СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P1 - 7546

Н.С.Ангелов, В.Г.Гришин, Г.И.Копылов

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРА ИМПУЛЬСОВ π^0 -МЕЗОНОВ ПО СПЕКТРАМ γ -КВАНТОВ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

P1 - 7546

Н.С.Ангелов, В.Г.Гришин, Г.И.Копылов

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРА ИМПУЛЬСОВ π^0 -МЕЗОНОВ ПО СПЕКТРАМ γ -КВАНТОВ

S u m m a r y

A method for reconstruction of longitudinal and transverse momentum distributions of π^0-mesons in inclusive reactions is described.

There exists a unique dependence between the experimental spectra of single γ-quanta from π^0-decays and the real spectra of π^0-mesons. This dependence can be expressed by a Fredholm equation of the first type. The method of statistical regularization appears to be applicable to this incorrect problem.

We have tested the method for rather poor efficiency of γ-detection. The accuracy of the spectra reconstruction has been checked by means of Monte-Carlo imitation of real processes.

The longitudinal and transverse momentum spectra of π^0-mesons have been obtained on the basis of about 3000 γ-quanta in the reaction

$$\pi^- + p \to \gamma + \ldots$$

at the incident π^--momentum $P = (40.00 \pm 0.24)$ GeV/c.

The possibility to apply the method to a wide range of problems in high energy physics is pointed out.

§1. Постановка задачи

В работе [1] показано, что спектр проекций импульсов π^0-мезонов на некоторую ось однозначно связан со спектром проекций импульсов γ-квантов от распада π^0-мезонов на ту же ось. Так, например, спектры продольных импульсов $N(p_{||})$ /π^0-мезонов/ и $n(q_{||})$ / γ-квантов/ связаны уравнением:

$$n(q_{||}) = \int_{p'}^{p''} \frac{N(p_{||})\,dp_{||}}{\sqrt{p_{||}^2 + m_\pi^2}}, \qquad /1/$$

где

$$\begin{cases} p' = q_{||} - m_\pi^2/4q_{||}, \; p'' = \infty & \text{при} \quad q_{||} > 0, \\ p' = -\infty, \; p'' = q_{||} - m_\pi^2/4q_{||} & \text{при} \quad q_{||} < 0. \end{cases}$$

Таким же уравнениям удовлетворяют спектры проекций импульсов на поперечные оси x и z. Эти последние, в свою очередь, однозначно связаны со спектром $\tilde{N}(p_\perp)$ поперечных импульсов:

$$N(p_x) = \frac{1}{\pi} \int_{|p_x|}^{\infty} \tilde{N}(p_\perp)(p_\perp^2 - p_x^2)^{-1/2}\, dp_\perp . \qquad /2/$$

Уравнения /1/, /2/ допускают прямое аналитическое решение. Искомые спектры $N(p_{||})$, $\tilde{N}(p_\perp)$ получаются дифференцированием экспериментально наблюдаемых спектров $n(q_{\parallel})$, $n(q_x)$. Дифференцирование гистограмм - некорректная операция, поэтому некорректной является и задача восстановления спектров π^0-мезонов по спектрам γ-квантов.

§2. *Метод Турчина и его возможности*

В.Ф.Турчин /2/ предложил метод решения некорректных задач, названный им методом статистической регуляризации и получивший дальнейшее развитие в работах /3–5/. Суть его сводится к замене интегрального уравнения:

$$f(y) = \int_a^b K(x,y)\phi(x)\,dx, \quad c \le y \le d \qquad /3/$$

системой алгебраических

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} K_{ji}\,\phi_i \quad (j=1,2,\ldots,m). \qquad /4/$$

Число алгебраических уравнений m не обязательно должно совпадать с числом n неизвестных значений ϕ_i искомой функции $\phi(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, но может быть больше или меньше его. Недостающие уравнения получаются из условий регуляризации. Эти условия используют имеющуюся, как правило, в нашем распоряжении добавочную информацию о функции $\phi(x)$. Нам может быть, например, известно, что функция $\phi(x)$ непрерывна, или что к тому же и ее производная непрерывна, или что непрерывны и вторые производные. Это последнее означает, что сумма квадратов приращений второго порядка функции $\phi(x)$ на интервале (a,b) ограничена каким-то числом, и среди всевозможных наборов надо искать лишь те, которые попадают под это ограничение. Кроме того, когда искомая функция $\phi(x)$ есть плотность вероятности, важно использовать добавочное ограничение: $\phi_j \ge 0$.

