объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

3723/2-80

11/8-80

P1-80-341

Б.Словинский, В.Чай*

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗВИТИЕ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ ЛИВНЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ ГАММА-КВАНТАМИ С ЭНЕРГИЕЙ E_γ = (75-500) МэВ

Направлено в ЯФ

* Варшавский технический университет

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное исследование структуры электронно-фотонных ливней /ЭФЛ/, создаваемых гамма-квантами /или электронами/ высоких энергий в достаточно плотных однородных средах,является весьма актуальной методической задачей. Это связано со значительным интересом к изучению электромагнитной компоненты, сопровождающей столкновения частиц больших энергий. Тем не менее,проблема ЭФЛ не получила к настоящему времени удовлетворительного решения. Существующая теория ЭФЛ, основанная на интегро-дифференциальных уравнениях типа диффузии [1], описывает лишь одномерное развитие процесса - в проекции на так называемую ось развития ливня, т.е. в направлении импульса частицы /фотона или электрона/, инициирующей ливень. С точки зрения постоянно растущих методических требований современного эксперимента такое описание явно неудовлетворительно, особенно если иметь в виду поглощающие вещества с большим атомным номером, которые применяются для детектирования электронов, позитронов и гамма-квантов высоких энергий, так как в этом случае нельзя пренебречь поперечными размерами ЭФЛ. Развитый впоследствии метод Монте-Карло /ММК/ численного моделирования процесса развития ЭФЛ на ЭВМ /см., напр., [2] / лишен названных недостатков и дает возможность получить с точностью не хуже 10% практически всю информацию об ЭФЛ, представляющую методический интерес. Однако применение ММК связано с необходимостью использования весьма громоздких программ на ЭВМ и требует значительного машинного времени. Поэтому одним из авторов [3] развивался феноменологический подход к проблеме ЭФЛ. Суть этого подхода состоит в получении, на основании экспериментальных данных, достаточно простых аппроксимирующих соотношений, позволяющих быстро и надежно оценить полную энергию гамма-кванта по суммарным энергетическим потерям ливневых электронов и позитронов /далее: электронов/ в заданном объеме поглотителя. Такая задача относительно легко решается, если имеется достаточно простая параметризация функции пространственного распределения плотности энергии ЭФЛ, выделяемой в виде ионизационных потерь ливневых электронов, $\Delta E(E_\gamma, E_0, t, p)/\Delta t \cdot \Delta p$, где E_γ - энергия первичного гамма-кванта, создающего ливень; E_0 - так называемая энергия обрезания для ливневых электронов; t - длина развития ливня, отсчитываемая от точки конверсии гамма-кванта, вдоль оси развития лавины; p - ширина развития ливня, отсчитываемая от оси его развития в направлении, перпендикулярном к ней *.

В настоящей работе выполнены измерения дифференциальных ионизационных потерь ливневых электронов в ЭФЛ, созданных гамма-квантами с энергией $E_\gamma = /75 \div 500/$ МэВ в жидком ксеноне. Этот энергетический интервал представляет наибольший интерес в ряде задач, посвященных исследованию нейтральных бозонов, образованных в ядерных взаимодействиях при больших энергиях. На основании экспериментальных данных получены удобные для практического применения формулы, аппроксимирующие функцию плотности пространственного распределения ионизационных потерь ливневых электронов. Эксперимент выполнен на снимках с 26-литровой ксеноновой пузырьковой камеры ОИЯИ /КПК/, облученной в пучке $\pi^{\pm}$-мезонов с импульсом 2,34 ГэВ/с.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

В результате просмотра около 30 тыс. стереофотографий с КПК было отобрано и проанализировано 500 случаев ЭФЛ, удовлетворяющих соответствующим критериям [4]. Значения энергии гамма-квантов, создавших эти ливни, содержались в интервале $E_\gamma = /75 \div 500/$ МэВ. Энергии ЭФЛ определялись по суммарным пробегам ливневых электронов [5].

