ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДУБНА



P1 - 6988

1698/2-73

-----

Ю.А.Батусов, С.А.Бунятов, Г.Р.Гулканян, В.С.Курбатов, В.М.Сидоров, В.А.Ярба

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ **П**р - **П** + **П** + **П** - **П** + **П** + **П** - **П** + **П** +



ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Батусов Ю.А., Бунятов С.А., Гулканян Г.Р., Курбатов В.С., Сидоров В.М., Ярба В.А.

Исследование реакции п р + п + п вблизи порога

Методом максимального правдоподобия на основе теории образования трех частиц вблизи порога (Грибов, Ансельм, Анисович) проанализировано около 500 событий реакций  $\pi^- p \to \pi^+ \pi^- n$  в интервале энергий /2004260/ Мэв. Получен простой вид квадрата матричного элемента, удов-летворительно описывающий всю совокупность экспериментальных данных;  $|M|^2 = |\lambda|^2 \{1 + C(K_{12}^2 - \frac{1}{2}E)\}$ , со эначением квадрата модуля амплитуды реакции на пороге  $|\lambda|^2 = 4,5 \pm 0,6$  и параметром наклона в спектре по квадрату относительного импульса  $K_{12}^2$  двух пионов С = 3,7 ± 0,6. Получена зависимость сечения реакции от выделенной энергии:  $\sigma = \rho^2 (E/m_{\pi})^2$ , где  $\rho^2 = (0,38 + 0,05)$  мб.

Вычислены вклады неаналитических (линейных, квадратичных, кубических) членов, содержащих длину *т т*-рассеяния <sup>в</sup> , в дифференциальные сечения реакции.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1973

Batusov Yu.A., Bunyatov S.A., Gulkanjan H.R., Kurbatov V.S., Sidorov V.M., Yarba V.A. Pl - 6988

Investigation of the  $\pi^-p \rightarrow \pi^+\pi^-n$  Reaction near Threshold

See the Summary on the reverse side of the title-page.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1973 Ю.А.Батусов, |С.А.Бунятов, Г.Р.Гулканян, В.С.Курбатов, В.М.Сидоров, В.А.Ярба<sup>|\*</sup>

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ 77° р - 77 \* 77° п ВБЛИЗИ ПОРОГА

Направлено в ЯФ

Институт физики высоких энергий, Серпухов

объединенный институт вперных всследований БИБЛИСТЕКА

P1 - 6988

## Summary

About 500 events of the  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$  reaction in the energy range of (200 : 260) MeV were analyzed by the maximum likelihood method on the basis of theory of three particle production near threshold (Gribov, Anselm, Anisovich). A simple form of the matrix element square is obtained, which describes satisfactorily the total amount of experimental data  $|M|^2 = |\lambda|^2 (1 + 1)^2$ + C (  $K_{12}^2 - \frac{1}{2}E$ ) the value of the modulus square of the reaction amplitude at the threshold being  $|\lambda|^2 = 4.5 \pm 0.6$  and the slope parameter in spectrum over the square of relative momentum  $K_{12}^2$  of two pions  $C = 3.7 \pm 0.6$ . It is obtained the dependence of the reaction cross section on the emitted energy  $\sigma = \rho^2 (E/m_{\perp})^2$ ; where  $\rho^{2} = (0.38 \pm 0.05)$  mb.

The contributions of nonanalytical (linear, square, cubic) terms, containing the  $\pi\pi$ -scattering length  $a_0$ , to the differential cross sections are calculated.