Метод статистической регуляризации считает отклонения экспериментально наблюдаемых величин f_j от

суммы $\sum_{i=1}^{n} K_{ji}\,\phi_i$ случайной величиной, распределенной по известному закону - а именно, Гауссову:

$$P(\vec{f}\,|\,\vec{\phi}) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}\left[f_j - \sum_{i=1}^{n} K_{ji}\phi_i\right]^2\right\}. \qquad /5/$$

Информация о свойствах $\phi(x)$ включается следующим образом: векторы $\vec{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n\}$ считаются случайными и распределенными так, что вектор $\vec{\phi}$ тем более вероятен, чем меньше он отклоняется от требования придавать нужную гладкость функции $\phi(x)$. Пусть, например, требование гладкости есть:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)^2 dx \le \omega, \qquad /6/$$

где ω - некоторая выбранная нами численная мера гладкости. Заменяя в /6/ дифференциалы приращениями, запишем его в виде:

$$(\vec{\phi}, \Omega\vec{\phi}) = \sum_{i=3}^{n} \sum_{j=i-2}^{i} \phi_i\, \Omega_{ij}\, \phi_j \le \omega, \qquad /6a/$$

где Ω_{ij} является матрицей коэффициентов при произведениях $\phi_i \phi_j$.

Тогда естественно предположить, что векторы $\vec{\phi}$ распределены по закону:

$$P(\vec{\phi}) = C_\alpha \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(\vec{\phi}, \Omega\vec{\phi})\right\}, \quad \alpha = \frac{n}{\omega} \qquad /7/$$

/априорная вероятность/.

Апостериорная вероятность $P(\vec{\phi}/\vec{f})$ - вероятность получить вектор $\vec{\phi}$ из наблюдений, дающих вектор $\vec{f}$, - дается формулой Бейеса:

$$P(\vec{\phi}/\vec{f}) = \frac{P(\vec{f}/\vec{\phi})\,P(\vec{\phi})}{\int P(\vec{f}/\vec{\phi})\,P(\vec{\phi})\,d\vec{\phi}} \qquad /8/$$

Надо искать вектор $\vec{\phi}$, максимизирующий $P(\vec{\phi}/\vec{f})$. Это значит, что нужно найти минимум квадратичного функционала:

$$\Phi(\vec{\phi}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\sigma_j^2}\,[\,f_j - \sum_{i=1}^{n} K_{ji}\,\phi_i\,]^2 + \frac{a}{2}(\vec{\phi},\Omega\vec{\phi}) \qquad /9/$$

в области положительных ϕ_i.

Отыскание минимума функционала /9/ производится с помощью процедуры STREG, на вход которой подается вектор экспериментально наблюдаемых величин $\vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, вектор погрешностей $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$, значения m, n и ядра K_{ji}, а на выходе получается вектор искомых значений $\vec{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ и их коридор погрешностей в точках $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Можно изменять степень гладкости и ее мажоранту a. если a не задано; процедура минимизирует функционал также и по a. Возможно не только решать интегральные уравнения /системы уравнений/, но и сглаживать одномерные гистограммы, дифференцировать их и т.д. Заметим, что погрешность восстановленной функции $\phi(x)$ может быть в принципе меньше, чем погрешность экспериментальных измерений $f(y)$, потому что при восстановлении используется добавочная информация о гладкости $\phi(x)$.