В каждом выбранном событии ЭФЛ были измерены в плоскости проекции снимка, при помощи специально изготовленного трафарета, суммарные пробеги ливневых электронов, $\Delta\Sigma r(E_\gamma, E_0, t, p)/\Delta t \cdot \Delta p$, наблюдаемые внутри прямоугольников со сторонами $\Delta t = 20$ мм вдоль оси развития лавины и $\Delta p = 10$ мм в направлении, перпендикулярном к этой оси. При этом точка (t, p) является геометрическим центром прямоугольника. Увеличение средней плоскости камеры в репроекторе было равно 0,84. Следовательно, $\Delta t = 0{,}588$ и $\Delta p = 0{,}294$ радиационных единиц жидкого ксенона /рад. ед./.

Измерения были выполнены для двух значений энергии обрезания E_0, представляющих практический интерес: $E_0 = 0$ и $E_0 = 3$ МэВ, и девяти интервалов энергии E_γ. Число N_γ событий ЭФЛ, вызванных гамма-квантами с энергией E_γ, даны в табл.1.

*В однородной среде ЭФЛ обладает осевой симметрией.

Таблица 1

Число N_γ отобранных и проанализированных случаев ЭФЛ и соответствующие им значения энергии первичных гамма-квантов

E_γ /МэВ/	75 ±10	100 ±10	120 ±10	150 ±20	200 ±20	250 ±25	300 ±25	375 ±50	500 ±75
N_γ	28	45	49	95	98	70	38	45	32

3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПРОДОЛЬНЫМ И ПОПЕРЕЧНЫМ РАЗВИТИЕМ ЭФЛ

Весьма существенно, с точки зрения простоты феноменологического описания структуры ЭФЛ, выяснить зависимость между продольным (t) и поперечным (p) развитием лавин. С этой целью была выполнена проверка гипотезы о независимости t и p для всех исследуемых девяти энергетических интервалов по E_γ, и двух значений энергии обрезания E_0, согласно критерию:

$$\chi^2_{(k-1)(\ell-1)} = \sum_{t=1}^{k} \sum_{p=1}^{\ell} \frac{(n_{tp} - n \cdot r_t \cdot r_p)^2}{n \cdot r_t \cdot r_p}, \qquad /1/$$

где

$$n_{tp} = E[\Delta\Sigma r(E_\gamma, E_0, t, p)/\Delta t \cdot \Delta p + 0{,}5],$$

$$n = \sum_{t,p} n_{tp}, \quad r_t = \sum_p n_{tp/n}, \; r_p = \sum_t n_{tp/n}.$$

Вычислены также коэффициенты корреляции C между переменными t и p для всех значений энергии E_γ. Соответствующие результаты приведены в табл.2. Они относятся к энергии обрезания $E_0 = 0$, однако аналогичная ситуация имеет место также при $E_0 = 3$ МэВ.

Можно заключить, что полученные результаты не противоречат гипотезе о независимости продольного и поперечного развития ливней. Такой вывод подтверждается также оценкой так называемого коэффициента зависимости [7], значение которого не превышает 0,3.

Поскольку в однородной среде ЭФЛ обладают осевой симметрией, то отмеченное свойство ЭФЛ распространяется на параметры, определяющие развитие ливней в пространстве: длину развития t, отсчитываемую от точки конверсии первичного гамма-кванта, вдоль оси развития ЭФЛ /т.е. то же самое, что для проекции на плоскость снимка/ и радиус поперечного развития ЭФЛ, ρ, отсчитываемый от оси ливня в направлении, перпендикулярном к ней.

Таблица 2

Значения χ^2_n, определенные формулой /1/, с $n=(k-1)(\ell-1)$ степенями свободы и соответствующие им значения вероятности P, а также значения коэффициента корреляции C между параметрами, описывающими продольное и поперечное развитие ливней, вызванных гамма-квантами с энергией E_γ

E_γ /МэВ/	χ^2_n/n	P /%/	$C \pm \Delta C$*
75	9,1/9	60	0,023±0,3
100	12,7/12	60	0,231±0,2
120	30,6/24	85	0,218±0,2
150	18,4/21	57	0,244±0,2
200	24,4/21	72	0,118±0,1
250	19,9/21	45	0,069±0,1
300	31,0/30	42	0,260±0,2
375	34,3/33	41	0,023±0,2
500	41,9/36	77	0,021±0,3

* Доверительный интервал ΔC определен приблизительно. Он соответствует доверительной вероятности 0,95 [8].

