

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С 344.1 р
В - 493

10/18-73

P1 - 7155

3306/2-73

В.Б.Виноградов, М.Э.Дохтманов,
В.Г.Одинцов, А.Пазман

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ
ПРИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ОБНАРУЖЕНИИ
НОВЫХ РЕЗОНАНСОВ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

P1 - 7155

В.Б.Виноградов, М.Э.Дохтманов,
В.Г.Одинцов, А.Пазман*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ
ПРИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ОБНАРУЖЕНИИ
НОВЫХ РЕЗОНАНСОВ

* Институт теории измерений САН, Братислава, ЧССР

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Виноградов В.Б., Дохтманов М.Э., Одинцов В.Г.,
Пазман А.

PI - 7155

Определение статистической значимости при экспериментальном
обнаружении новых резонансов

Исследован вопрос о статистической значимости при экспериментальном обнаружении новых резонансов в физике высоких энергий. Выведена формула для определения вероятности статистической флуктуации как меры статистической значимости наблюдаемого эффекта (пика гистограммы), получены численные значения вероятностей для практически интересных случаев и проанализирована статистическая значимость 20 экспериментов, в которых впервые было заявлено о существовании новых резонансов.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Vinogradov V.B., Dokhtmanov M.E.,
Odintsov V.G., Pazman A.

PI - 7155

Determination of Statistical Significance
in Experiments on Detection of New
Resonances

The problem of statistical significance in experimental detection of new resonances in high energy physics is studied. The formula is derived for determination of statistical fluctuation probability as the measure of statistical significance of the effect observed (histogram peak). Numerical values of probabilities are obtained for practically interesting cases and the statistical significance of 20 experiments is analysed, which prove, for the first time, the existence of new resonances.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

1. Введение

В настоящее время одним из актуальных направлений в физике высоких энергий является поиск новых частиц и резонансов. Так, согласно обзору о свойствах частиц /1/, в период с 1964 по 1971 г.г. анализу характеристик частиц и поиску новых элементарных частиц /резонансов/ было посвящено свыше 3000 экспериментальных исследований. При этом количество новых обнаруженных мезонных и барионных резонансов превысило 100.

Одним из основных методов обнаружения новых резонансов является анализ представленных в виде гистограмм распределений событий исследуемой реакции по эффективным или недостающим массам различных комбинаций вторичных частиц. Возможное существование новой частицы /резонанса/ обнаруживается в результате наблюдения избытка событий /пика/ над фоновой кривой. При этом эффект образования новой частицы может имитироваться статистической флуктуацией. Поэтому естественен интерес к вопросу о вероятности такой флуктуации как меры статистической значимости наблюдаемого эффекта - пика гистограммы.

Однако до сих пор не существует единого критерия статистической значимости эффекта. В одних работах, например, /2,3/ оценивают статистическую значимость с помощью χ^2 -критерия, в других работах приводят число стандартных отклонений h , причем величину h определяют различным образом или как отношение

$N_{\Phi} / \sqrt{N_{\Phi}}^{4,5,6/}$ или как отношение $N_{\Phi} / \sqrt{(N_{\Phi} + N_{\Phi})}^{7-9/}$ * .
 В ряде случаев /10-12/ одновременно приводят величины $P(\chi^2)$ и h .

Более того, в работах 1960-1961 г.г., когда впервые были обнаружены резонансы Y^* (1385) /13/, K^* (890) /14/, ρ (765) /15/, ω (783) /16/, η (548) /17/ и др. как действительно новые частицы, о чем свидетельствовали пики гистограмм, а не как резонансы в полном сечении, статистическая значимость этих пиков не определялась. Лишь к 1968 г., когда количество новых заявленных резонансов достигло большой величины и существование многих из них не подтвердилось в последующих экспериментах, появились работы /18,19/, в которых рассматривалась возможность статистических флюктуаций и был сделан вывод, что для того чтобы быть уверенным в истинности нового резонанса надо иметь по меньшей мере 5 стандартных отклонений.

С тех пор в сообщениях об экспериментальном обнаружении новых резонансов, как правило, приводится одна из упомянутых выше оценок статистической значимости.

