

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

Д 16

P1-88-312

**Ц.Дамдинсурэн, П.Козма, В.Б.Злоказов**

**ПРИМЕНЕНИЕ РОБАСТНОЙ ПОДГОНКИ  
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОБАРИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ  
ОСТАТОЧНЫХ ЯДЕР  
В РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ**

**1988**

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие частиц (ядер) высоких энергий с тяжелыми ядрами дает целый ряд остаточных ядер, продуктов фрагментации и деления. Большое количество фрагментов образует хорошую статистическую основу для определения их зарядовой дисперсии и массового распределения.

Ввиду сложности процессов ядерной физики высоких энергий (таких, как предельная фрагментация, факторизация и т.д.) желателен теоретический анализ массовых распределений. Более того, сами модели взаимодействий при релятивистских энергиях также можно сопоставлять, изучая зависимости изобарических сечений образовавшихся остаточных ядер от массового числа. Следовательно, необходимо корректное определение зарядовых и массовых распределений остаточных ядер, измеряемых в спектроскопических (радиохимических) экспериментах<sup>1/</sup>.

Определение "активационных" сечений связано с поправками на образование "вторичных" продуктов<sup>2/</sup> и с учетом  $\beta$ -распада в соответствующих цепочках изотопов<sup>3/</sup>. Обычно для подгонки полученных таким образом сечений используются метод наименьших квадратов и предположение о гауссовской форме зарядовой дисперсии<sup>4/</sup>.

В настоящей работе представлены результаты применения метода робастной подгонки<sup>5/</sup> для определения зарядовой дисперсии и массовых распределений радионуклидов, образующихся во взаимодействиях  $p + {}^{197}\text{Au}$  и  ${}^{12}\text{C} + {}^{197}\text{Au}$  при энергии 3,65 ГэВ/нуклон.

## 2. РОБАСТНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Переход к процедурам робастной (помехоустойчивой) подгонки экспериментальных данных параметрическими кривыми проводился в тех случаях, когда метод наименьших квадратов не может дать приемлемой точности. Требование совместности методов наименьших квадратов и робастной минимизации было основным к программе ROLSM<sup>6/</sup>. При обработке "нормальных" данных действует подгонка в смысле квадратичной метрики, а при обработке "засоренных" данных автоматически включается помехоустойчивая подгонка. При этом выполняется совместность критериев и проверки качества, минимизации, оценки ошибок параметров и т.д.

Экспериментальные сечения  $\sigma(A, Z)$  нуклидов, образовавшихся во взаимодействии релятивистских частиц (ядер) с тяжелыми ядрами, выражаются<sup>/4/</sup> посредством параметризации

$$\sigma(A, Z) = \sigma(A) [2\pi C_z^2(A)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(Z - Z_p(A))^2}{2C_z^2(A)}\right], \quad (1)$$

в которой  $\sigma(A)$  обозначает изобарические сечения,  $C_z(A)$  является параметром ширины зарядового распределения для массового числа  $A$ , и  $Z_p(A)$  представляет собой наиболее вероятное зарядовое число для данного  $A$ .

В небольшом диапазоне масс параметр ширины может быть принят не зависящим от  $A$ , и центр  $Z_p(A)$  зарядового распределения представляется в виде суммы

$$Z_p(A) = \sum_{n=1}^k a_n A^n. \quad (2)$$

Используя это, а также предположение о том, что  $\sigma(A)$  как функция массового числа изменяется медленно и плавно, можем получить измеренные сечения подгонки в "узком" диапазоне массовых чисел.

При подгонке данных по формуле (1) приходится считаться не только с наличием выбросов, но и с неблагоприятными факторами, вызванными неполной адекватностью данных формуле (1), а также с плохой обусловленностью МНК-матрицы. Эти неблагоприятные факторы учтены алгоритмом программы ROLSM. При ее создании использован имевшийся опыт помехоустойчивой подгонки функций плотностей распределений.