Обнаруженное свойство независимости продольного и поперечного развития ЭФЛ дает возможность записать функцию плотности суммарных ионизационных потерь ливневых электронов в виде произведения двух функций, каждая из которых описывает соответствующее одномерное ЭФЛ - продольное и поперечное:

$$f(E_\gamma, E_0, t, p) = \frac{\Delta E(E_\gamma, E_0, t, p)}{\Delta t \cdot \Delta p} =$$

$$= f_1(E_\gamma, E_0, t) \cdot f_2(E_\gamma, E_0, p), \qquad /2/$$

где f_1 и f_2 - соответствующие маргинальные распределения:

$$f_1(E_\gamma, E_0, t) = \sum_p \left(\frac{\Delta E(E_\gamma, E_0, t, p)}{\Delta t \cdot \Delta p}\right)\Delta p, \qquad /3/$$

$$f_2(E_\gamma, E_0, t) = \sum_t \left(\frac{\Delta E(E_\gamma, E_0, t, p)}{\Delta t \cdot \Delta p}\right)\Delta t. \qquad /4/$$

Здесь

$$\frac{\Delta E(E_\gamma, E_0, t, p)}{\Delta t \cdot \Delta p} = a\,\frac{\Delta \Sigma r(E_\gamma, E_0, t, p)}{\Delta t \cdot \Delta p},$$

a = (0,6/0,84) МэВ/мм [5].

4. ПРОДОЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ ЭФЛ

Задача нахождения простейшего вида функции /3/, удовлетворительно описывающей экспериментальные данные, решалась в ряде более ранних работ [8]. В результате выполненного нами статистического анализа экспериментальных данных найдено, что

$$f_1(E_\gamma, E_0, t) = \alpha(E_\gamma, E_0) \cdot t^{\gamma(E_\gamma, E_0)}\, e^{-\beta(E_\gamma, E_0)\cdot t^2} . \qquad /5/$$

Значения коэффициентов $\alpha(E_\gamma, E_0)$, $\beta(E_\gamma, E_0)$ и $\gamma(E_\gamma, E_0)$, соответствующие различным энергиям первичных гамма-квантов, E_γ, и энергиям обрезания ливневых электронов, E_0, приведены в табл.3. Там же даны значения тестовой статистики χ^2_k/k, по которой проводилось фитирование экспериментальных данных формулой /5/ и вероятности P статистической подгонки. Принято при этом, что длина t развития ливня выражена в единицах, равных 23,8 мм жидкого ксенона, или же 0,6 рад.ед. данного вещества:

$$I[t] = 23{,}8 \text{ мм /в жидком Xe/} = 0{,}6 \text{ рад.ед.} \qquad /6/$$

Коэффициент $\alpha(E_\gamma, E_0)$ определен таким образом, чтобы

$$\int_0^\infty f_1(E_\gamma, E_0, t)\,dt = E_\gamma \text{ /МэВ/}. \qquad /7/$$

Полезно иметь в виду, что, по крайней мере, для приблизительных оценок, можно воспользоваться следующими формулами, аппроксимирующими зависимость коэффициентов $\alpha(E_\gamma, E_0)$, $\beta(E_\gamma, E_0)$ и $\gamma(E_\gamma, E_0)$ от E_γ и E_0:

$$\alpha(E_\gamma, E_0) = 43{,}2 \pm 3{,}7, \qquad /8/$$

$$\beta(E_\gamma, E_0) = 11{,}44\,E_\gamma^{-0{,}96} \qquad /9/$$

$$\gamma(E_\gamma, E_0) = 0{,}72 \pm 0{,}13 \qquad /10/$$

Таблица 3

Значения коэффициентов α, β и γ формулы /5/, описывающей продольное развитие ЭФЛ. E_γ - энергия гамма-квантов, образующих ЭФЛ. E_0 - энергия обрезания ливневых электронов, χ_k^2/K - значения тестовой статистики, полученные при подгонке функции /5/ к экспериментальным данным; K - число степеней свободы; P - вероятность фитирования

