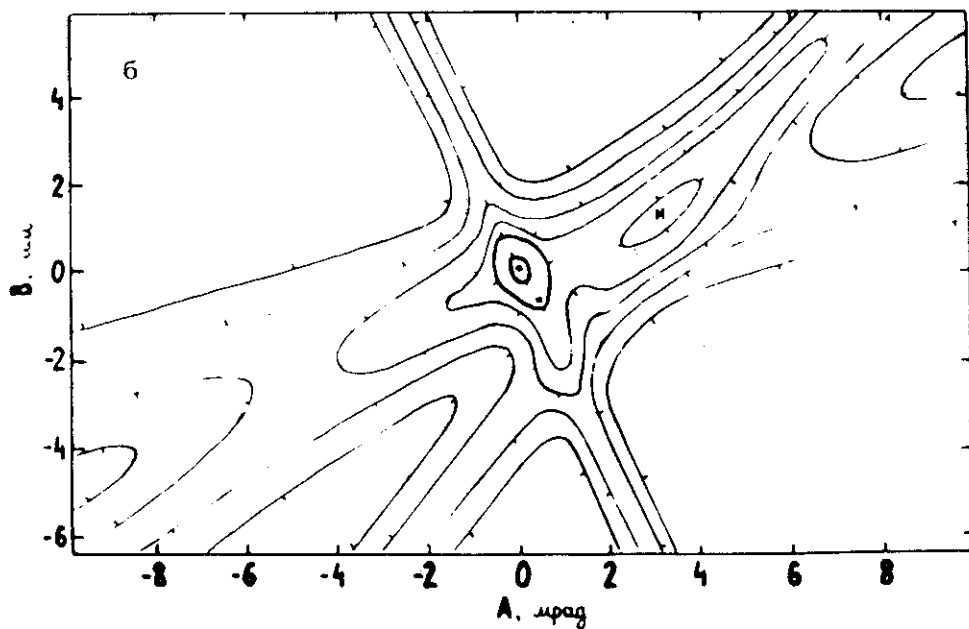
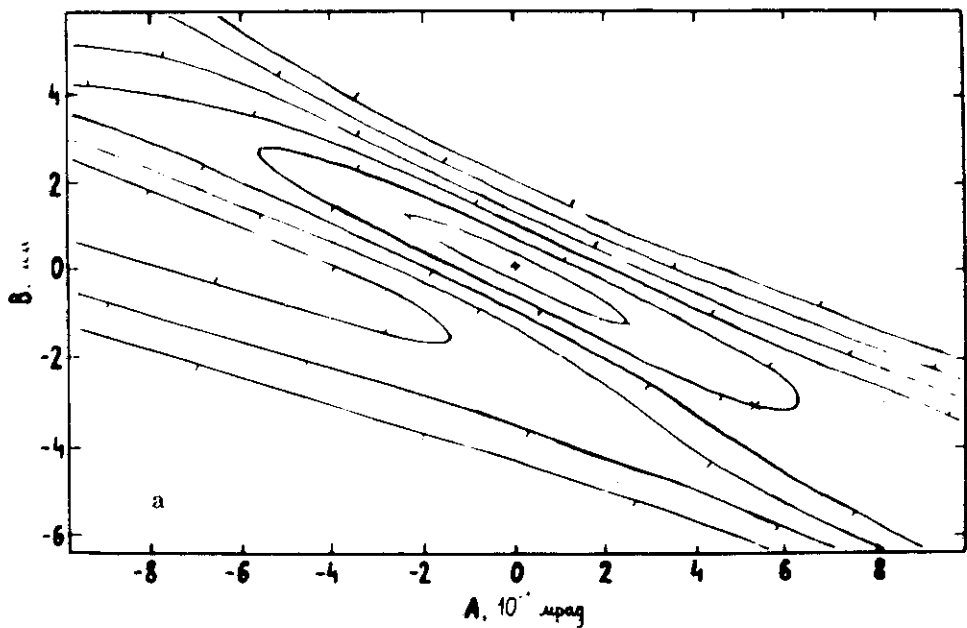


Рис. 2. Линии уровня функции R : x – начальная точка итерации, $+$ – главный максимум, m – локальный максимум.

Анализируемая функция (1) имеет в окрестности максимума форму длинного узкого "хребта" (рис. 2а); в таком случае градиентный поиск максимума происходит довольно медленно. Для устранения этого недостатка были испытаны две группы методов:

1) создан вариант градиентного поиска максимума, быстро работающий вблизи длинных узких максимумов;

2) система координат подобрана таким образом, чтобы линии уровня функции R вблизи максимума получили приблизительно форму эллипсов с соотношением полуосей, близким к единице.