В работах В.Н.Грибова, А.А.Ансельма, В.В.Анисовича /1-2/ была создана полуфеноменологическая теория образования трех сильновзаимодействующих частиц вблизи порога. Эта теория дает метод нахождения амплитуды рассеяния нестабильных частиц при нулевой энергии. Одной из областей применимости теории образования трех частиц являются реакции  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$ вблизи порога, когда полная кинетическая энергия частиц в конечном состоянии Е мала. В этом случае амплитуды реакций *πN*: → *ππN* представляются в виде разложения по степеням Е<sup>1/2</sup> Этот ряд содержит сингулярные по относительным импульсам члены, обязанные своим происхождением перерассеянию частиц и зависящие от длин рассеяния образовавшихся частиц. и аналитические члены. Последние входят в ряд с неопределенными коэффициентами, которые в рамках данной теории не могут быть вычислены и находятся из сравнения с экспериментом. Этим и определяется полуфеноменологический характер теории. В работах /1-2/были получены формулы для матричных элементов реакций *πN* → *ππ N* с точностью до членов второго порядка по  $E^{1/2}$ . В работе  $\frac{1}{3}$  П.Э.Волковицкого и Г.Р.Гулканяна вычислены кубические члены в квадрате матричного элемента реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$  а также приведены соотношения, связывающие амплитуды всех пяти каналов реакций пр → 이 아이는 사람들은 사람은 가을 얻는 것을 수요?

. .

 $\rightarrow \pi\pi N$ 

일 - 김 홍수의 가격 영화적 관련

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n /1/$$

$$\pi \bar{p} \rightarrow \pi^{\circ} \pi^{\circ} \bar{n}$$
 /2/

$$\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^\circ p$$
 /3/

 $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ n$ /4/

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^\circ p$$
,  $\cdot$  /5/

что лает возможность проведения их совместного анализа.

3

Особенностью реакций  $\pi N \to \pi \pi N$  по сравнению с  $K \to 3\pi$ распадами является наличие в квадрате матричного элемента линейных по относительным импульсам членов /первого порядка по  $E^{1/2}$  /, возникающих из-за перерассеяния частнц  $(\pi^-p)$  в начальном состоянии. Величина этих членов очень сильно зависит от отношения  $x = |F_{11}|/|F_{31}|$  модулей изотопически инвариантных амплитуд реакций  $\pi N \to \pi \pi N$  на пороге в состояниях  $P_{11}$  и  $P_{31}$  /здесь состояния обозначены, как обычно:  $L_{2T,2J}$ , где L - орбитальный угловой момент, T - изотопический спин, J - полный угловой момент системы/.

Если ограничиться только линейными членами, то квадрат матричиого элемента реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$  имеет вид

$$d \sigma/d \Gamma = |\lambda_1|^2 \{1 + \frac{2}{3} a_{12} [(a_2 - a_0)k_{12} - (b_{3/2} - b_{1/2})k_{13}]\}, \quad /6/$$

где  $k_{ij}$  - модули относительных импульсов вторичных частиц /индекс "1" относится к  $\pi^+$ -мезону, индекс "2" - к  $\pi^-$ -мезону, индекс "3" - к нейтрону/.  $a_0$  н  $a_2$  длины  $\pi\pi$  -рассеяния в состояниях с изотопическим спином T=0 и T=2, а  $b_{1/2}$  н  $b_{3/2}$ известные длины  $\pi N$  -рассеяния в состояниях T=1/2 и T=3/2.  $a_{12}$  есть мнимая часть /взятая с обратным знаком/ отношения амплитуд  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  каналов /2/ и /1/ на пороге этих реакций:

$$\alpha_{12} = -Im(\lambda_2/\lambda_1) = \frac{3\sin\phi}{x\sqrt{10} + \frac{1}{x\sqrt{10}} - 2\cos\phi},$$

где  $\phi$  с точностью до  $\pi$  равна разности фаз  $\phi_{ynp} = \delta_{31} - \delta_{11}$ упругого  $\pi N$  -рассеяния в состояниях  $P_{31}$  и  $P_{11}$ , при энергии, соответствующей порогу реакций  $\pi N \to \pi \pi N$ . Разность фаз  $\phi_{ynp}$  по результатам различных фазовых анализов /6/ мала и составляет  $-5^{\circ}$  с неопределенностью  $\approx 1^{\circ}$ .

Величина  $a_{12}$  очень резко зависит от параметра x. Эта зависимость приведена на рис. 1, при двух значеннях  $\phi = \phi_{yup} \approx$ =-.5° и.  $\phi = \phi_{yup} + \pi = 175$ °. Как видно из рис. 1, при  $x = 1/\sqrt{10} \approx 0.3$ и  $\phi = -5^{\circ} a_{12}$  достигает экстремального значения  $(a_{12} \approx$ =-.38).