Механическое перенесение этих методов на случай регрессий, в частности распределений, регистрируемых в физических экспериментах, как показывают тестовые испытания, себя не оправдывает. Предпочтение было отдано не формальному подходу к подавлению выбросов (такому, как использование метрики Хьюбера и т.д.), а содержательному. Его идея состоит в следующем. Мы можем рассматривать выбросы и неадекватности как обычные погрешности, но с нормой, существенно большей, чем та, которая вычисляется на основе обычного предположения о пуассоновском характере значений экспериментальных распределений.

Если имеется априорная информация об искомым параметрах (хотя бы приближительная), мы можем оценить величину норм этих "больших" ошибок и использовать их при формировании весов в МНК-процедуре. Далее эта процедура осуществляется, как обычно. Можно показать<sup>/7/</sup>, что при выполнении некоторых весьма реалистических предположений получаемые оценки искомым параметров обладают всеми замечательными свойствами МНК-оценок.

Формально примененный образ действий описывается так. Пусть измерение дает распределение  $Y(x)$ , определенное на некотором дискретном множестве  $x$  с погрешностью  $e(x)$ , причем модель  $Y(x)$  является выражением  $f(x, p)$ , зависящее от параметров  $p$ , и пусть задан вектор  $P_0$  — вектор априорных оценок (помехоустойчивых) параметров  $p$ .

Тогда МНК-оценки получаются минимизацией выражения

$$W(x, p_0) [y(x) - f(x, p)]^2, \quad (3)$$

где

$$W(x, p_0) = \begin{cases} 1 / \|e(x)\|^2, & \text{если } |h(x)| < c; \\ (1 + \beta) / [\|e(x)\|^2 \cdot (\frac{h(x)}{c})^2 + \beta], & \text{иначе} \end{cases}$$

иначе  $h(x) = y(x) - f(x, p_0)$ ,  $c$  и  $\beta$  — заданные константы.

Пересчет весов можно вести и с учетом прочих априорных сведений о решении.

Минимизация (3) дает  $f(x, p^*)$  — оценку  $f(x, p)$ . Для нелинейного случая, как обычно, строится итерационная процедура. Преимущество итерационного процесса в том, что можно считать априорной оценкой параметров на предыдущей итерации и уточнять ее в процессе подгонки.

Негативное влияние плохой обусловленности преодолевается следующим образом. Диагональные элементы МНК-матрицы умножаются на величину  $(1 + \alpha)$ , где  $\alpha$  — демпфирующий фактор. Применение демпфирования ведет к тому, что процесс минимизации из гаусс-ньютоновского превращается в промежуточный между гаусс-ньютоновским и градиентным, со всеми достоинствами и недостатками последнего. Для преодоления этих недостатков в алгоритме программы ROLSM предусмотрено более гибкое маневрирование величиной шага в итерациях, в частности его систематическое уменьшение по сравнению со стандартным.

Сходимость демпфированного процесса более устойчивая, но требующая меньших шагов, и, следовательно, более медленная.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Сечение остаточных ядер, образовавшихся в реакциях, вызванных протонами и ядрами  $^{12}\text{C}$  с энергией 3,65 ГэВ/нуклон на ядре  $^{197}\text{Au}$ , приведены в табл. 1. Экспериментальные данные разбили на шесть групп по массовым числам, чтобы можно было успешно подогнать их параметрическими формулами (1) и (2).

Группы нуклидов, образующихся при фрагментации золота релятивистскими протонами и ядрами углерода с полученными параметрами подгонки по программе ROLSM<sup>/7/</sup> и соответствующими значениями  $X_{\gamma}^2$  для степени свободы приведены в табл. 2 и 3 соответственно.

Таблица 1

Значения сечений нуклидов, образующихся при фрагментации  
золота протонами  $\sigma_p$  и ядрами углерода  $\sigma_{^{12}C}$   
с энергией 3,65 ГэВ/нуклон