E_γ (МэВ)	$E_0=0$					$E_0 = 3$ МэВ				
	α	β	γ	χ_k^2/K	P(%)	α	β	γ	χ_k^2/K	P(%)
75±I0	45±I,9	0,303±0,036	I,28±0,26	I,I/I	40	47,3±2,I	0,3I3±0,040	I,27±0,27	2,2/I	I5
100±I0	38,9±I,6	0,I35±0,0I5	0,5I±0,I4	2,0/3	64	40,6±I,8	0,I48±0,0I2	0,56±0,I3	I,9/3	65
I20±I0	45,4±I,5	0,II2±0,0I0	0,60±0,I0	4,4/4	42	46,I±2,2	0,I42±0,0I5	0,66±0,I5	4,0/4	47
I50±20	40,8±I,I	0,088±0,005	0,66±0,07	5,2/5	45	4I,5±I,0	0,094±0,005	0,56±0,07	3,9/5	6I
200±20	40,I±0,6	0,085±0,003	0,90±0,05	II,7/6	7	40,I±0,9	0,089±0,004	0,83±0,06	6,8/6	39
250±25	4I,4±I,6	0,070±0,003	0,93±0,0I	25,2/6	I	44,3±I,8	0,073±0,003	0,78±0,07	26,0/6	I
300±25	43,7±2,I	0,048±0,003	0,74±0,07	6,7/8	60	42,8±2,4	0,048±0,003	0,62±0,08	8,8/8	4I
375±50	4I,4±I,4	0,032±0,002	0,72±0,05	I3,2/I0	22	40,2±I,4	0,039±0,002	0,73±0,06	I4,4/8	8
500±75	54,8±2,2	0,029±0,00I	0,75±0,05	I5,4/I0	I2	43,5±2,0	0,03I±0,002	0,78±0,06	5,0/I0	90

для двух значений E_0. Формулы /9/ и /10/ относятся к интервалу E_γ = /100÷500/ МэВ. Ошибки в /8/ и /10/ определены как оценки дисперсии соответствующих выборок /табл.3/, что более адекватно действительности, чем ошибки фитирования.

5. ПОПЕРЕЧНОЕ РАЗВИТИЕ ЭФЛ

Были изучены две гипотезы аппроксимации функции $f_2(E_\gamma,E_0,p)$, описывающей поперечное развитие ЭФЛ в плоскости проекции: нормальное распределение и однопараметрическая функция

$$f_2(E_\gamma, E_0, p) = \lambda \cdot \mathrm{ch}^{-2}[\lambda \cdot p], \qquad /11/$$

которая оказалась более вероятной. Из /11/ вытекает, что

$$\int_0^\infty f_2(E_\gamma, E_0, p)\,dp = 1. \qquad /12/$$

Следовательно, из /2/, /7/ и /12/ получается, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(E_\gamma, E_0, t, p)\,dt\,dp = E_\gamma. \qquad /13/$$

Значения тестовой статистики χ_k^2/k, полученные при аппроксимации функцией /11/ экспериментальных данных, соответствующих ионизационным потерям ливневых электронов вдоль координаты p на различных длинах развития t, при разных энергиях E_γ и E_0, равны $\chi_k^2/k \simeq 1$. Число степеней свободы не превышало 5. Следует также подчеркнуть, что параметр λ в /11/ однозначно определяет дисперсию σ_p поперечного распределения ионизационных потерь в ЭФЛ, так как

$$\sigma_p^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \mathrm{ch}^{-2}(\lambda p)\,dp = \frac{\pi^2}{6\lambda^2}. \qquad /14/$$

Поскольку по мере развития ЭФЛ, вдоль оси t, происходит увеличение его поперечных размеров вследствие, в основном, многократного рассеяния ливневых электронов, то, следовательно, параметр λ должен уменьшаться с ростом t. Оказалось возможным найти удовлетворительную аппроксимацию зависимости λ от t при различных E_γ и E_0, а именно:

$$\lambda = \lambda(E_\gamma, E_0, t) = A(E_\gamma, E_0)e^{-B(E_\gamma, E_0)t} + C(E_\gamma, E_0). \qquad /15/$$

Значения параметров A, B и C, соответствующие различным энергиям E_γ и E_0, приведены в табл.4. Там же даны значения тестовой статистики χ_k^2/k / k - число степеней свободы/. Следует

Таблица 4

Значения параметров A, B и C в формуле /15/ при разных энергиях ЭФЛ, E_γ и энергии обрезания ливневых электронов, E_0. χ^2_k/k – значения тестовой статистики, полученные при аппроксимации формулой /15/. k – число степеней свободы, P – вероятность фитирования