Однако величины h недостаточно для корректной оценки вероятности статистической флюктуации. Эта вероятность, как будет показано ниже, зависит, помимо величины h , от количества ячеек гистограммы, от числа ячеек, в которых наблюдается пик, и, вообще говоря, формы фоновой кривой, относительно которой производится подсчет эффекта. Что касается критерия χ^2 , то он характеризует степень согласия экспериментальной гистограммы с фоновой кривой в целом и недостаточно чувствителен к статистической флюктуации в виде узкого пика.

В настоящей работе выведена формула для определения вероятности статистической флюктуации, получены численные значения вероятностей для практически интересных случаев и проанализирована статистическая

* Здесь N_{Φ} - количество событий над фоновой кривой /эффект/, N_{Φ} - количество событий под фоновой кривой /фон/, ожидаемое количество событий.

значимость ряда экспериментов, в которых впервые было заявлено о существовании новых резонансов / $\approx 20\%$ резонансов, приведенных в обзоре характеристик частиц /11/.

2. Определение статистической значимости пика гистограммы

Введем следующие обозначения:

N_T - количество событий в гистограмме, k - количество ячеек гистограммы, s - количество ячеек гистограммы, в которых наблюдается пик, $\langle N_i \rangle = \int_{A_i} f(M) dM$ - ожидаемое количество событий в ячейке A_i , $f(M)$ - выражение для фоновой кривой, M - параметр, например, эффективная масса системы частиц.

Вероятность того, что в ячейках гистограммы будет находиться N_1, \dots, N_k событий ($\sum_{i=1}^k N_i = N_T$) равна /20/

$$P(N_1, \dots, N_k) = \frac{N_T!}{N_1! \dots N_k!} \left(\frac{\langle N_1 \rangle}{N_T} \right)^{N_1} \dots \left(\frac{\langle N_k \rangle}{N_T} \right)^{N_k} k! /$$

Учитывая, что $\langle N_i \rangle \ll N_T$, в выражениях, определяющих дисперсии и ковариации для распределения /1/, можно пренебречь членами порядка $(\langle N_i \rangle / N_T)^2$ по сравнению с членами порядка $\langle N_i \rangle / N_T^{1/2}$. Тогда случайные величины N_1, \dots, N_k можно считать независимыми и приближенно распределенными по нормальному закону со средними $\langle N_i \rangle$ и дисперсиями $\langle N_i \rangle$.

Пусть группа событий Γ_i находится в s соседних ячейках A_i, \dots, A_{i+s-1} и количество событий в этой группе равно $\nu_i = N_i + \dots + N_{i+s-1}$. Так как это сумма нормально распределенных величин, то величина ν_i также распределена по нормальному закону со средним значением $\langle \nu_i \rangle = \langle N_i \rangle + \dots + \langle N_{i+s-1} \rangle$ и с дисперсией $\sigma^2(\nu_i) = \langle \nu_i \rangle$.

Обозначим через B_i следующее случайное событие:

в группу Γ_i попадает не менее $\langle v_i \rangle + h \sqrt{\langle v_i \rangle}$ событий, где h - заданное положительное число.

Вероятность статистической флюктуации на уровне h стандартных отклонений, т.е. вероятность того, что хотя бы в одной группе из r групп $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$ ($r=k-s+1$) количество событий не менее $\langle v_i \rangle + h \sqrt{\langle v_i \rangle}$ равна*

$$P(B_1 V B_2 V \dots V B_r) = 1 - \int_{-\infty}^h \dots \int_{-\infty}^h \phi(u_1, \dots, u_r) du_1 \dots du_r \quad /2/$$

Здесь

$$\phi(u_1, \dots, u_r) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sqrt{\rho}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \rho^{-1} u_i u_j\right) -$$

- многомерная нормальная плотность вероятности случайных величин $u_i = (v_i - \langle v_i \rangle) / \sqrt{\langle v_i \rangle}$, средние значения которых равны нулю, дисперсии - единице, коэффициенты корреляции между величинами u_i и u_j - ρ_{ij} . Величина ρ - детерминант корреляционной матрицы $\{\rho_{ij}\}$, ρ^{-1} - элемент матрицы, обратной к матрице $\{\rho_{ij}\}$.

Коэффициент корреляции между величинами u_i и u_j равен /22/:

$$\rho_{ij} = \frac{\langle (u_i - \langle u_i \rangle)(u_j - \langle u_j \rangle) \rangle}{\sigma(u_i)\sigma(u_j)} = \frac{\langle (v_i - \langle v_i \rangle)(v_j - \langle v_j \rangle) \rangle}{\sigma(v_i)\sigma(v_j)}$$

$$= v_{ij} / \sqrt{\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle},$$

где $v_{ij} = \sum_{k=j}^{i+s-1} \langle N_k \rangle$ - количество событий, находящихся одновременно в группах Γ_i и Γ_j .