Методы первой группы аналогичны известным в литературе методам оврагов. Они основаны на корректировке направления и значения шага итерации предыдущими шагами (на практике достаточно учитывать один или два предыдущих шага). Проверка многих модификаций градиентного метода (больше 100) показала, что в данной задаче более эффективны средства второй группы. Среди них успешно оправдались:

1) сдвиг центра системы координат в "центр тяжести" детекторов (рис. 2б);

2) переход к системе координат (x_1, x_n) , где x_1, x_n — координаты точек на прямой $x = A * z + B$ соответственно в первом и последнем детекторах:

$$R(x_1, x_N) = \sum_{n=1}^N \left\{ \sigma_n * G \left[\frac{(x_1 - x_N) * z_n + x_N * z_1 - x_1 * z_N}{z_1 - z_N} - a_n; \sigma_n \right] \right\}. \quad (4)$$

В этом случае после нахождения максимума проводился обратный переход к переменным A, B. Возможен и другой путь — например, поворот и "сжатие" системы координат.

Практически в поиске максимума был использован градиентный метод, описанный во 2 главе, с вышеуказанными вариантами системы координат. Результаты, полученные в обеих версиях, оказались почти одинаковыми как по значениям вычисляемых параметров, так и по времени обработки информации.

Для сравнения методов: градиентного и χ^2 , вычислялись значения

$$|A_f - A_0|, |B_f - B_0|, r = \sqrt{[c * (A_f - A_0)]^2 + (B_f - B_0)^2},$$

где A_0, B_0 — заданные параметры траектории; A_f, B_f — расчетные параметры траектории; c — фактор, обеспечивающий одинаковое влияние отклонений параметров A и B на смещение расчетных точек от заданной траектории.

Результаты, полученные двумя методами (χ^2 и градиентным), показаны на рис. 3 как функция отклонения Δx одной из эксперимен-

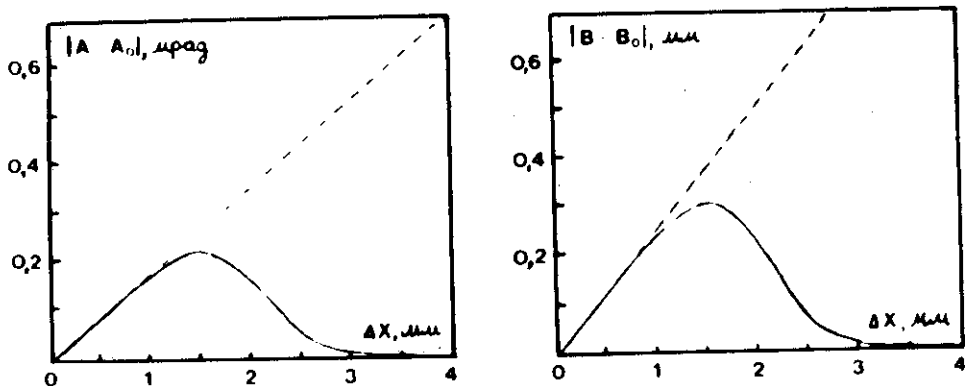


Рис. 3. Отклонение параметров A и B от заданных значений в функции смещения экспериментальной точки; сплошная линия – градиентный метод; пунктир – метод χ^2 .

тальной точек от прямой $x = A_0 * z + B_0$. Такую же форму, как $|A_f - A_0|$ или $|B_f - B_0|$, имеет (не показанная на рисунке) функция $r(\Delta x)$...

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ, ВЫВОДЫ

Градиентный метод поиска обладает свойством корректировки параметров трека в случае значительного отклонения одной точки от прямой линии (рис. 3). Для небольших смещений результаты, получаемые по методам χ^2 и градиентному, практически одинаковы. При больших смещениях разность вычисленных параметров треков и "настоящих" (заданных) значений этих параметров в методе χ^2 растет линейно в функции смещения точки; чтобы избежать значительного искажения параметров траектории, необходимо ввести дополнительный отбор точек. Корректирующие свойства градиентного метода позволяют отказаться от процедуры отбраковки.

Скорость обработки трековой информации градиентным методом в $3 \div 4$ раза меньше, чем по методу χ^2 . Надо заметить, что здесь применялся метод χ^2 без отбраковки (ее включение должно дать более качественные результаты, но требует дополнительных затрат машинного времени). При этом кажется целесообразным оптимизировать метод поиска максимумов. Окончательные выводы можно будет получить, исследуя реальные события в трехмерном пространстве.

В заключение автор выражает благодарность Ю.А.Яцуенко за постановку задачи, полезные обсуждения и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яцуенко Ю.А. – ОИЯИ, Р1-88-29, Дубна, 1988.
2. Ососков Г.А. – ОИЯИ, Р10-83-187, Дубна, 1983.
3. Бут Э.Д. – Численные методы. М.: Гос. издательство физико-математической литературы, 1959.
4. Бахвалов Н.С. – Численные методы. М.: Наука, 1973.
5. Васильев Ф.П. – Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 марта 1989 года.