Насколько нам известно, в физике высоких энергий метод Турчина не использовался. В физике низких энергий он применялся в экспериментах по определению множественности мгновенных нейтронов при спонтанном делении ядер /5/. Между тем существует немало так называемых "обратных" задач, которые мы не решаем из-за их некорректности. Наряду с упомянутым в начале статьи восстановлением импульсных спектров π^{o}-мезонов можно назвать задачи о восстановлении спектра эффективных масс пар $\pi^{\pm}\pi^{o}$ по спектру масс $\pi^{\pm}\gamma$ /6/, об определении спектра энергии K^{o}-мезонов по наблюдениям части продуктов их распада /7,8/, о восстановлении углового спектра π^{o}-мезонов /8/. Крайне интересна задача о восстановлении в инклюзивных реакциях $a+b \to \pi^{o}$ + "что-угодно" структурной /двумерной/ функции π^{o}-мезона. Наша работа является первой попыткой решения таких задач.

§3. Переход от интегральных уравнений к алгебраическим

Для применения метода Турчина надо интеграл /3/ заменить суммой, взятой в n опорных точках x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Количество опорных точек в варианте подпрограммы STREG, написанном на ФОРТРАНе, достигает ста. Расстояние между опорными точками бралось постоянным; интервал интегрирования по x был разбит на отрезки $(x_i - \frac{1}{2}\Delta x,\ x_i + \frac{1}{2}\Delta x)$ вокруг опорных точек x_i:

$$\int_a^b K(x,y)\phi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} K(x,y)\phi(x)\,dx. \qquad /10/$$

На этих отрезках $\phi(x)$ считалось постоянным: $\phi(x) = \phi(x_i)$, поэтому

$$\int_a^b K(x,y)\,\phi(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \int_{x_i-\frac{\Delta x}{2}}^{x_i+\frac{\Delta x}{2}} K(x,y)\,dx. \qquad /11/$$

Затем на каждом отрезке брались значения $K(x,y)$ в трех точках $x_i \pm \frac{\Delta x}{2}$, x_i, и интеграл от $K(x,y)$ вычислялся по формуле парабол. Когда на интервале $(x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2})$ ядро $K(x,y)$ испытывало скачок от нуля до конечных значений, как это имеет место в уравнении /1/ при $p_{\parallel} = p'$ или p'' и в уравнении /2/ при $p_x = p_\perp$, то этот интервал сжимали настолько, чтобы внутри него $K(x,y)$ менялось непрерывно. Например, когда в /2/ оказывалось, что в одной из опорных точек $p_\perp - \frac{\Delta p_\perp}{2} < p_x$, то парабола в /11/ проводилась через точки $p_x + \epsilon$, $p_\perp$, $p_\perp + \frac{1}{2}\Delta p_\perp$, где $\epsilon \ll 1$.

§4. Проверка работы программы

В работе[5] возможности метода исследовались путем математического моделирования. Мы также прибегли к этому методу. Бралось интегральное уравнение:

$$n(q) = \int_{p'}^{\infty} N(p) K(q,p)\, dp, \qquad /12/$$

где ядро $K(q,p) = (p^2 + M^2)^{-1/2}$, $M = 1$ и $p' = q - q_0^2/q$.
Мы полагали спектр $N(p)$ равным:

$$N(p) = p^k (p^2 + M^2)^{1/2} \exp(-p/p_0), \qquad /13/$$

где $k = 0, 1$, $p_0 = 1$. В этом случае $n(q)$ вычисляется аналитически:

$$n(q) = p_0 \exp(-p'/p_0) \quad (k=0)$$

$$n(q) = p_0 (p' + p_0) \exp(-p'/p_0) \quad (k=1). \qquad /14/$$

Затем вносили в $n(q)$ случайные ошибки $\Delta n = 5\%$, 10%, 20% и сравнивали получаемый спектр $N(p)$ с заданным в /13/. На *рис. 1-4* показаны результаты этого сравнения. Видно, что в пределах однократной ошибки получаемый спектр $N(p)$ совпадает с заданным.