При значениях х, близких к О,3, возникает возможность ограничиться только линейными членами в сечении реакции /1/, что сильно упрощает анализ экспериментальных данных. Именно в таком предположении в 1964 году в Дубне были проанализированы экспериментальные данные по реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n^{/4-5/2}$ .

Разность длин рассеяния  $a_0 - a_2$  из этого анализа была определена равной  $a_0 - a_2 = (0,25 \pm 0,05) \lambda_{\pi}$ . Однако, как отмечалось в работе  $^{/5/}$ , "результат требует дальнейшего уточнения, т.к. при анализе предполагалось, что эффекты, связанные с взаимодействием в конечном состоянин, обусловлены только линейными по относительным импульсам членами". Для проверки этого предположения нужно было прежде всего дополнительно исследовать соотношения между сечениями различных каналов реакций  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$ , чтобы определить параметр \*. С этой целью недавно нами было измерено сечение реакции  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ n$  при энергии налетающего  $\pi$ -мезона в лабораторной системе  $T_{\pi} = 230 M_{36} \frac{77}{13}$ . Сравнивая измеренное для этой реакции сечение  $\sigma_4 = /33\pm \frac{13}{13}$  / мкб с сечением реакции /1/ при энергии  $T_{\pi} = 222 M_{36} \sigma_1 = /27\pm5/ M \kappa 6^{/4}$ , было получено

$$x = 1.7 \pm 0.4$$
 при  $\phi = -5$ 

Этот результат показывает, что приближение /6/ несправедливо. Значение  $a_{12}$  на самом деле оказывается во много раз меньше /см. рис. 1/. Соответственно резко уменьшается вклад линейных членов в квадрате матричного элемента /при x = 1.7и  $\phi = -5^{\circ}$ ,  $a_{12} \approx -0.07$ /, и приближение /6/ оказывается недостаточным для полного описания экспериментальных данных.



Рис. 1. Зависимость  $a_{12} = -lm(\lambda_2/\lambda_1)$  от величины  $x = |F_{11}|/|F_{31}|$ . Правая часть графика соответствует значению  $\phi = -5^{\circ}$ , левая значению  $\phi = 175^{\circ}$ .

5

В настоящей работе анализ экспериментальных данных по реакции /1/, полученных фотоэмульсионной методикой /4/, проводится с учетом в дифференциальном сечении реакции квадратичных и кубических по относительным импульсам конечных частиц членов.

Квадрат матричного элемента в этом случае имеет следующую структуру \*.

$$\begin{split} \hat{d} \,\sigma / \,d\,\Gamma \,=\, \left| \lambda_{1} \right|^{2} \{ 1 + A \,k_{12} \,+\, B \,k_{13} \,+\, E \,\sum_{i} \,Q_{i} \left( \,a_{0}^{} \,,\, a_{2}^{} \right) f_{i}^{\,\mathrm{KB}}(x_{12}^{} \,,\, x_{13}^{} \,,\, x_{23}^{} \,,\, E) \,\,+ \\ &+\, E^{3/2} \,\sum_{j} \,T_{j} \,\left( \,a_{0}^{} \,,\, a_{2}^{} \right) f_{j}^{\,\mathrm{Ky6}} \cdot\,\, \left( \,x_{12}^{} \,,\, x_{13}^{} \,,\, x_{23}^{} \,,\, E) \,\,+ \\ &+\, C_{1}^{} \,\left( \,k_{12}^{\,2} \,-\, \frac{1}{2} \,\, E) \,+\, C_{2} \,E \,\,+\,\, C_{3}^{} \,\left( \,k_{13}^{\,2} \,-\, k_{23}^{\,2} \,\right) \} \,. \end{split}$$

