

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P1-88-29

**Ю.А.Яцуненко**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРШИН РЕАКЦИЙ  
В КООРДИНАТНЫХ ДЕТЕКТОРАХ**

Направлено в журнал "Nuclear Instruments and Methods"

**1988**

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Восстановление многотрековой картины по информации с детекторов: определение параметров траекторий, нахождение координат взаимодействия частиц или координат вершин распада нейтральных частиц является одной из сложных задач экспериментальной физики <sup>/1,4/</sup>.

При определении параметров траекторий наиболее традиционный путь решения заключается в переборе всего массива измеренных координат  $a_{mn}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$  — номера детекторов в направлении по пучку оси  $Z$ ;  $m = 1, 2, \dots, M_n$  — индекс множественности на каждом  $n$ ) по минимальному значению некоторого критерия: логарифмической функции правдоподобия <sup>/3/</sup>, или, в частности,  $\chi^2/4/$ . Число таких переборов (если не рассматривать возможности упрощения, зачастую частного характера) может быть достаточно велико  $\sim M^N$ .

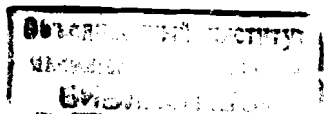
Кроме того, аналитическая формулировка задачи в этих критериях не дает ясного конструктивного подхода для группировки точек по трекам <sup>/3/</sup>, хотя хорошо разработанная техника анализа  $\chi^2/6/$  завораживает — в большинстве случаев минимизация  $\chi^2$  по искомым переменным приводит к системам линейных уравнений.

Нахождение вершин реакций или распадов подразумевает предварительное определение параметров траекторий. Дальнейшее уточнение координат вершины основывается на критерии, аналогичном  $\chi^2$ , как, например, в работе <sup>/5/</sup>, где предложенная конструкция, наделяемая свойствами  $\chi^2$ -распределения, с формальной точки зрения может, однако, принимать отрицательные значения.

Значительные интеллектуальные усилия, уделяемые многотрековой реконструкции, и возникающие при этом сложности обусловлены отсутствием достаточно общей формализованной модели трековых изображений, — подчеркивают авторы работы <sup>/3/</sup>, и отмечают далее, что человек — наблюдатель, вне зависимости от знания физической стороны эксперимента, обычно различает все треки и прослеживает их в шумах и взаимных пересечениях.

## 2. МОДЕЛЬ — ИНТЕГРАЛ ПО ТРАЕКТОРИИ

Последнее утверждение оставляет место для оптимизма в попытках сконструировать математическую модель многотрекового события. Разглядывая многотрековую картину (рис. 1), мы рассуждает приблизительно так:



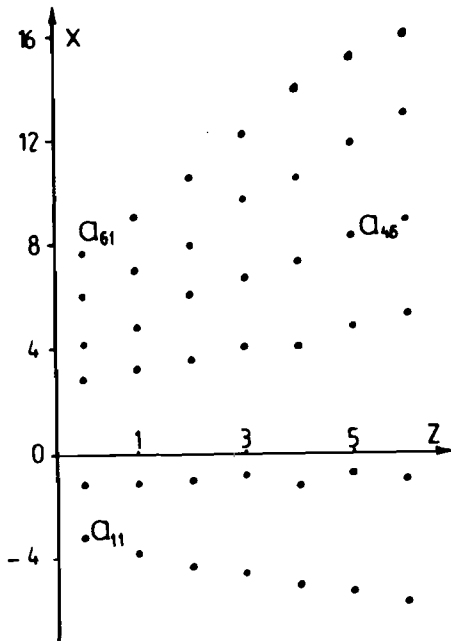


Рис. 1. Изображение на плоскости координат 6 прямых треков. Каждый отсчет ( $a_{mn}$ ) разыгрывался случайным образом по распределению (1а) с  $\sigma^2 = 1/12$ .

Из этой (опорной, например,  $a_{11}$ ) точки можно провести много траекторий, но вот одна из них не очень похожа на прямую (или кривую, если нам сказали, что детекторы помещены в магнитное поле), другая — очень прямая, но на ней мало точек, а вот эта и есть трек, и достаточно прямая, и точек на нее ложится много.