Таким образом, вероятность статистической флюктуации зависит от величин h, k, s и формы фоновой кривой /через коэффициенты корреляции ρ_{jj} /, т.е.

$$P = f(h, k, s, \rho_{ij}).$$

* Выражение " $B_i V B_j$ " обозначает, что произойдет по крайней мере одно из событий B_i или B_j , а выражение " $B_i \wedge B_j$ " - " B_i и B_j ".

3. Вычисление вероятности статистической флюктуации

Для вычисления вероятности $P = f(h, k, s, \rho_{ij})$ рассмотрим отдельно случаи $s=1$ и $s \geq 2$.

В случае $s=1$ величины u_1, \dots, u_k независимы. Многомерный интеграл /2/ сводится к произведению одномерных интегралов $\Phi(h)$:

$$P(B_1 V \dots V B_k) = 1 - [\Phi(h)]^k, \quad /3/$$

где $\Phi(h) = \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция нормального распределения.

В случае $s \geq 2$ прямое вычисление многомерного интеграла /2/ при больших r практически невозможно. Поэтому мы воспользовались следующим подходом: определили верхнюю и нижнюю границы /2/. Из общих теорем теории вероятностей /20/ следует, что

$$P(B_1 V B_2 V \dots V B_r) = \sum_{i=1}^r P(B_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r P(B_i \wedge B_j) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \sum_{\ell=j+1}^r P(B_i \wedge B_j \wedge B_\ell) + \dots$$

$$+ (-1)^{k-s} P(B_1 \wedge \dots \wedge B_r). \quad /4/$$

Сумма любых первых m членов в выражении /4/ ограничивает /2/ снизу, если m четно, и сверху, если m нечетно.

Для оценки /2/ мы ограничились только тремя первыми членами суммы /4/. При этом для вычисления величин $P(B_i \wedge B_j)$ и $P(B_i \wedge B_j \wedge B_\ell)$ мы использовали выражения, приведенные в /23/

$$P(B_i) = F(h), \quad \text{где } F(h) = 1 - \Phi(h), \quad /5/$$

$$P(B_i \wedge B_j) = \begin{cases} F(h)^2, & \text{если } \rho_{ij} = 0. \\ F(h) - 2T(h, a_{ij}), & \text{если } \rho_{ij} \neq 0. \end{cases} \quad /6/$$

$$P(B_i \wedge B_j \wedge B_l) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(h)^3, \text{ если } \rho_{ij} = \rho_{jl} = 0 \\ F(h)[F(h) - 2T(h, a_{ij})], \text{ если } \rho_{ij} \neq 0 \quad \rho_{jl} = 0 \\ F(h)[F(h) - 2T(h, a_{jl})], \text{ если } \rho_{ij} = 0 \quad \rho_{jl} \neq 0 \\ \frac{3}{2} F(h) - [T(h, a_{ij}) + T(h, a_{il}) + T(h, a_{jl})] + \\ + 2[S(h, a_{ij}, b_{ij}) + S(h, a_{il}, b_{il}) + S(h, a_{jl}, b_{jl})] \\ - 1/2, \text{ если} \\ \rho_{ij} \neq 0 \text{ и } \rho_{jl} \neq 0. \end{array} \right. \quad /7/$$

Здесь

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{1 - \rho_{ij}}{1 + \rho_{ij}}}, \quad b_{ij} = (1 + \rho_{ij} - \rho_{il} - \rho_{jl}) / c^{1/2},$$

$$c = 1 - \rho_{ij}^2 - \rho_{il}^2 - \rho_{jl}^2 + 2\rho_{ij}\rho_{il}\rho_{jl},$$

$$S(h, a, b) = \int_{-\infty}^h T(ax, b) Z(x) dx,$$

$$T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^h \frac{\exp[-h^2(1+x^2)/2]}{1+x^2} dx,$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).$$

Для вычисления вероятности /2/ с использованием формул /5/ - /7/ была составлена программа на языке ФОРТРАН для ЭВМ БЭСМ-6. Правильность вычислений одномерного $T(h, a)$ и двумерного $S(h, a, b)$ интегралов была проверена для различных значений параметров

h, a, b путем сравнения получаемых с помощью данной программы величин интегралов с табличными значениями, приведенными в /25/. Расчеты вероятностей производились для 5 различных фоновых кривых, показанных на рис. 1, при $s=1 \div 6$ и $h = 3 \div 8$. Эти кривые были представлены в виде гистограмм, содержащих по 40 ячеек.