Здесь через A и B обозначены коэффициенты перед линейными членами /см. выражение /6//. Коэффициенты  $Q_i$  и  $T_i$  содержат, кроме известных величин /длин  $\pi N$  -рассеяния, параметра x и  $\phi$  /, длнны  $\pi \pi$  -рассеяния  $a_0$  и  $a_2$ .  $f_i^{\rm KB}$ . и  $f_j^{\rm KyG}$  есть неаналитические функции от энергии E и от безразмерных величин  $x_{\ell m} = k_{\ell m} / \sqrt{2\mu_{\ell m} E} / \mu_{\ell m}$  - приведенная масса конечных частиц  $\ell$  и m; в единицах  $m_{\pi} = 1$  нмеем:  $x_{12} = k_{12} / \sqrt{E}$ ,  $x_{13} = \sqrt{(M+1)/2M} k_{13} / \sqrt{E}$ ,  $x_{23} = \sqrt{(M+1)/2M} k_{23} / \sqrt{E}$ , M

- масса нуклона/.  $C_1, C_2, C_3$  - неопределенные коэффициенты перед аналитическими членамн; последние три слагаемые в /7/ представляют собой более удобную запись квадратичных анали- тических членов

$$C_{1}' k_{12}^{2} + C_{2}' k_{13}^{2} + C_{3}' k_{23}^{2}$$

Связь между коэффициентами  $C_1, C_2, C_3$  и  $C'_1, C'_2, C'_3$  легко получить, воспользуясь соотношением

$$E = \frac{2}{M+2} k_{12}^{2} + \frac{(M+1)^{2}}{2M(M+2)} (k_{13}^{2} + k_{23}^{2})$$

Для данного анализа использовалось 486 событий, соответствующих реакции  $\pi^- p \to \pi^+ \pi^- \pi$ , в интервале 'энергий = /200÷260/ Мэв /среднее значение  $\bar{T}_{\pi}$  =237 Мэв/. Для контроля часть этих событий была еще раз обсчитана по новой системе программ /в/ кинематического анализа. Теоретический анализ экспериментальных данных проводился методом максимального правдоподобия. Поскольку экспериментальные данные получены фотоэмульсиоиной методикой, то при анализе возникает вопрос об учете фоновых событий /событий на ядрах эмульсии/. Вклад фона в исследуемый процесс был определен ранее /4/ и составляет /20+5/%. Вопрос о вычитании фона при оценке параметров методом максимального правдоподобия подробно рассмотрен в работе /9/. Нами было включено в анализ 77 фоновых событий /события с видимым следом ядра отдачи, но удовлетворяющие кинематике реакции на водороде/, хоторые были зарегистрированы при поиске водородных событий.

Минимизировался функционал вида

$$-\ln L = -\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi + \varphi}{i} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\varphi}{i} \right] + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_k - \sigma_k^T}{\Lambda \sigma_k^3}\right)^2, \frac{N_{\varphi} + \varphi}{N_{\varphi}} = 77, /8/$$

где  $\sigma_k^9$  и  $\Lambda \sigma_k$  - экспериментальные значения сечения реакции /1/ и их ошибки для 5 значений /  $n_d$  =5/ энергии налетающего  $\pi$  -мезона до 250 *Мэв*, полученные в работах / 4:10.11/  $\sigma_k^T$  теоретические значения сечений при тех же энергиях. У. значение плотности вероятности распределения событий по графику Далица, определенное для *i* -го события:

$$r_{i} = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Gamma}\right)_{i}}{\int \left(\frac{d\sigma}{d\Gamma}\right) d\Gamma}, \qquad (9)$$

где  $d\sigma/d\Gamma$  определяются выраженнем /7/. Интегралы в знаменателе /9/ /нормировка плотности вероятности/ вычислялись методом Монте-Карло, при помощи видоизмененной программы FO IL / 12/. При вычислении интегралов учитывались ограниченные размеры эмульсионных камер и зависимость эффективности регистрации события от энергии первичной частицы.