Этим рассуждениям (конечно, не претендующим на общность) можно поставить в соответствие утверждение: мы находим нужную траекторию  $x = \phi(z)$  среди множества отсчетов, анализируя на максимум значение интеграла  $J(\phi)$

вдоль воображаемой траектории от функции  $F(x, z)$ , характеризующей вероятность совпадения траектории с одной из измеренных координат. Эта функция  $F(x, z)$  должна носить альтернативный характер. Из всех измеренных детектором (расположенным в точке  $z_n$ ) координат  $a_{mn}$  мы выбираем лишь одну, сообразуясь с точностью измерения  $\sigma_{mn}$  и с характерной для данного детектора функцией плотности вероятности  $G(x-a; \sigma)$ , например: гауссовой

$$G(x-a; \sigma) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \quad (1)$$

или дискретной

$$G(x-a; \sigma) = \begin{cases} 0, & |x-a| > \sigma \\ (2\sigma)^{-1}, & |x-a| \leq \sigma. \end{cases} \quad (1a)$$

Таким образом, можно сконструировать функцию:

$$F(x, z_n) = M_n^{-1} \sum_{m=1}^{M_n} G(x-a_{mn}; \sigma_{mn}). \quad (2)$$

Вместо предложенного интеграла по траектории  $J(\phi)$  следует рассматривать  $r(\phi)$  — плотность  $J(\phi)$  по отношению к полной длине траектории, чтобы избежать больших значений  $J(\phi)$  только из-за крутизны  $\phi(z)$ . Переходя к дискретно по оси  $Z$  расположенным детекторам, заменяем интеграл суммой и получаем функцию от параметров траекторий, включающую в себя все измеренные точки:

$$r(\phi) = \frac{\sum_{n=1}^N \sqrt{1 + \dot{\phi}^2(z_n)} F[\phi(z_n), z_n]}{\sum_{n=1}^N \sqrt{1 + \dot{\phi}^2(z_n)}}. \quad (3)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для пространственной траектории  $\phi\{z; \phi_x(z); \phi_y(z)\}$

$$r(\vec{\phi}) = \frac{\sum_{n=1}^N \Delta l[\vec{\phi}(z_n)] \cdot F[\vec{\phi}(z_n), z_n]}{\sum_{n=1}^N \Delta l[\vec{\phi}(z_n)]}, \quad (4)$$

где

$$[\Delta l(\vec{\phi})]^2 = 1 + \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial z}\right)^2.$$

В дальнейшем для большей наглядности и простоты будем рассматривать случай с одинаковыми для всех  $a_{mn}$  ошибок измерений  $\sigma$  и множественностями  $M_n$  (в принципе, мы можем предполагать, что через одну из точек  $a_{mn}$  проходит несколько траекторий, и поэтому формально можно продублировать эту точку несколько раз, так, чтобы на всех детекторах  $M_n = \max(M_1, \dots, M_N) = M$ ). В качестве анализируемой функции примем

$$R(\phi) = \sigma \cdot N \cdot M \cdot r(\phi). \quad (4a)$$

Наиболее просто  $R(\phi)$  выглядит для прямой на плоскости  $\phi(z) = A \cdot z + B$ :

$$R(A, B) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sigma \cdot G(Az_n + B - a_{mn}; \sigma). \quad (5)$$

Для параметров прямой  $(A' B')$ , отвечающих реальной траектории, можно приближенно считать

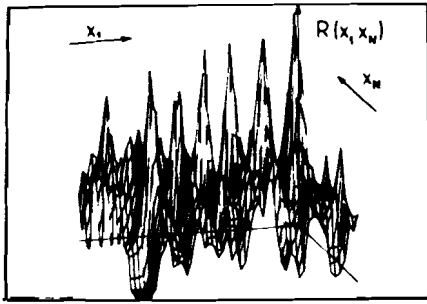


Рис. 2. Распределение  $R(x_1, x_N)$ :  $x_1$  и  $x_N$  — опорные точки. Треки (см. рис. 1) не пересекаются при  $z > 0$  и все главные максимумы расположены вблизи диагонали  $x_N = x_1$ ; вдали от этой диагонали виден максимум, соответствующий комбинационному треку, проходящему через точки  $a_{11}$  и  $a_{55}$ .

$$R(A', B') = N' - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N'} \left( \frac{A' z_n + B' - a'_n}{\sigma} \right)^2, \quad (6)$$

где  $N'$  — число точек  $a'_1 = a_{11}$ ,  $a'_2 = a_{43}$  и т.д., захваченных прямой ( $N' \leq N$ ). Это приближение (6) иллюстрирует наше желание выбрать прямую, проходящую через максимальное число точек с минимальным отклонением: при  $\chi^2 = 0$  (второе слагаемое в (6))  $R(A', B')$  достигает своего максимального значения  $N'$ .