Точность оценки вероятности /2/ при использовании только трех членов /4/ в основном была не хуже 5%. При увеличении h точность оценки увеличивается, и для вычисления вероятностей с $h \geq 5$ достаточно было использовать только 2 члена, что существенно увеличивало скорость вычислений на ЭВМ.

Результаты, полученные для каждой кривой, оказались совпадающими в пределах 1% погрешности. Это связано со слабой зависимостью коэффициентов корреляции ρ_{ij} , содержащих информацию о фоновой кривой, от формы фоновой кривой.

Усредненные результаты приведены в таблице 1. Как видно, вероятность статистической флюктуации при увеличении h от 3 до 8 уменьшается в 10^{12} раз. В меньшей степени эта вероятность зависит от числа ячеек, в которых наблюдается пик, и, например, при $h=5$ изменяется от $1,15 \cdot 10^{-5}$ при $s=1$ до $0,93 \cdot 10^{-5}$ при $s=6$, т.е. всего на 20%.

Хотя эти результаты получены для числа ячеек в гистограмме, равном 40, они легко могут быть распространены на гистограммы с любым числом ячеек, поскольку в пределах 5%-ной погрешности вероятность статистической флюктуации, вычисляемая по формулам /3/, /5/, /7/, прямо пропорциональна величине g .

Поэтому искомое значение вероятности

$$P(h, k, s) = (k-s+1) P_T(h, 40, s) / 40,$$

где P_T - приведенное в табл. 1 значение вероятности.

В таблице 1 представлены вероятности для $h = 3 - 8$ с шагом $\Delta h = 0,5$. Вероятности для промежуточных зна-

* Исключением являлись случаи $h=3 \quad s=5,6$, для которых точность оценки /2/ при трех членах составляла 8 и 14 %, соответственно.

чений h могут быть получены путем линейной интерполяции логарифмов табличных значений. Как было проверено эмпирически, точность такой интерполяции для данной таблицы не хуже 5%. Оценка вероятности статистической флюктуации в большой степени зависит от правильной оценки величины $h = N_{\Phi} / \sqrt{N_{\Phi}}$, которая, в свою очередь, определяется правильной оценкой количества фоновых событий. Зависимость относительной погрешности величины вероятности флюктуации от величины $\Delta N_{\Phi} / N_{\Phi}$ можно представить следующей приближенной формулой:

$$\Delta P / P = 2,9(1 + 2 \frac{N_{\Phi}}{N_{\Phi}}) h \frac{\Delta N_{\Phi}}{N_{\Phi}}$$

Согласно этой формуле, изменение оценки количества фоновых событий всего лишь на 10% приводит к изменению оценки вероятности статистической флюктуации более чем в 4 раза /при $h = 5$ и $\frac{N_{\Phi}}{N_{\Phi}} = 1$ /.

При малом количестве событий в отдельных ячейках гистограммы ($\nu_i \leq 20$) результат, приведенный в таблице 1, может оказаться заниженным, особенно при больших h ($h \geq 5$), в несколько раз. Это связано с аппроксимацией распределения /1/ нормальным распределением. Поэтому в случае наблюдения пика в ячейках с малым количеством фоновых событий для корректной оценки вероятности необходимо заменить формулы /5/ - /7/ на формулы /5'/ - /7'/, вытекающие из аппроксимации распределения /1/ пуассоновским распределением:

$$P(B_i) = 1 - \sum_{\nu_i=0}^{h_i} \frac{\langle \nu_i \rangle^{\nu_i}}{\nu_i!} e^{-\langle \nu_i \rangle} \quad /5'/$$

где h_i - целая часть числа $\langle \nu_i \rangle + h \sqrt{\langle \nu_i \rangle}$.

$$P(B_i \wedge B_j) = \begin{cases} P(B_i)P(B_j), & \text{если } \rho_{ij} = 0, \\ 1 - P(B_i^c) - P(B_j^c) + P(B_i^c \wedge B_j^c), & /6'/ \end{cases}$$