Нуклид	$\sigma_p$ , мб	$\sigma_{^{12}C}$ , мб
NA - 24	9.8 + / - 0.9	45.5 + / - 8.7
MG - 28	2.9 + / - 0.3	13.9 + / - 3.6
SC - 46	6.3 + / - 1.1	19.0 + / - 2.7
SC - 48	0.9 + / - 0.1	2.2 ± / - 0.4
V - 48		3.4 + / - 0.5
MN - 54	3.9 + / - 0.5	14.2 + / - 2.4
FE - 59	2.1 + / - 0.3	
ZN - 65	4.0 + / - 0.6	8.5 + / - 1.8
AS - 74	2.5 + / - 0.3	6.0 + / - 1.1
SE - 75	3.9 + / - 0.7	7.8 + / - 1.2
KB - 83	7.1 + / - 1.0	12.7 + / - 1.9
KB - 84	1.6 + / - 0.4	
Y - 87	7.1 + / - 0.9	16.8 + / - 2.4
NB - 90	3.1 + / - 0.3	8.5 + / - 1.3
TC - 95	3.8 + / - 0.9	10.0 + / - 1.7
TC - 96	2.3 + / - 0.4	6.6 + / - 1.1
KH - 100		13.5 + / - 2.9
TE - 121	6.6 + / - 0.8	8.1 + / - 1.0
XE - 122	7.3 + / - 0.7	16.4 + / - 2.3

Продолжение таблицы 1

Нуклид	$\sigma_p$ , мб	$\sigma_{^{12}C}$ , мб
XE - 127	7.9 + / - 0.8	14.0 + / - 2.4
BA - 131	9.0 + / - 0.8	18.5 + / - 3.3
BA - 133	8.4 + / - 1.1	19.1 + / - 2.8
EU - 145	13.6 + / - 2.1	20.1 + / - 3.8
GD - 146	11.5 + / - 1.5	21.1 + / - 4.0
GD - 149	14.9 + / - 2.0	28.6 + / - 4.5
IB - 151	7.0 + / - 3.1	15.2 + / - 7.2
DY - 155	4.4 + / - 0.4	9.9 + / - 2.1
YB - 169	13.9 + / - 2.8	15.8 + / - 4.2
LU - 170	19.0 + / - 2.5	
HF - 170	14.8 + / - 2.4	42.0 + / - 7.0
LU - 171	17.0 + / - 1.6	35.0 + / - 6.0
HF - 173		33.0 + / - 7.0
HF - 175	17.9 + / - 2.3	37.0 + / - 8.0
KE - 183	21.0 + / - 2.9	55.0 + / - 10.0
IR - 190		48.0 + / - 9.0
AU - 194		66.0 + / - 13.0
AU - 198		190.0 + / - 25.0

Отметим, что для подгонки экспериментальных сечений  $\sigma(A, Z)$  применена простейшая линейная форма зависимости наиболее вероятного заряда  $Z_p(A)$  и использовано предположение о том, что в узком диапазоне массовых чисел ширина зарядового распределения  $S_z$  остается постоянной. Как показали следующие подгонки эксперименталь-

Таблица 2  
 Параметры зарядовых распределений  $P + {}^{197}\text{Au}$

Массовый диапазон	$C_z$	$Z_p$	$\chi^2_y$
1. 24 - 48	0.76	$-0.078 + 0.474 A$	0.7
2. 54 - 75	0.78	$0.509 + 0.448 A$	0.5
3. 83 - 96	0.57	$5.560 + 0.385 A$	0.4
4. 121 - 133	1.20	$-3.709 + 0.452 A$	0.7
5. 145 - 155	0.86	$-4.486 + 0.466 A$	0.7
6. 169 - 183	1.14	$-0.734 + 0.437 A$	1.2

