сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P1-85-449

В.М.Лебеденко

АЛГЕБРЫ ЛИ И СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ С МАКСИМАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ОБРАЗУЮЩИХ

1985

Лебеденко В.М. Р1-85-449

Алгебры Ли и супералгебры Ли
с максимальными системами образующих

Исследуются некоторые специфические свойства алгебр Ли и супералгебр Ли. Описаны все конечномерные линейные алгебры, у которых любая система образующих содержит базис. На основе этого указан явный вид алгебр Ли и супералгебр Ли, обладающих этим свойством. Все эти алгебры имеют довольно простую структуру. Это указывает на то, что алгебры Ли и супералгебры Ли с более сложным строением заведомо допускают минимизацию своих систем образующих.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Lebedenko V.M. P1-85-449

Lie Algebras and Subalgebras with
Maximal Generating Systems

Some special properties of Lie algebras and subalgebras are investigated. All finitedimensional linear algebras are described any generating system of which contains basis.Due to this an explicit form of Lie algebras and subalgebras possessing this property is indicated. All these algebras have a rather simple structure. This points to the fact that Lie algebras and subalgebras with a more complicated structure certainly allow the minization of their generating systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. О содержании работы

В теоретической и математической физике при работе с алгебрами Ли и супералгебрами Ли может быть полезной минимизация систем образующих /условимся рассматривать только конечномерные алгебры/. В отличие от базиса, системой образующих линейной алгебры считают такое ее подмножество,из элементов которого путем каких-то конечных комбинаций аддитивных и мультипликативных операций можно получить любой элемент этой алгебры. Известно, например, что алгебры Ли достаточно больших размерностей имеют два образующих элемента. Приведем простой пример системы образующих, не содержащей базиса. Пусть G - алгебра Ли с базисом $\langle a, b, a', b' \rangle$ и со следующими коммутационными соотношениями $[a,b]=a$, $[a',b']=a'$ /остальные коммутаторы - нули/. Эта алгебра, имея размерность четыре, обладает такой системой образующих, состоящей из трех элементов:

$$(a+a'),\ b,\ b' \quad ([(a+a'),b]=a, \quad [a+a',b']=a').$$

Приведем менее тривиальный пример. Комплексная алгебра Ли группы Лоренца задается такими соотношениями

$$[x_1,y_1]=z_1,\quad [y_1,z_1]=x_1,\quad [z_1,x_1]=y_1,$$

$$[x_2,y_2]=z_2,\quad [y_2,z_2]=x_2,\quad [z_2,x_2]=y_2.$$

Эта 6-мерная алгебра Ли обладает двумя образующими элементами:

$$a=2x_1+x_2,\quad b=y_1+y_2$$

/см.[3] /.

Оказывается, что минимизация не всегда возможна. Существуют такие алгебры, у которых любая система образующих содержит базис. В настоящей работе дается полное описание конечномерных линейных алгебр как раз с этим свойством,на основе чего получается явное описание алгебр Ли и супералгебр Ли такого рода, приведенное в конце работы /см.разделы 3 и 4 /.

Заметим, что все приведенные ниже результаты справедливы над любым полем K*.

---

* Характеристика которого не равна двум, хотя во многих случаях это ограничение легко обойти.

Оказалось, что все такие алгебры обладают довольно простым строением. Зато, все алгебры Ли и супералгебры Ли /размерности n / с более сложной структурой /т.е. отличные от указанных/ обладают системами образующих, состоящими менее чем из n элементов, что дает возможность осуществить какую-то минимизацию.

1.2. Обозначения и терминология

Мы применяем, в основном, общепринятые /см. [1,2] / термины и обозначения. Отличие заключается в употреблении скобок: знак $[x,y]$ в супералгебре Ли означает результат применения единой билинейной операции, введенной во всей этой алгебре; для множества A $\{A\}$ будет означать линейную оболочку A; а $\{A\}^x$ - алгебру, порожденную множеством A, $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$ будет означать множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $A \setminus b$ - разность множеств A и b.

2. ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ С МАКСИМАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ОБРАЗУЮЩИХ

Будем рассматривать только конечномерные линейные алгебры над произвольным полем K, у которых любая система образующих содержит базис.

Лемма 1. Для того чтобы линейная алгебра G обладала указанным свойством, необходимо и достаточно выполнение таких условий

$$\{b\}^x = \{b\}, \quad \{a,b\}^x = \{a,b\} \qquad (*)$$

для любых элементов a и b из G.

Доказательство. Пусть линейная алгебра G имеет размерность n. Если она обладает рассматриваемым свойством, то любая ее подалгебра, порожденная $n-1$ линейно независимыми элементами, совпадает со своей линейной оболочкой.

Пусть a и b - два линейно независимых элемента алгебры G.

Дополним множество $<a,b>$ до некоторого базиса A алгебры G, т.е.

$$A = <a, b, a_1, \ldots, a_{n-2}>.$$

Рассмотрим его подмножества:

$$A_k = A \setminus <a_k>, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Тогда, как уже было отмечено выше, все подалгебры $\{A_k\}^x = \{A_k\}$. Следовательно,

$$\{a,b\}^x \subseteq \prod_{k=1}^{n-2} \{A_k\}^x = \prod_{k=1}^{n-2} \{A_k\} = \{a,b\}.$$

То есть доказано, что $\{a,b\}^x = \{a,b\}$. Соотношение $b \cdot b \in \{b\}$ можно доказать аналогично.

Таким образом, необходимость условий (*) доказана.

Пусть, наоборот, для некоторой линейной алгебры G выполняются условия (*). Тогда она не может иметь систему образующих, состоящую из $n-1$ элементов.

Действительно, пусть, напротив, система $C = <c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}>$ порождает алгебру G, но тогда в силу условий

$$c_i \cdot c_j \in \{c_i, c_j\} \subset \{C\}, \quad c_i \cdot c_i \in \{c_i\} \subset \{C\}.$$

Для любых i, j, $1 \le i, j \le n-1$, т.е. $\{C\}^x = \{C\} = \{c_1, \ldots, c_{n-1}\}$, но алгебра G имеет размерность n, что приводит нас к противоречию.

Лемма доказана.

2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Для того чтобы любая система образующих конечномерной линейной алгебры G содержала базис, необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из условий:

1/ для любых двух различных элементов некоторого базиса x, y и любого элемента x этого базиса G

$$x \cdot y = K_r(y)\, x + K_\ell(x)\, y, \qquad x \cdot x \in \{x\}$$

/здесь $K_r(y)$ и $K_\ell(x)$ - постоянные, см. ниже замечание 1/;

2/ то же самое, только для любого базиса алгебры G.

Замечание 1. Можно показать, что константы $K_r(y)$ и $K_\ell(x)$ не зависят от выбора базиса /см. начало доказательства/.

Доказательство. Пусть G - алгебра рассматриваемого типа и пусть a, b и c - три ее линейно независимых элемента. В силу Леммы 1

$$a \cdot c = ka + \ell c, \quad b \cdot c = mb + nc,$$

$$(a+b)c = \beta(a+\beta) + \alpha c,$$

где $k, \ell, m, n, \beta, \alpha$ - некоторые коэффициенты.

Отсюда, в силу линейной независимости элементов a, b и c, получаем, что $\beta = k$, $m = \beta$ ($\ell + n = \alpha$), $(a+b)c = \beta(a+b) + \alpha c = (ka + \ell c) + (mb + nc) = \beta a + \beta b + \alpha c$. То есть $k = m$.

Аналогичное получается, если умножать $a+b$ на c слева. Эти обстоятельства служат ключом к доказательству предложения, выполение условия $b \cdot b \in \{b\}$, очевидно, вытекает из Леммы 1.

Установленная закономерность переносится на любые /с точностью до обозначений/ три линейно независимые элемента алгебры G.