Так как наша основная задача состояла в восстановлении спектров π^0-мезонов, то для более конкретной проверки метода мы использовали экспериментальные спектры π^+-мезонов, полученные в реакции:

$$\pi^- + p \to \pi^+ + \text{что угодно} \qquad /15/$$

при энергии первичного π^--мезона, равной 40 *ГэВ*. Для этого было взято около 5000 π^+-мезонов и для каждого из них был смоделирован распад на два γ-кванта, как если бы это был π^0-мезон. Для этой цели программа генерировала два случайных числа r_1 и r_2, распределенных равномерно в интервале /0,1/. Отсюда получали косинус полярного угла вылета γ-кванта η и его азимутальный угол ϕ:

$$\eta = 2r_1 - 1, \quad \phi = 2\pi r_2.$$

По ним вычислялся импульс фиктивного γ-кванта в системе покоя π^+-мезона:

$$\vec{p}\,' = \frac{m_\pi}{2} \{ \sqrt{1-\eta^2} \cos\phi, \eta, \sqrt{1-\eta^2} \sin\phi \}.$$

Затем, зная импульс π^+-мезона ($\vec{p}_\pi$), переводили импульс этого γ-кванта в систему центра инерции реакции /15/:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{p}_\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\vec{p}_\pi \vec{p}\,'}{m_\pi (m_\pi + \omega_\pi)} \right). \qquad /16/$$

Полученные спектры γ-квантов вводились в программу STREG и восстановленные спектры π^0-мезонов сравнивались с исходными спектрами π^+-мезонов. В пределах однократной ошибки оба спектра совпадают /*рис. 5*/.

§5. *Восстановление спектров продольных и поперечных импульсов π^0 -мезонов*

Для восстановления спектров π^0 -мезонов использовались спектры γ -квантов, полученных в реакции:

$$\pi^- + p \to \gamma + \text{что угодно}$$

при облучении двухметровой пропановой пузырьковой камеры ОИЯИ пучком π^- -мезонов с импульсом 40,00$\pm$0,24 *ГэВ/с* на серпуховском ускорителе. Методика обработки событий с γ -квантами, способы разделения каналов реакции и эффективность регистрации γ -квантов приведены в работах /9,10/.

На *рис. 6,7* показаны продольные спектры γ -квантов в системе центра инерции и спектр проекций импульсов на одну из поперечных осей (x). Средняя эффективность регистрации одного γ -кванта $\epsilon \sim 20\%$. В спектры включены все γ -кванты от всех событий, в том числе от событий, в которых зарегистрировано несколько γ -квантов.

Вычисления производились на машинах СДС-1604А, БЭСМ-6 и СДС-6200. Варьировалось число опорных точек как в экспериментальных спектрах γ -квантов, так и в искомых спектрах π^0 -мезонов, менялась также протяженность спектров. Из уравнений /1/ следует, что если спектр $N(p_{||})$ ограничен интервалом $0 \le p_{||} \le \bar{p}$, то спектр $n(q_{||})$ ограничен интервалом $-\frac{m_\pi}{2} \le q \le \frac{1}{2}(\bar{p} + \sqrt{\bar{p}^2 + m_\pi^2})$;

при высоких энергиях взаимодействия длины спектров $N(p_{||})$ и $n(q_{||})$ практически совпадают. Это относится и к спектрам $\tilde{N}(p_\perp)$, $n(q_x)$. Поэтому мы брали длину искомого спектра $N(p_{||})$, $\tilde{N}(p_\perp)$ примерно равной длине спектров γ -квантов или несколько больше нее. Последние тянутся практически до ∞, но их следует обрывать на значениях $q_{||}$, при которых разброс $n(q_{||})$ становится сравнимым с самими $n(q_{||})$ /иначе на концах восстанавливаемого спектра $N(p_{||})$ возникают физически бессмысленные подъемы/. Результаты получались сразу в виде графиков, вместе с коридором ошибок. На *рис. 8* показаны результаты восстановления продольного спектра импульсов π^0 -мезонов в системе центра инерции. Для сравнения рядом показан такой же спектр импульсов π^+ -мезонов, измеренный непосредственно и нормированный на ту же площадь, что и для π^0 -мезонов.