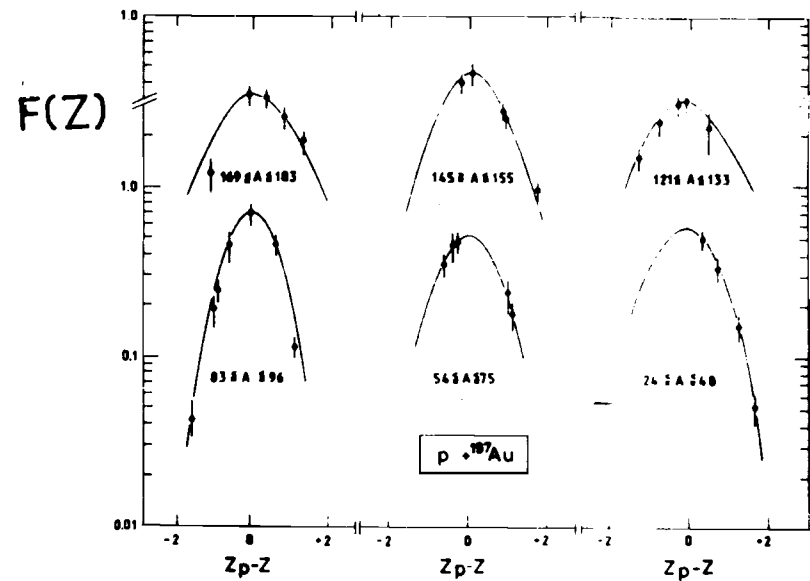


Рис. 1. Кривые зарядового распределения остаточных ядер, образующихся во взаимодействии  $P + {}^{197}\text{Au}$  при энергии 3,65 ГэВ/нуклон.

Таблица 3  
 Параметры зарядовых распределений  ${}^{12}\text{C} + {}^{197}\text{Au}$

Массовый диапазон	$C_z$	$Z_p$	$\chi^2_y$
1. 24 - 48	0.80	$1.114 + 0.434 A$	0.8
2. 54 - 75	0.75	$2.050 + 0.423 A$	1.1
3. 83 - 100	1.05	$2.147 + 0.428 A$	0.6
4. 121 - 133	0.97	$-4.768 + 0.459 A$	0.8
5. 145 - 155	1.16	$-1.778 + 0.446 A$	1.5
6. 169 - 198	1.14	$-1.873 + 0.420 A$	0.8

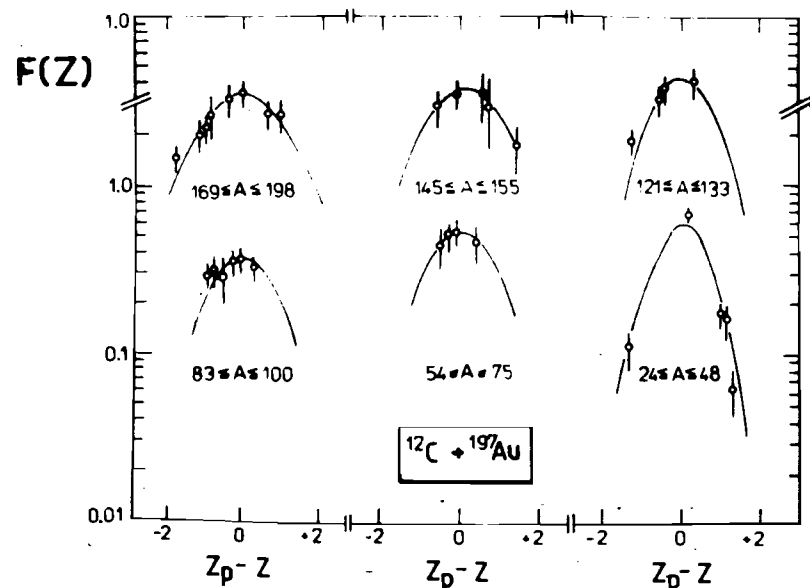


Рис. 2. Кривые зарядового распределения остаточных ядер, образующихся во взаимодействии  ${}^{12}\text{C} + {}^{197}\text{Au}$  при энергии 3,65 ГэВ/нуклон.

#### 4. ВЫВОДЫ

Робастная подгонка экспериментальных сечений радионуклидов, образующихся во взаимодействиях  $P + {}^{197}\text{Au}$  и  ${}^{12}\text{C} + {}^{197}\text{Au}$  при энергии 3,65 ГэВ/нуклон, использована для определения их зарядовых дисперсий и массовых распределений.

Результаты подгонки свидетельствуют, что применением метода помехоустойчивости подгонки экспериментальных сечений соответствующими параметрическими кривыми в узком диапазоне массовых чисел можно определить изобарические сечения с достаточно хорошей точностью для дальнейшего теоретического анализа.