если $\rho_{ij} \neq 0$,

где
$$P(B_i^c) = \sum_{\nu_i=0}^{h_i} \frac{\langle \nu_i \rangle^{\nu_i}}{\nu_i!} e^{-\langle \nu_i \rangle}$$
,

$$P(B_i^c \wedge B_j^c) = \sum_{\mu_i=0}^{h_i} \sum_{\nu_{ij}=0}^{h_i - \mu_i} \sum_{\mu_j=0}^{h_i - \nu_{ij}} \frac{\langle \mu_i \rangle^{\mu_i}}{\mu_i!} \frac{\langle \nu_{ij} \rangle^{\nu_{ij}}}{\nu_{ij}!} \frac{\langle \mu_j \rangle^{\mu_j}}{\mu_j!} \times$$

$$\times \exp [-(\langle \mu_i \rangle + \langle \nu_{ij} \rangle + \langle \mu_j \rangle)],$$

$$\mu_i = \nu_i - \nu_{ij} \quad \mu_j = \nu_j - \nu_{ij}$$

ν_{ij} - число общих событий в i -ой и j -ой группах,

$$P(B_i \wedge B_j \wedge B_l) = \begin{cases} P(B_i)P(B_j)P(B_l), & \text{если } \rho_{ij} = \rho_{jl} = 0, \\ P(B_i)P(B_j \wedge B_l), & \text{если } \rho_{ij} = 0 \quad \rho_{jl} \neq 0, \\ P(B_l)P(B_i \wedge B_j), & \text{если } \rho_{ij} \neq 0 \quad \rho_{jl} = 0, \\ 1 - [P(B_i^c) + P(B_j^c) + P(B_l^c)] + [P(B_i^c \wedge B_j^c) + \\ + P(B_j^c \wedge B_l^c) + P(B_i^c \wedge B_l^c)] - P(B_i^c \wedge B_j^c \wedge B_l^c), & /7'/ \end{cases}$$

если $\rho_{ij} \neq 0$ и $\rho_{il} \neq 0$,
где

$$P(B_i^c \wedge B_j^c \wedge B_l^c) = e^{-\langle \mu_i \rangle - \langle \mu_{ij} \rangle - \langle \nu_{ijl} \rangle - \langle \mu_{il} \rangle - \langle \mu_l \rangle} \times$$

$$\sum_{\mu_i} \sum_{\mu_{ij}} \sum_{\nu_{ijl}} \sum_{\mu_{jl}} \sum_{\mu_l} \frac{\langle \mu_i \rangle^{\mu_i}}{\mu_i!} \frac{\langle \mu_{ij} \rangle^{\mu_{ij}}}{\mu_{ij}!} \frac{\langle \nu_{ijl} \rangle^{\nu_{ijl}}}{\nu_{ijl}!} \times$$

$$\times \frac{\langle \mu_{jl} \rangle^{\mu_{jl}}}{\mu_{jl}!} \frac{\langle \mu_l \rangle^{\mu_l}}{\mu_l!} \quad /8'/$$

ν_{ijl} - число общих событий в i, j и l -ой группах,

$$\mu_{ij} = \nu_{ij} - \nu_{ijl}, \quad \mu_{jl} = \nu_{jl} - \nu_{ijl}.$$

Суммирование в формуле /8/ происходит при условии, что

$$\mu_i + \mu_{ij} + \nu_{ijl} \leq h_i, \quad \mu_{ij} + \nu_{ijl} + \mu_{jl} \leq h_j,$$

$$\nu_{ijl} + \mu_{jl} + \mu_l \leq h_l.$$

4. Результаты анализа статистической значимости ряда экспериментов, в которых были обнаружены новые резонансы

В таблице 2 приведены данные ряда экспериментов, в которых были обнаружены новые резонансы / $\approx 20\%$ резонансов, приведенных в обзоре характеристик частиц /1/. Как видно из этой таблицы, величина h меняется в пределах 3 - 10, количество ячеек гистограммы составляет 10-80, количество ячеек, в которых наблюдается пик, равно 1-6. В предпоследней колонке таблицы 2 приведены определенные с помощью таблицы 1 величины вероятностей статистических флуктуаций, которые изменяются в пределах от 10^{-14} до 10^{-2} , составляя в среднем 10^{-6} .