Таким образом, можно ожидать, что на плоскости переменных  $A$  и  $B$  функция  $R(A, B)$  будет выглядеть в виде нескольких больших максимумов (реальные траектории) и набора малых максимумов (шумовые отсчеты, ложные короткие треки). Конечно, среди больших максимумов могут находиться образованные из случайно скомбинированных точек (каждая из которых принадлежит своей траектории или является шумовой), но это уже задача конкретного эксперимента. На рис. 2 представлена функция  $R(x_1, x_N)$ , где  $x_1(z = z_1)$  и  $x_N(z = z_N)$  — опорные точки (связь между  $A, B$  и  $x_1, x_N$  очевидна для прямой);  $a_{mn}$  взяты в соответствии с рис. 1.

Упомянутая простота в анализе  $\chi^2(A, B)$  заменяется довольно сложной задачей — поиском всех главных максимумов  $R(A, B)$ . Можно несколько упростить задачу. Зафиксировав, например,  $x_1$ , будем искать

главный максимум  $R(x_N)$ , перебирая  $x_N$ . На рис. 3 представлена функция  $R(x_N)$  для  $x_1 = a_{11}$ . Предлагаемый перебор может иметь меньшее число операций в сравнении с упоминавшимся перебором по  $\chi^2$ : потребуется  $\sim N \cdot M^3$  вычислений, тогда как по  $\chi^2 \sim N \cdot M^N$  (полагаем, что для определения

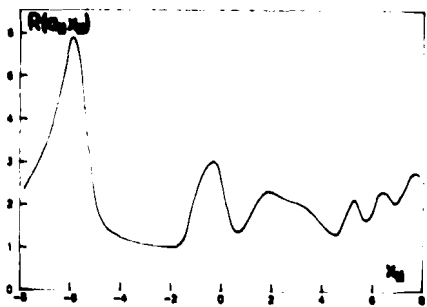


Рис. 3. Распределение  $R(x_N)$  при  $x_1 = a_{11}$ .

одного значения  $\chi^2$  требуется  $N$  операций. В качестве  $Q(x, \sigma)$  можно использовать быстро вычисляемые дискретные функции (1а). Имея приближенные значения для опорных точек, можно определить точные параметры трека ( $A, B$ ), используя хорошо разработанные методы поиска локальных максимумов;  $Q(x, \sigma)$  должна быть уже гладкой (1). При выполнении этой процедуры исключается необходимость довольно громоздкой отбраковки далеко удаленной точки '2'.

### 3. ВЕРШИННЫЕ ФУНКЦИИ

Сформулированный критерий  $R(\phi)$  позволяет упростить задачу определения координат вершин реакций (входящая траектория  $\phi_0(z)$  известна) и распадов нейтральных частиц ( $\phi_0(z)$  неизвестна).

Координаты  $a_{mn}$  (рис. 1) соответствуют двум трекам, выходящим из вершины;  $z = -6$  и  $x = -1$ , и четырем, выходящим из вершины;  $z = -4$  и  $x = +1$ . Разглядывая этот рисунок, мы, зачастую не прибегая к восстановлению выходящих траекторий  $\phi_k(z)$ , а ориентируясь лишь на некоторые точки (опорные, например  $a_k = a_{mN}$  при  $z = z_N$ ), довольно точно указываем положения вершин.

Нашим предположениям о том, что несколько ( $K$ ) треков пересекаются в одной точке  $(x, z)$ , можно поставить в соответствие ожидаемое максимальное значение функции

$$V(x, z, \{c\}) = \sum_{k=1}^K R(\phi_k) \quad (7)$$

при условиях

$$x = \phi_k(z) = \phi_\ell(z); \quad k, \ell = 1, 2, \dots, K, \quad (8)$$

$\{c\}$  — набор параметров для  $\phi_k(z)$  при условиях (8).