Минимизация функционала /8/ по всем параметрам  $a_0, C_1, C_2, C_3, |\lambda_1|^2$  одновременно /малая величина - длина  $\pi\pi$ -рассеяния  $a_2$  фиксировалась:  $a_2 = 0$  / не позволяет при имеющейся статистике определить эти параметры с удовлетворительной точностью. Однако из одномерных экспериментальных распределений, приведенных на рис. 2, видно, что существенное отличие от фазовых

<sup>\*</sup> В выражении /7/ пренебрегалось кубическими членами, содержащими малую величину  $a_{12}$ .



элемент ЧНЫЙ

$$M \mid^{2} = \mid \lambda_{I} \mid^{2} \{ I + C_{I} (k_{I2}^{2} - \frac{1}{2} E) \}.$$

- кривых наблюдается только в распределениях по  $x_{12}^2, cos(\vec{k}_{13}, \vec{p}_{\pi}), cos(\vec{k}_{23}, \vec{p}_{\pi}+)$ . Распределения по этим переменным, поделенные на аналогичные распределения по фазовому объему /рис. 3 и 4/,



Рис. 3. Распределение по  $x_{12}^2 = k_{12}^2 / E$ , деленное на распределение по фазовому объему. Сплошная гистограмма - эксперимент. Пунктир - матричный элемент

 $|M|^{2} = |\lambda_{1}|^{2} \{1 + C_{1}(k_{12}^{2} - \frac{-1}{2}E)\}$ 

можно аппроксимировать прямой линией, наклон которой определяется только коэффициентом С,. Оказывается, что вся совокупность экспериментальных данных удовлетворительно описывается учетом в квадрате матричного элемента реакции /1/ только члена  $C_1(k_{12}^2 - \frac{1}{2}E)$ , а включение членов, содержащих параметры  $a_0$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , не является статистически необходн-мым. Фит экспериментальных данных по формуле

 $d\sigma/d\Gamma = |\lambda_1|^2 \{1 + C_1(k_{12}^2 - \frac{1}{2}E)\}$ 

позволяет определить коэффициент наклона C<sub>1</sub> и квадрат модуля амплитуды реакции /1/ на пороге:

$$C_{1} = 3,7 \pm 0,6$$
  
 $|\lambda_{1}|^{2} = 4,5 \pm 0,6$ .

Одномерные теоретические распределения и теоретический ход сечения реакции /1/ в зависимости от энергии при определенных значениях параметров  $C_1$  и  $|\lambda_1|^2$  приведены на рисунках 2-4. Из рисунков видио, что экспериментальные данные



Рис. 4. Энергетическая зависимость полного сечения реакции  $\pi - p \rightarrow \pi + \pi - n$ . Сплошная линия -  $\sigma_1 = 0.38 E^2$ , где E - выделенная энергия в системе центра масс /в единицах массы  $\pi$  -мезона/. • работа /4/, • работа /10/, 4 - работа /11/.

описываются достаточно хорошо. /Доверительный уровень во всех распределениях не меньше 7%/. Энергетическая зависимость сечения реакции имеет вид

$$\sigma_{1} = \rho^{2} E^{2}$$
,  $\Gamma \pi e$   $\rho^{2} = (0.38 \pm 0.05)_{M} \delta$ ,

Е выражена в единицах массы п - мезона.

Далее мы фиксировали полученные значения параметров  $C_1$  и  $|\lambda_1|^2$  и произвели фит по параметрам  $C_2$  и  $C_3$ , которые оказались малыми и в пределах ошибок равными нулю:

$$L_2 = -0.01 \pm 0.24$$
  
 $L_3 = -0.03 \pm 0.15$ .

Фит по длине  $\pi\pi$  -рассеяния  $a_0$  /при фиксированных эначеннях  $C_1$  и  $|\lambda_1|^2$  / при значениях x = 1,7 и  $\phi = -5^\circ$  показывает, что имеющаяся статистика не позволяет определить длину рассеяния  $a_0$  с удовлетворительной точностью и приводит лишь к очень грубым оценкам:  $a = (-0,9 \pm 1,1) \chi_{\pi}$ . Учет членов, содержащих  $a_0$ , практически не улучшает согласия теории с экспериментом.