Рассмотрим произвольный базис этой алгебры и фиксируем некоторый его элемент c. Тогда, в силу проведенных выше рассмотрений, для любого элемента x этого базиса

$$x\cdot c = kx + \ell c, \qquad c\cdot x = \ell' x + k' c.$$

Константы k и k' зависят только от x, аналогично ℓ и ℓ'. Так как в роли c может быть любой элемент базиса, то существуют такие константы $K_r(x)$ и $K_\ell(x)$, соответствующие каждому его элементу x, что для любых двух различных элементов этого базиса x и y: $x\cdot y = K_r(y)x + K_\ell(x)y$. В силу построений этого доказательства, константы $K_r(x)$ и $K_\ell(y)$ инварианты относительно замены базиса.

Рассмотрим условие 1/ доказываемого предложения. Пусть в некотором базисе алгебры G для любых его элементов x, y справедливы равенства $x\cdot y = K_r(y)x + K_\ell(x)y$. Покажем, что оно выполняется и для всякого базиса G. Пусть $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ - новый базис алгебры G и

$$x = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i, \qquad y = \sum_{j=-1}^{n} \ell_j a_j.$$

Тогда

$$x\cdot y = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \ell_j a_j\right) = \sum_{i,j} k_i \ell_j (a_i a_j) =$$

$$= \sum_{i,j} k_i \ell_j (K_r(a_j)a_i - K_\ell(a_i)a_j) = \left(\sum_{j=i}^{n} k_j K_r(a_j)\right)\sum_{i=j}^{n} k_i a_i -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} k_i K_\ell(a_i)\right)\sum_{j=1}^{n} \ell_i a_j, \quad \left(\sum_{i=j}^{n} k_i a_i = x,\ \sum_{j=1}^{n} \ell_j a_j = y\right),$$

а так как константы $K_r(y)$ и $K_\ell(x)$ инвариантны относительно замены базиса, то

$$\sum_{j=1}^{n} K_j K_r(a_j) = K_r(y), \qquad \sum_{i=1}^{n} K_i K_\ell(a_i) = K_\ell(x).$$

Предложение доказано.

Конкретизируем полученные результаты для алгебр Ли и линейных алгебр с симметрическим умножением.

Лемма 2. Алгебра Ли G содержит базис в любой своей системе образующих тогда и только тогда, когда в некотором базисе /или в любом/ умножение в ней задается так: $[x,y] = K(y)x - K(x)y$. /Здесь константы $K(x)$ зависят только от элементов x и инвариантны относительно замены базиса/.

Доказательство. Пользуясь предложением, получаем, что $[x,y] = K_r(y) + K_\ell(x)y$, но $-[x,y] = [y,x] = K_r(x)y + K_\ell(y)x$. Отсюда $K_\ell(x) = -K_r(x)$. То есть существуют такие константы $K(x)$, что $[x,y] = K(y)x - K(x)y$.

Замечание 2. Легко заметить, что все такие алгебры Ли 2-разрешимы /т.е. $[[G,G],[G,G]] = 0$).

Достаточно провести подсчеты с выражением $[[x,y],[z,u]]$ на основе полученной формулы.

Лемма 3. Для того чтобы конечномерная линейная алгебра с симметрическим умножением в любой своей системе образующих содержала базис, необходимо и достаточно выполнение условий $x\cdot y = K(y)x + K(x)y$, $x\cdot x \in \{x\}$. Хотя бы для одного базиса /для любого базиса/.

Доказательство. Аналогично данному для алгебры Ли /Лемма 2/. Здесь константы $K(x)$ тоже инвариантны относительно замены базиса.

3. ЯВНОЕ ОПИСАНИЕ АЛГЕБР ЛИ РАССМАТРИВАЕМОГО ТИПА

Оно вытекает из Леммы и предложения и замечаний 1/ и 2/.