Знание величины вероятности статистической флуктуации в данной гистограмме и полного количества гистограмм, получаемых в мире, позволяет непосредственно оценить возможность наблюдения данной флуктуации. Так, например, в 1967 году было получено около 15000 гистограмм /18/, а в настоящее время количество гистограмм составляет, по-видимому, несколько сотен тысяч. Поэтому представляется возможным наблюдение статистической флуктуации на уровне 10^{-5} .

Необходимо подчеркнуть, что при определении статистической значимости поискового эксперимента ключевыми вопросами остаются корректность определения фона и отсутствие инструментальных эффектов, вызывающих появление ложных пиков. Поэтому ряд резонан-

сов, например, приведенный в таблице 2 $\sigma(410)$ -мезон, не подтверждается в последующих экспериментах, хотя вероятность статистической флуктуации при заявленных параметрах пиков пренебрежимо мала /для $\sigma(410)$ -мезона $P < 10^{-14}$ /.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР В.П.Джелепову и доктору физико-математических наук Ю.А.Будагову за инициирование данной работы, постоянное внимание и помощь на всех этапах ее проведения и В.Г.Яцюку за полезные обсуждения.

Литература

1. P.Soding et al. Rev.Part.Prop. Phys.Lett., 39B, 1, 1972.
2. W.Selove et al. Phys.Rev.Lett., 9, 272, 1962.
3. N.P.Samios et al. Phys.Rev.Lett., 9, 139, 1962.
4. M.Deutschmann et al. Phys.Lett., 18, 351, 1965.
5. В.М.Шехтер. Материалы 4 зимней школы по теории ядра и физике высоких энергий, часть II, ФТИ АН СССР, Ленинград, 1969.
6. Ю.А.Будагов и др. ЯФ 14, 1201, 1971.
7. M.Golberg et al. Phys.Rev.Lett., 12, 1546, 1964.
8. N.M.Cason et al. Phys.Rev.Lett., 18, 880, 1967.
9. M.Goldberg et al. Phys.Lett., 17, 354, 1965.
10. L.Bertanza et al. Phys.Rev.Lett., 9, 180, 1962.
11. W.Kienzle et al. Phys.Lett., 19, 438, 1965.
12. G.Chikovani et al. Phys.Lett., 22, 233, 1966.
13. M.Alston et al. Phys.Rev.Lett., 5, 520, 1960.
14. M.Alston et al. Phys.Rev.Lett., 6, 300, 1961.
15. A.R.Erwin et al. Phys.Rev.Lett., 9, 34, 1962.
16. B.C.Maglic et al. Phys.Rev.Lett., 7, 178, 1961.
17. A.Pevzner et al. Phys.Rev.Lett., 7, 421, 1961.
18. A.H.Rosenfeld. Preprint UCRL-18266, 1968.
19. V.French. Proc. XIV ICHEP, Vienna, 1968.
20. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Изд-во "Мир", Москва, 1964.
21. С.Уилкс. Математическая статистика. Изд-во "Наука", Москва, 1967.
22. Г.Краммер. Математические методы статистики. ГИИЛ, Москва, 1948.
23. О.Б.Оуэн. Сборник статистических таблиц. ВЦ АН СССР, Москва, 1966.

24. M. Alston et al. Phys.Rev.Lett., 6, 698, 1961.
 25. M. Abolins et al. Phys.Rev.Lett., 11, 381, 1963.
 26. L. Bartsch et al. Phys.Lett., 11, 167, 1964.
 27. Н.П. Богачев и др. Письма в ЖЭТФ 10, 168, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
 11 мая 1973 года.