Для планирования дальнейших экспериментов представляется интересным оценить величину эффектов пион-пионного рассеяния, провляющихся в реакциях  $\pi N \to \pi \pi N$  вблизи порога. На рис. 5*a* приведены вклады линейных, квадратичных и кубических неаналитических членов, содержащих длину рассеяния  $a_0$ , а на рис. 5*b* - суммарный вклад этих членов водномерные распределения / вычисления производились для  $T\pi = 235 M g enp x = 1,7$ ,  $\phi^{\circ} = -5^{\circ}$ /. Заштрихованные области на рис. 5*b* соответствуют неопределенности в параметре  $x: x = 1,7 \pm 0,4$ . Как видно из рисунков, влияние параметра  $a_0$  на одномерные распределения мало и не превышает  $/5 \div 7/\%$  /при  $|a_0| \leq 1$  /, в то время как экспериментальные ошибки составляют /15÷20/%. Для определения длины рассеяния  $a_0$  из экспериментальных данных по реакции  $\pi^-p \to \pi^+\pi^-\pi$  потребуется статистика, примерно на два порядка превышающая имеющуюся.

Таким образом, имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные по реакции /1/ ие позволяют оценить длину  $\pi\pi$  -рассеяния. Вся совокупность экспериментальных данных по этой реакции до энергии  $T_{\pi} = 260$  Мэв удовлетворительно описывается матричным элементом с двумя параметрами, определенными в настоящей работе:

$$d\sigma/d\Gamma = |\lambda_1|^2 \{1 + C_1(k_{12}^2 - \frac{1}{2}E)\}.$$

Интересно отметить, что существует сходство между матричными элементами реакции /1/и г -распада, где также присутствуют три сильновзаимодействующие частицы с небольшой энергией. Матричный элемент г -распада приближенно



описывается выражением

$$|M_{\tau}|^2 \sim 1 + a(k_{12}^2 - \frac{1}{2}E),$$
 /9/

где a = 0.87. Поправки к матричному элементу /9/, зависящие от длин рассеяния пионов, также малы и не превышают 5%.

Авторы выражают благодарность В.В.Анисовичу, А.А.Ансельму и П.Э.Волковицкому за полезиые обсуждения.

## Литература

- 1. А.А.Ансельм, В.Н.Грибов. ЖЭТФ, 37, 501 /1959/.
- В.В.Анисович, А.А.Ансельм, В.Н.Грибов. ЖЭТФ, 42, 224 /1962/.
- 2. В.В.Анисович, А.А.Ансельм. УФН, 88, 287 / 1966/.
- 3. П.Э.Волковицкий, Г.Р.Гулканян. Сообщение ОИЯИ, Р4-6644, Дубна, 1972.
- 4. Ю.А.Батусов, С.А.Бунятов, В.М.Сидоров, В.А.Ярба. ЯФ, 1, 526, 1965.
- 5. Ю.А.Батусов, С.А.Бунятов, В.М.Сидоров, В.А.Ярба. Препринт ОИЯИ, Р-1838, Дубна, 1964; ЯФ, 1, 687 /1965/.
- 6. H.Nielsen, A.Oades. Препринт Аргусского университета, 1972 г.

L.D.Roper, R.M.Wright and B.T.Feld. Phys.Rev., 138B, 190 (1965).

- 7. Ю.А.Батусов, С.А.Бунятов, Г.Р.Гулканян, В.М.Сидоров. Препринт ОИЯИ, РІ-6906, Дубна, 1973.
- 8. Н.М.Агабабян, Ю.А.Батусов и др. Сообщение ОИЯИ, 10-5891, Дубна, 1971.
- 9. В.С.Курбатов, А.А.Тяпкин. Препринт ОИЯИ, Р1-5234, Дубна, 1970.
- 10. T.Deahl et al. Phys.Rev., 124, 198 (1961).
- 11. I.M.Blair, H.Müller et al. Phys.Letters 328, 528 (1970).

12. F.James. Preprint CERN, 1968.

пàc

Рукопись поступила в издательский отдел 7 марта 1973 года.

13