Итак, пусть G - алгебра Ли искомого типа и неабелева /естественно, что все абелевы алгебры Ли удовлетворяют нашим требованиям/. Тогда в любом ее базисе для различных его элементов x и y $[x,y] = K(y)x - K(x)y$ /как уже отмечалось, константы $K(x)$ инварианты относительно замены базиса/.

В силу замечания 2/ алгебра G 2-размершима. Пусть коммутант $G - [G,G] = \{a_1,\dots,a_k\}$, $a_1,\dots,a_k$ линейно независимы, $[G,G]$ - абелева, а весь базис G имеет вид $\langle a_1,\dots,a_k, b_1,\dots,b_p\rangle$. Так как $[G,G]$ -абелева подалгебра G, то для любого $i = 1, 2,\dots,k$ $K(a_i) = 0$. Далее, так как $[b_i, b_j] = K(b_j)b_i - K(b_i)b_j$, то $\{b_1 \dots$ $\dots, b_p\}$ - подалгебра G, то есть алгебра G является расщепляемым расширением абелевой подалгебры $[G,G]$ с помощью абелевой /в силу 2-разрешимости G/ подалгебры $\{b_1,\dots,b_p\}$. Так как $K(a_i) = 0$, то при $p \neq 1$, $K(b_i) \equiv 0$ и $[a_i, a_j] = K(b_j)a_i - K(a_i)b_j = 0$. То есть алгебра G должна бы быть абелевой. Поэтому остается одна возможность - $p = 1$. Пусть $b_p = b$. Тогда $[a_i, b] = K(b)a_i$, $i = 1,2,\dots k$.

Нормируя элемент b, получаем с точностью до обозначений следующее описание неабелевых алгебр Ли G рассматриваемого типа $G = \{a_1, a_2,\dots,a_k, b\}$ / k - может быть любым натуральным числом/ $[a_i, b] = a_i$, $i = 1,2,\dots,k$, остальные коммутаторы - нули.

4. ЯВНОЕ ОПИСАНИЕ НЕАБЕЛЕВЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ РАССМАТРИВАЕМОГО ТИПА

На все эти алгебры, естественно, распространяются требования предложения. Пусть $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ - супералгебра рассматриваемого типа. Тогда сразу видно, что $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = 0$. Действительно, если $0 \neq b \in G_{\bar 1}$ /если даже $\dim G_{\bar 1} = 1$/, то $[b, b] = 0$; это вытекает из двух условий, которым элемент b должен удовлетворять: $[b,b]\in\{b\}\subset G_{\bar 1}$, $[b,b]\in G_{\bar 0}$ ($G_{\bar 0}\cdot G_{\bar 1}=0$). Далее, если b_1 и b_2 – два элемента $G_{\bar 1}$, то $[b_1,b_2]=0$ /если G – алгебра над полем, характеристика которого не равна двум:

$$0=[b_1+b_2,\ b_1+b_2]=[b_1,b_1]+[b_2,b_2]+[b_1,b_2]+[b_2,b_1]=2[b_1,b_2]=0\ /.$$

Отсюда $[b_1,b_2]=0$. На элементы четной части $G_{\bar 0}$ распространяются ограничения, налагаемые предложением. Поэтому $G_{\bar 0}$ или абелева или имеет вид, рассматриваемый в разделе 3: $G_{\bar 0}=\{a_1,\dots,a_k,b\}$, $[a_i,b]=a_i$, $i=1,2,\dots,k$. Пусть $G_{\bar 0}$ – абелева алгебра Ли, $G_{\bar 0}=\{a_1,\dots,a_k\}$, $G_{\bar 1}=\{b_1,\dots,b_\ell\}$. Так как $[G_{\bar 0},G_{\bar 0}]=0$, $[G_{\bar 1},G_{\bar 1}]=0$, то $K_r(a_i)=K_\ell(a_i)=0$, $K_r(b_i)=K_\ell(b_i)=0$, $[a_i,b_j]\equiv 0$. То есть G абелева, за исключением случаев: $k>1$, $\ell=1$; $k=1$, $\ell>1$; $k=1$, $\ell=1$. Рассмотрим случай, когда $\ell=1$, $k>1$. Тут $G=\{a_1,\dots,a_k,b\}$ и с точностью до нормировки элементов a_i, $b=b_1=b_\ell$ обозначений $[a_i,b]=a_i$, $i=1,2,\dots,k$ /остальные произведения – нули/.