E_γ (МэВ)	$E_0 = 0$					$E_0 = 3$ МэВ				
	A	B	C	χ^2_k/k	P(%)	A	B	C	χ^2_k/k	P(%)
75	2,3±0,4	0,6±0,4	0,2±0,6	0,2/I	96	3,3±2,6	0,3±0,4	−0,9±2,9	0,03/I	98
I00	2,0±0,4	I,2±0,4	0,8±0,I	I,8/2	5I	2,I±0,6	I,3±0,5	0,9±0,I	7,8/2	2
I20	I,6±0,3	0,6±0,2	0,5±0,I	3,8/3	34	I,9±0,5	0,8±0,4	0,5±0,2	I,7/3	69
I50	2,2±0,3	0,9±0,I	0,5±0,I	4,3/4	43	2,2±0,2	0,9±0,I	0,5±0,I	I4,5/4	I
200	2,6±0,3	0,8±0,I	0,5±0,I	2,7/6	84	2,9±0,I	0,9±0,I	0,5±0,I	2,5/6	87
250	I,5±0,2	0,6±0,I	0,6±0,I	5,7/5	39	I,5±0,2	0,6±0,I	0,6±0,I	2,9/5	73
300	I,6±0,2	0,5±0,I	0,6±0,I	2,2/6	90	I,6±0,2	0,4±0,I	0,5±0,I	3,7/5	64
375	I,5±0,I	0,3±0,I	0,4±0,I	I8,8/8	2	2,0±0,2	0,5±0,I	0,6±0,I	I4,0/8	9
500	2,I±0,3	0,6±0,I	0,7±0,I	24,7/8	0,I	2,I±0,3	0,6±0,I	0,7±0,I	I6,I/8	4

подчеркнуть, что зависимость параметра λ, определяющего поперечные размеры ЭФЛ, от длины t развития ливня отнюдь не противоречит сделанному ранее выводу о независимости продольного и поперечного развития ЭФЛ /2/, так как здесь речь идет лишь о зависимости дисперсии σ_p одного параметра (p) от другого параметра (t).

Из табл. 4 можно сделать вывод, что при достигнутой точности эксперимента не наблюдается зависимости коэффициентов A, B и C от энергий E_γ и E_0. Поэтому целесообразно воспользоваться усредненными значениями этих коэффициентов:

$$A = 2{,}1 \pm 0{,}5, \quad B = 0{,}7 \pm 0{,}3, \quad C = 0{,}5 \pm 0{,}4 \,. \qquad /16/$$

6. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ЭФЛ

Если через $F(E_\gamma, E_0, t, \rho)$ обозначить функцию плотности суммарных ионизационных потерь ливневых электронов в пространстве, то из условий наблюдения ее проекции $f(E_\gamma, E_0, t, p)$ на плоскость снимка вытекает следующая зависимость:

$$f(E_\gamma, E_0, t, p) = 2\int_0^\infty F(E_\gamma, E_0, t, \rho)\, dy \,, \qquad /17/$$

где интегрирование производится вдоль прямой OY, перпендикулярной плоскости проекции и пересекающей ее в точке $0 \equiv (t, p)$. Переходя к полярной системе координат, которая более естественна для рассматриваемой задачи, получаем:

$$f(E_\gamma, E_0, t, p) = 2\int_p^\infty F(E_\gamma, E_0, t, \rho)\, \frac{d\rho}{\sqrt{1 - p^2/\rho^2}} \,. \qquad /18/$$

Согласно свойству независимости поперечного и продольного развития ЭФЛ /2/, уравнение /18/ можно представить следующим образом:

$$f_2(E_\gamma, E_0, p) = 2\int_p^\infty F_2(E_\gamma, E_0, \rho)\, \frac{d\rho}{\sqrt{1 - p^2/\rho^2}} \,, \qquad /19/$$

где функция $F_2(E_\gamma, E_0, \rho)$ удовлетворяет условию:

$$F(E_\gamma, E_0, t, \rho) = F_1(E_\gamma, E_0, t) \cdot F_2(E_\gamma, E_0, \rho) \,, \qquad /20/$$

а функция $F_1(E_\gamma, E_0, t)$ – естественному условию:

$$F_1(E_\gamma, E_0, t) = f_1(E_\gamma, E_0, t) \,. \qquad /21/$$

Уравнение /19/ является интегральным уравнением Вольтерра первого рода, в котором неизвестной является функция $F_2(E_\gamma, E_0, \rho)$, в то время как функция $f_2(E_\gamma, E_0, p)$ определяется феноменологически из эксперимента, как это показано в пункте 5.