Авторы благодарны А.М.Балдину за интерес к работе и поддержку, К.Д.Толстому и Д.Чултэму за полезные обсуждения и помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gunning J.B. — *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 1963, 13, p.261.
2. English G., Yu Y.W., Porile N.T. — *Phys. Rev.*, 1974, C10, p.2281.
3. Дамдинсүрен Ц. и др. Сообщение ОИЯИ P1-88-135, Дубна, 1988.
4. Mcgaughey P.L. et al. — *Phys. Rev.*, 1985, C31, p.896.
5. Хьюбер П.Дж. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.
6. Злоказов В.Б. Сообщение ОИЯИ 13-87-371, Дубна, 1987.

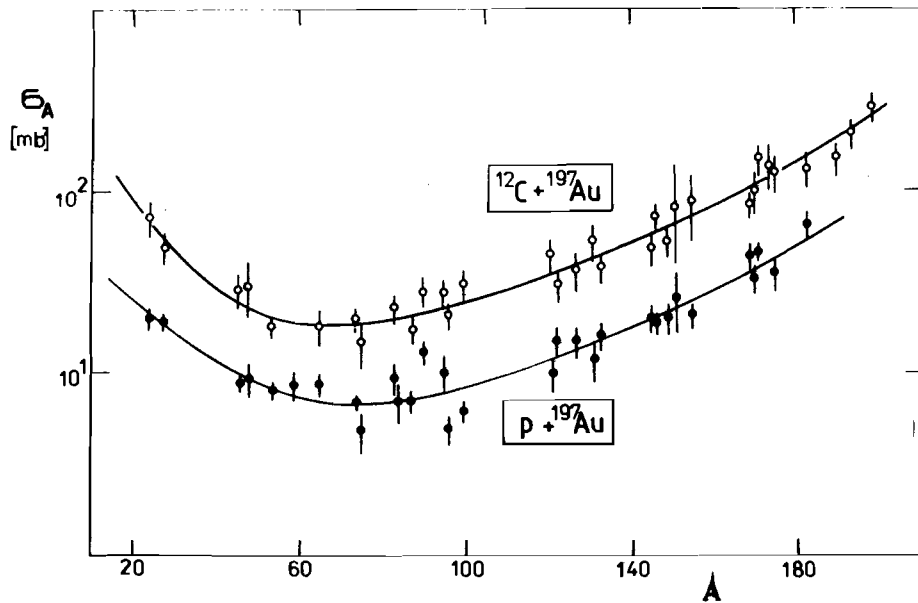


Рис. 3. Массовые распределения нуклидов  $\sigma_A$ , образующихся во взаимодействиях  ${}^{197}\text{Au}(P, X)$  и  ${}^{197}\text{Au}({}^{12}\text{C}, X)$  при энергии 3,65 ГэВ/нуклон.

ных данных, увеличение степени суммы (2) не дает существенного изменения значения  $\chi^2_\nu$  и, следовательно, точности подгонки.

Полученные кривые зарядового распределения остаточных ядер во взаимодействии  $P + {}^{197}\text{Au}$  и  ${}^{12}\text{C} + {}^{197}\text{Au}$  при энергии 3,65 ГэВ/нуклон, представлены на рис. 1 и 2 соответственно, где, как обычно, вычисленные сечения изотопического образования

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_z^2} \exp \left[ -\frac{(Z - Z_p)^2}{2C_z^2} \right]$$

являются функциями  $Z_p - Z$ . Можно видеть, что во всех группах зарядовые распределения нуклидов, образующихся в обеих реакциях, хорошо описываются гауссовыми кривыми с достаточно высокой точностью (смотри значения  $\chi^2_\nu$  в табл. 2 и 3).

На основе кривых зарядовых дисперсий получены массовые распределения нуклидов  $\sigma(A)$  образующихся во взаимодействиях  ${}^{197}\text{Au}(P, X)$  и  ${}^{197}\text{Au}({}^{12}\text{C}, X)$  при энергии 3,65 ГэВ/нуклон. Они показаны вместе на рис. 3, где величины  $\sigma(A)$  представлены как функции массового числа  $A$  образующихся ядер-остатков.

Рукопись поступила в издательский отдел  
7 мая 1988 года.