Спектр поперечных импульсов получали двумя путями. Первый путь состоял в восстановлении спектра $N(p_x)$ /*рис. 9*/ проекций импульсов π^0 -мезонов на ось x по спектру $n(q_x)$ проекций импульсов γ -квантов на ту же ось с помощью решения уравнения /1/. Затем, решая /2/, восстанавливали спектр $\tilde{N}(p_\perp)$. Второй путь заключался в решении интегрального уравнения, непосредственно связывающего $\tilde{N}(p_\perp)$ с $n(q_x)$:

$$n(q_x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{q_x - m_\pi^2/4q_x}^{\infty} \tilde{N}(p_\perp)(p_\perp^2 + m_\pi^2)^{-1/2} F(k, \phi)\, dp_\perp , \quad /17/$$

где $F(k, \phi)$ - эллиптическая функция, $k = \dfrac{p_\perp}{\sqrt{p_\perp^2 + m_\pi^2}}$;

$\cos\phi = (q_x - m_\pi^2/4q_x)/p_\perp$.

/подробнее см. работу /1/, формулы /34/, /35//. Результаты обоих решений показаны на *рис. 10*.

Выводы

1. Математически некорректная задача восстановления спектров π^0 -мезонов по спектрам γ -квантов может быть решена методом статистической регуляризации Турчина.

2. Точность восстанавливаемого таким образом спектра π^0 -мезонов сравнима с точностью экспериментального определения спектров заряженных мезонов.

3. По нашему убеждению, метод может оказаться пригодным для решения более сложных обратных задач экспериментальной физики частиц высоких энергий.

Литература

1. G.I.Kopylov. Nuclear Physics, B52, 126, 1973.
2. В.Ф.Турчин. Ж.вычисл.матем. и мат.физики, 8, 230 /1968/.
3. В.Ф.Турчин, В.З.Нозик. Изв. АН СССР, сер. "Физика атмосферы и океана", 5, 29, 1969.
4. В.Ф.Турчин, В.П.Козлов, М.С.Малкевич, УФН, 102, 345, 1970.
5. M.Dakowski et al. JINR, E11-6969, Dubna, 1973.
6. В.Г.Гришин, Д.К.Копылова и др. ЯФ, 12, 756, 1970.
7. Г.Г.Тахтамышев. Препринт ОИЯИ, 2543, Дубна, 1966.
8. Г.И.Копылов. Основы кинематики резонансов. "Наука", Москва, 1970, гл. 5.
9. А.У.Абдурахимов, Н.Ангелов и др. Препринт ОИЯИ, 1-6967, Дубна, 1973.
10. А.У.Абдурахимов, Н.Ангелов и др. Препринт ОИЯИ, P1-6928, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1973 года.