Путем замены переменных в уравнении /19/, $x = 1/p$ и $z = 1/\rho$, можно его привести к виду:

$$f_2(E_\gamma, E_0, x^{-1}) = \int_0^x \frac{2}{z^2} F_2(E_\gamma, E_0, z^{-1}) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2/x^2}}. \qquad /22/$$

Вводя для краткости обозначения:

$$\eta(x) = f_2(E_\gamma, E_0, x^{-1}) \qquad /23/$$

и

$$u(z) = \frac{2}{z^2} F_2(E_\gamma, E_0, z^{-1}), \qquad /24/$$

получаем из /22/:

$$\eta(x) = \int_0^x u(z)\,dz \,/ \sqrt{1 - z^2/x^2}. \qquad /25/$$

Было показано [9], что уравнение /25/ имеет единственное суммируемое решение, которое записывается в виде:

$$u(z) = \frac{2}{\pi}[\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 + z \int_0^z \frac{d}{dx}\left[\frac{\eta(x)}{x}\right] \frac{dx}{\sqrt{z^2 - x^2}}], \qquad /26/$$

где

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \left[\frac{\eta(x)}{x}\right]_0 .$$

Таким образом, конкретный вид функции $F(E_\gamma, E_0, t, \rho)$ пространственного распределения ионизационных потерь ливневых электронов в ЭФЛ получается из соотношений: /20/, /21/, /23/ и /26/.

7. ВЫВОДЫ

Результаты выполненного в настоящей работе анализа ЭФЛ, создаваемых гамма-квантами с энергией $E_\gamma = /75 \div 500/$ МэВ в жидком ксеноне, можно свести к следующим заключениям:

1/ Установлено с достаточно большой вероятностью, что поперечное развитие электронно-фотонного ливневого процесса не зависит от продольного /табл.2/. Существует лишь зависимость между дисперсией поперечного развития ЭФЛ /т.е. "шириной" ливня/ и длиной его развития /формулы /14/ и /15//.

2/ Продольное развитие ЭФЛ описывается простой формулой /21/ и /5/.

3/ Для определения поперечных размеров ЭФЛ можно воспользоваться аппроксимирующей функцией /11/.

4/ Не наблюдается, при достигнутой точности эксперимента, зависимости изученных характеристик ЭФЛ от энергии обрезания E_0 ливневых электронов в области пороговых значений энергии для реальных детекторов электромагнитного излучения высокой энергии. Это свойство некритичности структуры ЭФЛ к пороговым значениям дискриминации электронов по энергии следует считать благоприятным, с методической точки зрения, обстоятельством.

5/ Предложенное феноменологическое описание ЭФЛ применимо, в пределах изученного интервала энергии E_γ, к любой однородной среде, если длины /т.е. параметры t, p, ρ / выражать через радиационные единицы данной среды. Оно также сохраняет свою силу в том случае, когда ЭФЛ детектируются по суммарному световому выходу.

В заключение авторы выражают благодарность Л.С.Охрименко, выполнившей фитирование на ЭВМ по формуле /5/ и поделившейся своими замечаниями после прочтения рукописи настоящего текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биленький С.З., Иваненко И.П. УФН, 1959, 69, с.591.
2. Volkel V. DESY 67/16, Hamburg, 1967; Станев Г., Ванков Х. "Болгарский физический журнал", 1978, 5, №5, с.433.
3. Словинский Б. Автореферат диссертации. ОИЯИ, 1-10932, Дубна, 1977.
4. Словинский Б. и др. ЯФ, 1969, 9, с.120.
5. Коновалова Л.П. и др. ПТЭ, 1961, 6, с.261.
6. Герасимович А.И., Матвеева Я.И. Математическая статистика, "Вышэйшая школа", Минск, 1978.
7. Хеллвиг З. Элементы теории вероятности и математическая статистика /на польском языке/. Варшава, 1977, с.142.
8. Словинский Б. и др. ОИЯИ, Е1-9210, Дубна, 1975.
9. Schmeidler W. Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. I. Lineare Integralgleichungen. Leipzig, 1955. Akademische Verglasgesellschaft, Greest und Portig K-G., p.214.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 мая 1980 года.