Теперь рассмотрим случай, когда $k=1$, $\ell>1$, т.е. когда $G_{\bar 0}=\{a\}$ $(a=a_1)$, $G_{\bar 1}=\{b_1,\dots,b_\ell\}$. Тут, как и ранее

$$[G_{\bar 0},G_{\bar 0}]=[G_{\bar 1},G_{\bar 1}]=0,\ [a,a]=0,\ K_r(b_i)=0,\quad K_\ell(b_i)=0,$$

$$[a_t,b_j]=K_r(b_i)\,a+K_\ell(a)\,b_j=K_\ell(a)\,b_i,$$

с точностью до обозначений и нормировок алгебру G можно задать так: $G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1}$, $G_{\bar 0}=\{a\}$, $G_{\bar 1}=\{b_1,\dots,b_\ell\}$ $(\ell>1)$, $[a,b_i]=b_i$, $i=1,2,\dots\ell$ /остальные произведения – нули/.

Теперь остается рассмотреть крайний случай: $k=1$, $\ell=1$. Тут

$$G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1},\ G_{\bar 0}=\{a\},\ G_{\bar 1}=\{b\},\ [G_{\bar 0},G_{\bar 0}]=0=[G_{\bar 1},G_{\bar 1}].$$

Эта алгебра задается соотношением $[a,b]=b$. И, как легко проверить, не обладает одним образующим элементом.

Перейдем теперь к случаю, когда $G_{\bar 0}$ неабелева. Как было установлено выше, $G_{\bar 0}$ должна иметь вид

$$\{a_1,\dots,a_k,b\},\ [a_i,b]=a_i,\ i=1,\dots,k,\ [b,b]=0,\quad [a_i,a_j]=0.$$

Пусть $G_{\bar 1}=\{b_1,\dots,b_m\}$, т.е. $G=\{a_1,\dots,a_k,b,b_1,\dots,b_m\}$. Как и ранее, $[a_i,a_j]=0$, $[b_i,b_j]=0$.

Выражение $[b_i,b]=K_r(b)\,b_j+K_\ell(b_i)\,b=K_r(b)\,b_i=q\,b$ /где q – константа, определяемая самой алгеброй G/. Теперь отсюда получаем явное описание супералгебр этого типа:

$$G=G_{\bar 0}\oplus G_{\bar 1},\quad G_{\bar 0}=\{a_1,\dots,a_k,b\},\quad G_{\bar 1}=\{b_1,b_2,\dots,b_m\},$$

k и m могут быть любыми натуральными числами, при этом

$$[a_i,a_j]=0,\quad (b_i,b_j)=0,\ [a_i,b]=a_i,\ [b_i,b_j]=0,\ [a_i,b]=0,$$

$$[b_i,b]=q\,b_i.$$

5. ВЫРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАИ

Анализируя результаты и методы доказательства, мы приходим к выводу, что все приведенные здесь результаты справедливы над любым полем K, за исключением раздела 4. Для полноты картины нам достаточно установить, какие двумерные алгебры могут иметь один образующий элемент. Ограничимся рассмотрением 2-мерных супералгебр. Это либо абелевы или алгебра типа $[b,b]=a$.

Остается еще одна двумерная супералгебра с соотношением $[a,b]=b$. Легко показать, что она не имеет образующего элемента.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить всех товарищей, принявших участие в обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джекобсон. Алгебры Ли. "Мир", М., 1964.
2. Кас V.C. Commun.Matt Phys., 1977, 53, p.11-64.
3. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-83-331, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июня 1985 года