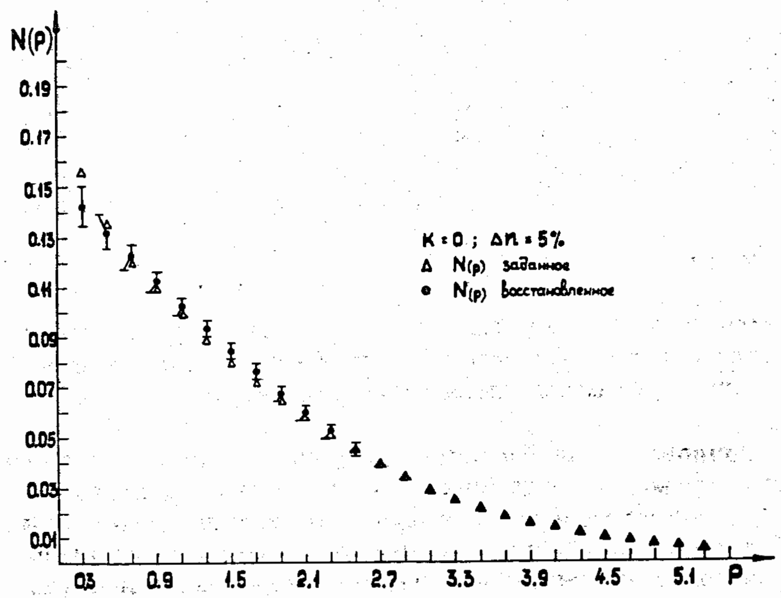

Рис. 1

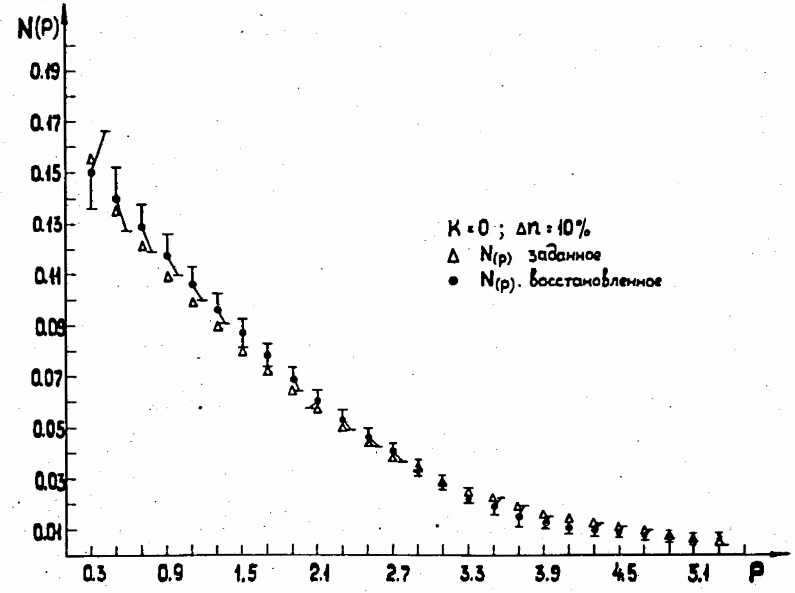

Рис. 2

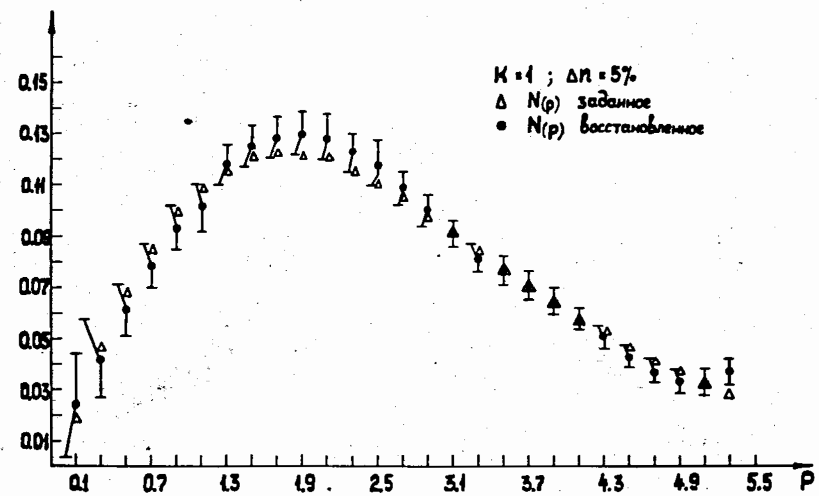

Рис. 3