Для прямых траекторий действительно нет необходимости предварительно восстанавливать выходящие треки, достаточно найти положения главных максимумов функции, соответствующей распадам

$$D(x, z) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sigma \cdot G \left[ \frac{x - a_k}{z_k - z} (z_k - z_n) + a_k - a_{mn}; \sigma \right]. \quad (9)$$

На рис. 4 представлена  $D(x, z)$  ( $a_{mn}$  соответствуют рис. 1) — положения максимумов действительно близки к заданным координатам двух вершин.

Если дополнить условия (8) информацией о входящей траектории  $\phi_0(z)$ , т.е.

$$x = \phi_0(z) = \phi_k(z) = \phi_\ell(z); \quad k, \ell = 1, 2, \dots, K, \quad (10)$$

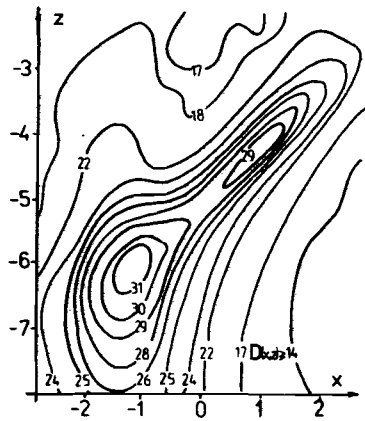


Рис. 4. Уровни постоянного значения распадной функции  $D(\mathbf{x}, z)$ . Области максимальных значений сильно размазаны из-за взаимного фоновое влияния двух групп траекторий.

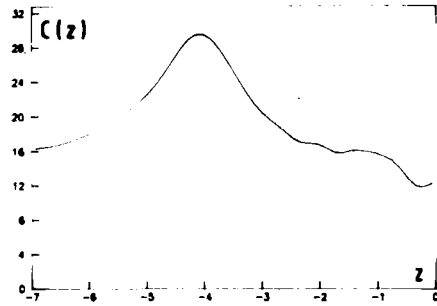


Рис. 5. График функции  $C(z)$ , отвечающий вершине реакции. Параметры входящего трека:  $\phi_0(z) = 0 \cdot z + 1$ .

то  $z$  — положение вершины реакции будет соответствовать максимуму (для прямых треков)

$$C(z) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sigma \cdot C\left(\frac{z_n - z}{z_k - z} b_k - u_{mn}; \sigma\right), \quad (11)$$

где  $b_k \equiv a_k - A_0 z_k - B_0$ ;  $u_{mn} \equiv a_{mn} - A_0 z_n - B_0$ .

На рис. 5 представлена функция (11) при  $K = M$  ( $a_{mn}$  из рис. 1 и  $\phi_0(z) = 0 \cdot z + 1$ ).

При уменьшении значений  $\sigma$  взаимное фоновое влияние различных групп траекторий не так сильно размывает вершины максимумов. Такое же обострение вершин наблюдается и при увеличении угловой расходимости.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если мы сможем определить координаты вершин, то дальнейшее восстановление траекторий значительно упростится.

В предложенных критериях, которые могут претендовать на роль формальной модели трековых изображений, специальным образом не выделены шумовые отсчеты. Априори мы не можем сказать, какие из измеренных  $a_{mn}$  являются шумовыми, а какие принадлежат трекам: мы не знаем также, сколько треков зарегистрировано детекторами.

Если мы наложим некоторые условия, определяющие трек, например: если  $R(\phi) > R_{\min}$ , то  $\phi(z)$  — траектория (если она удовлетворяет дополнительным физическим критериям). Тогда лишь после полной реконструкции мы получим ответ о числе треков и о шумовой загроуженности.

Проблемы потерянных отсчетов (неэффективность детекторов) можно упростить для прямых траекторий — схема изложена в приложении.

Наибольшая трудность в анализе  $R(\phi)$ ,  $V(x, z)$  кроется в многоэкстремальном характере этих функций: можно лишь ожидать, что только вершинам реакции ( $C(z)$  — (11)) будут соответствовать функции, одноэкстремальные в значительном диапазоне  $z$ .

