ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р1 - 7062

С.Ф. Бережнев

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ГИСТОГРАММЕ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

P1 - 7062

С.Ф. Бережнев *

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ГИСТОГРАММЕ

Направлено в ЯФ

---

* НИИЯФ МГУ

В физике высоких энергий параметры теоретических функций часто ищут, сравнивая гистограмму распределения экспериментальных событий с набором "теоретических" гистограмм, построенных для некоторых значений искомых параметров.

Рассмотрим подробнее, как строится такая "теоретическая" гистограмма. Будем считать для простоты, что каждое событие характеризуется лишь одной измеренной координатой x, лежащей в интервале $[a, b]$.

Предположим, что существует правильная теория, позволяющая вычислить дифференциальное сечение $d\sigma(\vec{\alpha})/dx$, где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots \alpha_\ell)$ – набор искомых параметров.

Разобьём интервал измерения x на k ячеек длиной $h = \frac{b-a}{k}$.

Исходя из вышеизложенного, можно вычислить вероятность попадания координаты x в $j^{\text{тую}}$ ячейку гистограммы:

$$P_j(\vec{\alpha}) = \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left(\frac{d\sigma(\vec{\alpha})}{dx}\right) dx \Big/ \int_a^b \left(\frac{d\sigma(\vec{\alpha})}{dx}\right) dx, \qquad (1)$$

где x_j – координата центра $j^{\text{той}}$ ячейки.

Точно так же можно рассчитать среднее ожидаемое число событий, попавших в $j^{\text{тую}}$ ячейку для данных условий эксперимента:

$$m_j(\vec{\alpha}) = P_j(\vec{\alpha}) \cdot I \cdot N \cdot \sigma(\vec{\alpha}) = I \cdot N \cdot \int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \left(\frac{d\sigma(\vec{\alpha})}{dx}\right) dx, \qquad (2)$$

где N – число атомов мишени, I – поток, а $\sigma(\vec{\alpha}) = \int_a^b \left(\frac{d\sigma(\vec{\alpha})}{dx}\right) dx$ – – полное сечение исследуемого процесса.

Пусть в результате эксперимента в первую ячейку гистограммы попало n_1 событий, во вторую – n_2,... в $j^{\text{тую}}$ – n_j и т.д.

Вероятность наблюдения именно такой экспериментальной гистограммы вытекает из закона Пуассона (см., например /1/):

$$P\{\vec{n}\,|\,\vec{m}(\vec{\alpha}, I, N)\} = \prod_{j=1}^{K} e^{-m_j} \frac{(m_j)^{n_j}}{n_j!}, \tag{3}$$

где : $\vec{m} = (m_1, \dots, m_j, \dots, m_K)$,
$\vec{n} = (n_1, \dots, n_j, \dots, n_K)$.

Далее можно искать оценки, исходя из принципа максимального правдоподобия, т.е. отыскивая минимум функционала:

$$\Phi_0(\vec{\alpha}) = -\ln P\{\vec{n}\,|\,\vec{m}\} = -\sum_{j=1}^{K} \{-m_j + n_j \ln m_j - \ln(n_j!)\}. \tag{4}$$

Как известно /2/, этот метод обеспечивает максимальную возможную точность определения искомых параметров.

Чаще оценки параметров ищут из условия минимума функционала, минимизируя функционал:

$$\Phi_1(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{K} \frac{(n_j - m_j)^2}{n_j}, \tag{5}$$

т.е. методом наименьших квадратов или методом минимума χ^2 - функционала:

$$\chi^2(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{K} \frac{(n_j - m_j)}{m_j}. \tag{6}$$

Это объясняется тем, что два последних метода проще с вычислительной точки зрения и, кроме того, позволяют применять χ^2 - критерий без дополнительных вычислений.

Сравним оценки, полученные методами наименьших квадратов и минимума χ^2 с оценками максимального правдоподобия.

Уравнение правдоподобия (условия минимума функционала (4)) в нашем случае запишется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{(n_j - m_j)}{m_j} \frac{\partial m_j}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, \ell. \tag{7}$$

Метод минимума χ^2 дает оценки, смещенные по сравнению с оценками максимального правдоподобия. Это легко видно из условия минимума функционала (6):

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{K} \left\{ \frac{(n_j - m_j)}{m_j} + \frac{(n_j - m_j)^2}{2 m_j^2} \right\} \frac{\partial m_j}{\partial \alpha_i} = 0. \tag{8}$$

Смещение оценки происходит за счёт члена $(n_j - m_j)^2 / 2 m_j^2$.
Метод наименьших квадратов дает оценку, смещенную в другую сторону и на большую величину:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{K} \frac{n_j - m_j}{n_j} \frac{\partial m_j}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{K} \frac{n_j - m_j}{m_j + (n_j - m_j)} \frac{\partial m_j}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{K} \frac{n_j - m_j}{m_j} \left(\frac{1}{1 + \frac{n_j - m_j}{m_j}} \right) \frac{\partial m_j}{\partial \alpha_i} \approx \tag{9}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{K} \left\{ \frac{n_j - m_j}{m_j} - \frac{(n_j - m_j)^2}{m_j^2} \right\} \frac{\partial m_j}{\partial \alpha_i} = 0$$

Смещение оценки происходит за счёт члена $-(n_j - m_j)^2 / m_j^2$.

Рассмотрим функционал:

$$\Phi_2(\vec{\alpha}) = \frac{1}{3} (2\chi^2(\vec{\alpha}) + \Phi_1(\vec{\alpha})) = \frac{1}{3} \left(2 \sum_{j=1}^{K} \frac{(n_j - m_j)^2}{m_j} + \sum_{j=1}^{K} \frac{(n_j - m_j)^2}{n_j} \right). \tag{10}$$

Условие минимума этого функционала:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_2(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^{K} \frac{n_j - m_j}{m_j} \frac{\partial m_j}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{11}$$

совпадает с уравнением правдоподобия (7).

Таким образом, квадратичный функционал (10) позволяет получить оценки, совпадающие с оценками максимума правдоподобия.

Здесь не обсуждается вопрос о возможном смещении оценок максимального правдоподобия, поскольку такое смещение определяется видом дифференциального сечения $d\sigma(\vec{\alpha})/dx$. Если смещение существует, то его в большинстве случаев можно учесть. Откорректированные таким образом оценки максимального правдоподобия обладают дисперсией меньшей, чем оценки методов наименьших квадратов и минимума χ^2 /3/.

Следует отметить, что расхождение между этими оценками существенно только при малой статистике.

В заключение хочу выразить благодарность В.С. Курбатову, И.Н. Силину, А.А.Тяпкину за полезные обсуждения, а также Л.Л.Неменову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.П. Клепиков, С.Н. Соколов. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. М., 1964 г.

2. Г. Крамер. Математические методы статистики. ИЛ, Москва, 1948 г.

3. M.G.Kendall and A.Stuard, The advanced theory of statistics (Charles Grifrin and Co. Ltd, London, 1967), Vol.2.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 апреля 1973 года.