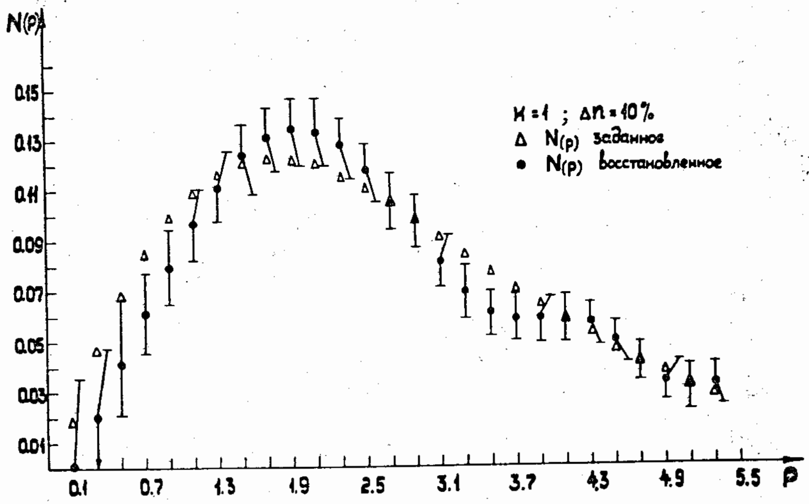

Рис. 4

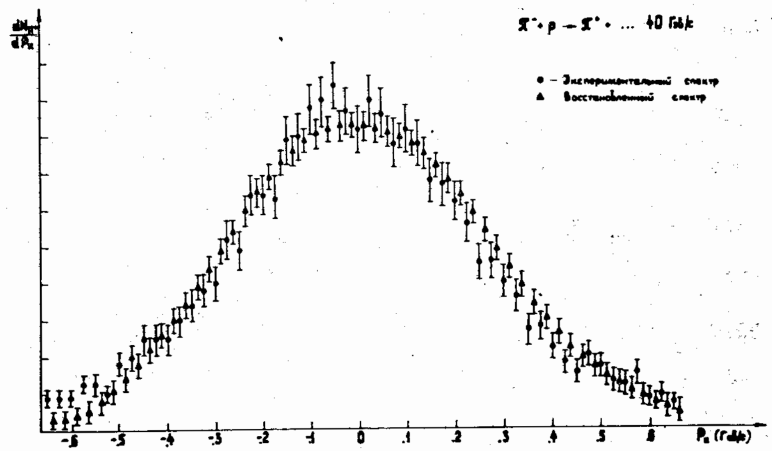

Рис. 5

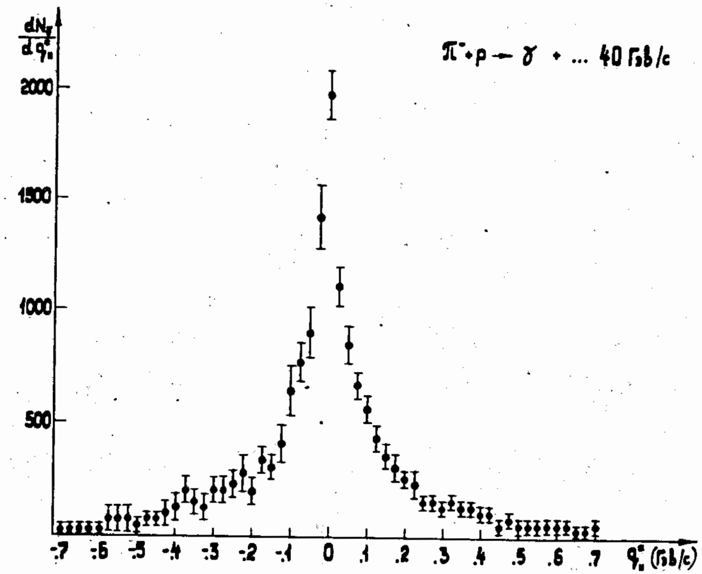

Рис. 6

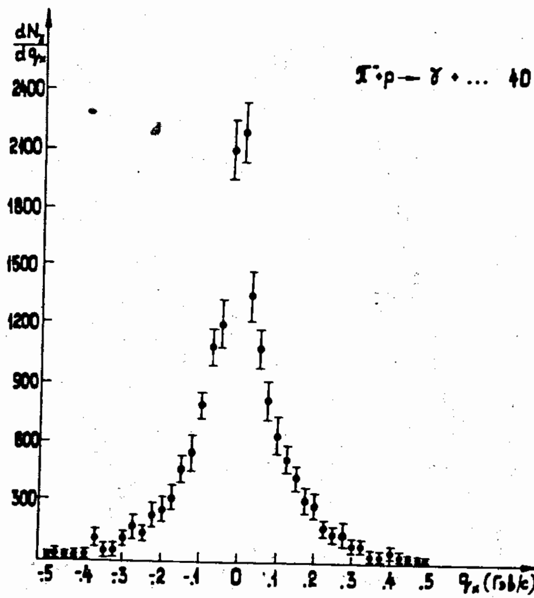