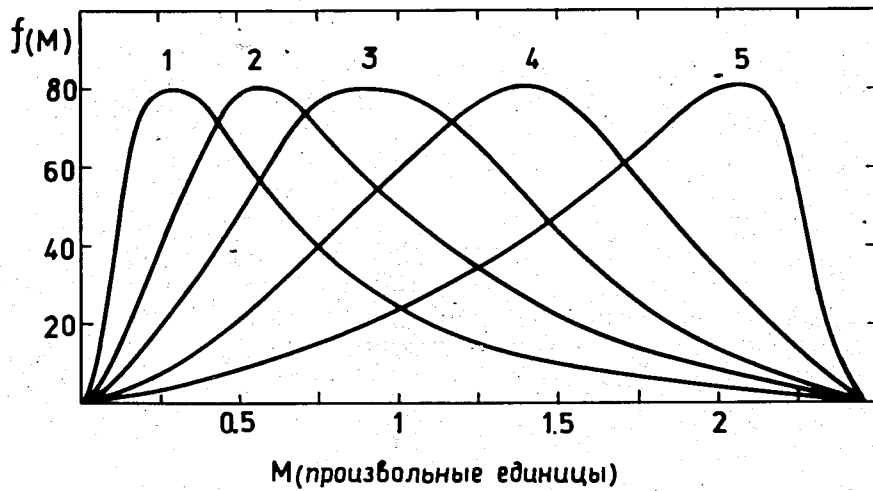


Рис. 1. Фоновые кривые, используемые при расчетах.

Таблица 1
 Вероятность статистической флюктуации P в зависимости
 от величин h и s при $K=40$

$P = a \times 10^{-8}$							
$h \backslash s$	a						B
	1	2	3	4	5	6	
3.0	5.40	5.04	4.23	3.66	3.15	2.73	2
3.5	9.30	8.91	7.90	7.03	6.20	5.46	3
4.0	1.27	1.23	1.17	1.10	0.93	0.84	3
4.5	1.36	1.32	1.27	1.21	1.14	1.07	4
5.0	1.15	1.12	1.08	1.03	0.98	0.93	5
5.5	7.60	7.40	7.18	6.91	6.62	6.32	7
6.0	3.94	3.85	3.74	3.61	3.48	3.34	8
6.5	1.60	1.57	1.52	1.48	1.43	1.37	9
7.0	5.18	4.99	4.86	4.72	4.57	4.41	11
7.5	1.27	1.24	1.21	1.18	1.14	1.10	12
8.0	2.49	2.43	2.36	2.30	2.23	2.16	14

Таблица 2
 Статистическая значимость ряда экспериментов,
 в которых впервые было заявлено о существовании
 новых резонансов

Резонанс	Мода распада	N_T	N_3	N_Φ	h	k	s	P	лит.
$Y_1^*(1385)$	$\Lambda\pi$	141	33	27	6.4	17	3	1.16×10^{-8}	[13]
$K^*(890)$	$K\pi$	48	15	10	4.8	14	2	1.03×10^{-5}	[14]
$Y_0^*(1405)$	$\Sigma\pi$	125	24	16	6.0	13	2	1.18×10^{-8}	[24]
$\omega(784)$	$\pi\pi\pi$	3200	83	98	8.3	75	4	$< 10^{-14}$	[16]
$\eta(549)$	$\pi\pi\pi$	233	24	12	6.9	21	3	0.50×10^{-10}	[17]
$\Phi(1019)$	KK	36	9	3	5.2	21	2	1.99×10^{-6}	[10]
$\Xi^*(1535)$	$\Xi\pi$	79	14	7	5.3	15	1	0.92×10^{-6}	[10]
$\sigma(410)$	$\pi\pi$	2972	173	425	8.4	61	5	$< 10^{-14}$	[3]
$B(1235)$	$\omega\pi$	547	61	130	5.4	20	5	0.52×10^{-6}	[25]
$H(990)$	$\rho\pi$	965	90	86	9.7	25	4	$< 10^{-14}$	[26]
$S(1930)$	X	11600	192	1500	5.0	30	4	0.75×10^{-5}	[12]
$\rho(1700)$	$\pi\pi$	688	26	54	3.5	50	4	0.89×10^{-2}	[4]
$\varrho(1670)$	$\pi\pi$	1046	35	71	4.2	50	4	0.60×10^{-3}	[9]
$\delta(966)$	X^-	14000	214	1946	4.8	60	3	4.55×10^{-5}	[11]
$T(2195)$	X^-	24150	208	1575	5.2	46	3	4.36×10^{-6}	[12]
$U(2375)$	X^-	15000	455	4745	6.6	10	3	1.64×10^{-10}	[12]
$A_{1s}(1170)$	$\rho\pi$	566	20	37	3.3	69	2	3.20×10^{-2}	[8]
$\Lambda(1330)$	$\Lambda\eta$	397	36	64	4.5	46	6	1.17×10^{-4}	[27]
$\pi\eta(270)$	$\pi\eta$	584	32	38	5.2	43	2	0.42×10^{-5}	[6]