Как отмечалось ранее, методы поиска локальных экстремумов разработаны достаточно хорошо, чего нельзя сказать об анализе многоэкстремальных функций [7]. Особенно это относится к многопараметрическим траекториям — кривым в магнитном поле. Поэтому можно надеяться, что совершенствование анализа многоэкстремальных функций откроет возможность для широкого практического применения предложенной идеологии.

Автор выражает благодарность А.В.Зарубину, В.А.Свиридову, А.Е.Сеннеру, Л.С.Барабашу за полезные обсуждения и поддержку в работе.

Приложение

При восстановлении прямых траекторий по опорным точкам  $x_1(z = z_1)$  и  $x_N(z = z_N)$  всегда можно ожидать, что эти множества ( $x_1 \in \{a_{m1}\}$ ,  $x_N \in \{a_{mN}\}$ , будут неполными из-за неэффективности детекторов. Тем самым возможна потеря траекторий. Однако для прямых треков можно построить проекционное дополнение: для каждого  $x_N$  на выбранном  $z$  формируется массив

$$a_k(x_N) = x_N + \frac{z_N - z}{z_N - z_n} (a_{mn} - x_N). \quad (П1)$$

При  $z = z_n$  (в частности,  $z = z_1$ ) множество  $\{a_k\}$ ,  $k = 1, \dots, K$  включает в себя  $\{a_{mn}\}$ ,  $m = 1, \dots, M_n$ , но  $K > M_n$ , даже если использовать в (П1) отсчеты лишь близлежащих детекторов:  $n = 1, 2$  — например, для построения опорного множества  $a_k(x_N)$  при  $z = z_1$ . Если каждому  $a_k$  поставить в соответствие точность

$$S_k^2 = \sigma_{mn}^2 \cdot \left(\frac{z_N - z}{z_N - z_n}\right)^2 + \sigma^2(x_N) \cdot \left(\frac{z_n - z}{z_N - z_n}\right)^2, \quad (П2)$$

то некоторые  $a_k$  будут группироваться или повторяться (в зависимости от  $S_k$ ) вокруг значений, соответствующих траекториям. Поэтому представляется разумным вычеркивать из  $\{a_k\}$  элементы с минимальной интенсивностью группировки.

Аналогичным образом можно построить опорное множество  $a_k(x_1)$  для  $z = z_N$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ососков Г.А. ОИЯИ, P10-83-187, Дубна, 1983;  
Бережной В.А., Жигунов В.П., Никитин С.Г. Препринт ИФВЭ, 80-86, Серпухов, 1980.
2. Ососков Г.А. ОИЯИ, P10-83-187, Дубна, 1983, с.24.
3. Иоселиани Ц.И. и др. ОИЯИ, P10-86-666, Дубна, 1986.
4. Saxon D.N. – NIM, 1985, A234, p.258. – 2.66
5. Fordon G.E., Saxon D.H. – NIM, 1986, A248, p.439. – 15С
6. Bjork A. CERN 81-16, 1981.
7. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986, с.49.

Рукопись поступила в издательский отдел  
16 января 1988 года.

Яцуненко Ю.А.

P1-88-29

Определение вершин реакций  
в координатных детекторах

Предложена математическая модель многотрековой картины. Эта модель определяется как интеграл по искомой траектории от функции, альтернативно включающей все координаты, измеренные детекторами. В пространстве параметров траектории положения главных максимумов модели соответствуют искомым траекториям. Следствием модели является возможность определять координаты вершин распада частицы на продукты, имеющие прямые траектории без предварительного их восстановления.

Работа выполнена в Общественном научно-методическом отделении ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод автора

Yatsunenکو Yu.A.

P1-88-29

Reaction Vertex Determination  
in Track Detectors

For multitrack reconstruction problem a mathematical model is suggested. This model is defined as an integral along the sought for trajectory on function, alternatively including all the coordinates from each detector. Position of principal maxima of the model in the space of trajectory's parameters determine trajectories. Due to this model it is possible to determine vertex position without the previous track reconstruction for straight trajectories.

The investigation has been performed at the Scientific-Methodical Division, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988