Рис. 7

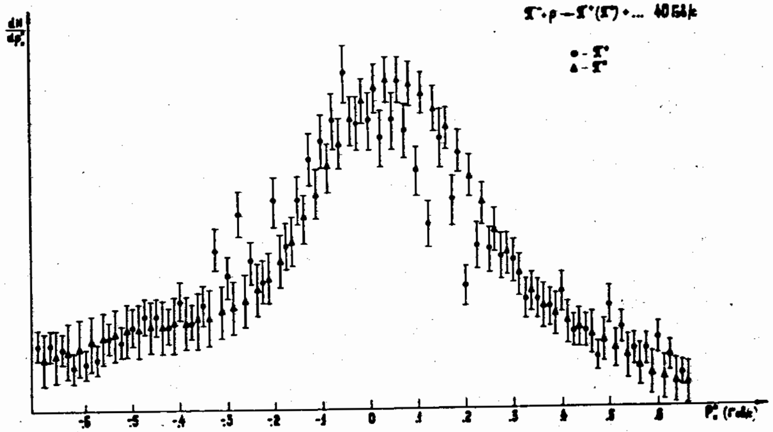

Рис. 8

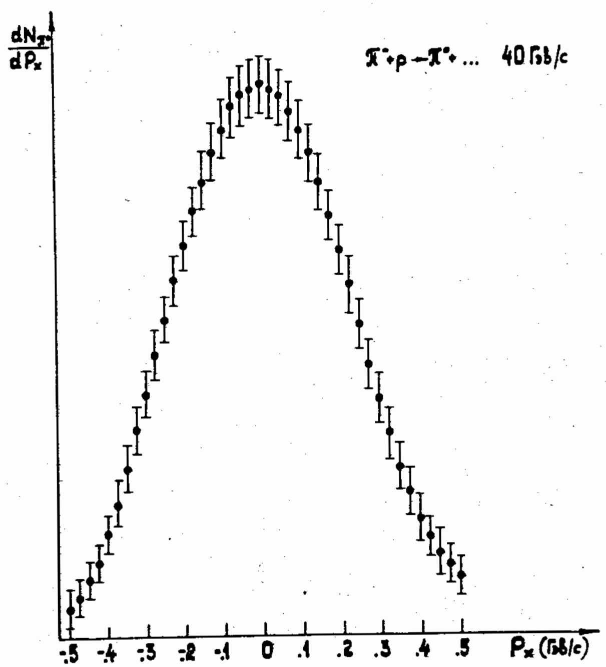

Рис. 9

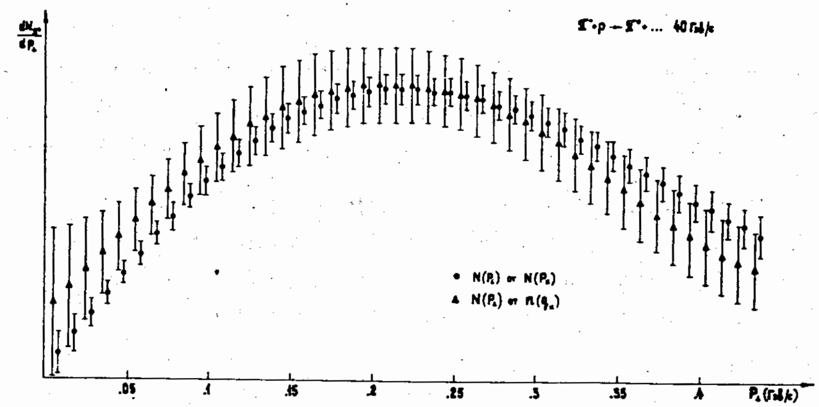

Рис. 10