

СЗУЧ.1Р

Д-796

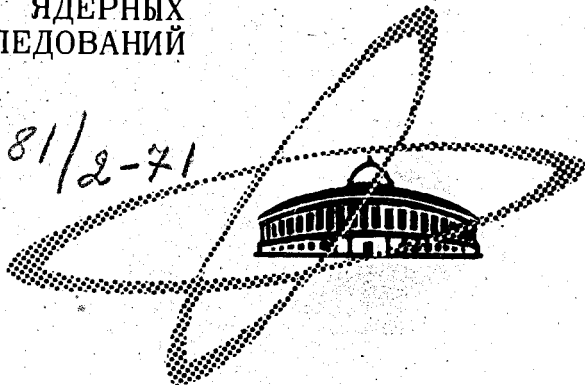
15/41-71

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 6071

3881/2-71



В.М. Дубовик, Б.Л. Марковски,
Л.М. Сороко, Т.А. Стриж

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ОБЛАСТИ
СПЕКТРА ПРИ АНАЛИЗЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ
ДАННЫХ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P1 - 6071

В.М. Дубовик, Б.Л. Марковски,
Л.М. Сороко, Т.А. Стриж

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ОБЛАСТИ
СПЕКТРА ПРИ АНАЛИЗЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ
ДААННЫХ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Анализ экспериментальных данных при высоких энергиях с помощью метода Фурье^{/1-4/} позволяет получать в режиме "on line" сведения о структуре рассматриваемой части спектра. Для того чтобы извлечь количественную информацию, необходимо, однако, знать границу $\omega_{пр}$ ^{/2/} информационной области.

Ранее^{/2/} для определения $\omega_{пр}$ мы проводили огибающую спектра, исходя из того, что у модулированного сигнала амплитуды компонент Фурье с увеличением частоты монотонно убывают. В настоящей работе мы предлагаем статистически обоснованные способы нахождения частоты $\omega_{пр}$ и её разброса.

§ 1.

Рассмотрим экспериментально наблюдаемый спектр $f(E)$ и его Фурье-образ $F(\omega)$ без привлечения априорных предположений о нём. Покажем, что статистический коридор ошибок в E -плоскости переходит в коридор ошибок в ω -плоскости. В самом деле, при предположении об аддитивном шуме имеем:

$$f(E) = f_s(E) + f_N(E); \quad \int f(E) dE = N, \quad (I)$$

где f_s и f_N обозначают спектры неизвестного сигнала и шума соответственно. Тогда для их амплитуд Фурье получим связь

$$|F_s|^2 = |F|^2 + |F_N|^2 - 2|F||F_N| \cos(\varphi - \varphi_N),$$

где φ и φ_N — фазы наблюдаемого спектра и шума. Отсюда вытекают неравенства

$$||F| - |F_N|| \leq |F_S| \leq |F| + |F_N|, \quad (2)$$

определяющие коридор ошибок для амплитуды сигнала. Равенство достигается, например, при $\omega = 0$, так как белый шум из условия сохранения нормировки $f(E)$ в E -плоскости, должен иметь среднее значение $\bar{f}_N = 0$, что в ω -плоскости означает

$$F_N(0) = 0.$$

Рассмотрим теперь на конкретных примерах, какие свойства шума в E -плоскости обуславливают появление белого шума в ω -плоскости.

А. Представим функцию шума в следующем виде:

$$f_N(E) = \lambda \int \sqrt{f(E')} \alpha(E-E') dE', \quad (3)$$

где λ — число стандартных ошибок, определяющее доверительный интервал. Ядро $\alpha(E)$ удовлетворяет условиям:

1) наличие определенной четности,

$$2) |f_N(E)| \leq \lambda \sqrt{f(E)},$$

$$3) \bar{\alpha}(0) = 0.$$

Тогда фаза шума

$$\varphi_N = \text{Arctg} \frac{\mathcal{I}_m F_N}{\text{Re} F_N} = \begin{cases} \frac{\int \sqrt{f(E)} \sin \omega E dE}{\int \sqrt{f(E)} \cos \omega E dE}, & \alpha(E) = \alpha(-E) \\ -\frac{\int \sqrt{f(E)} \cos \omega E dE}{\int \sqrt{f(E)} \sin \omega E dE}, & \alpha(E) = -\alpha(-E) \end{cases}$$

не зависит от статистических флуктуаций. Это выбор шума

соответствует тому, что в плоскости $(\text{Re} F, \mathcal{I}_m F)$

точки $F_i \equiv [\text{Re} F_N(\omega_i), \mathcal{I}_m F_N(\omega_i)]$

лежат на радиус-век-

торах точек $F_i \equiv [\text{Re} F(\omega_i), \mathcal{I}_m F(\omega_i)]$.

Б. Рассмотрим другой пример

$$f_N(E) = \lambda \Psi(E) \sqrt{f(E)}, \quad (4)$$

где на Ψ накладываем условия

$$\begin{aligned} 1) & |\Psi(E)| \leq 1, \\ 2) & \int \Psi(E) \sqrt{f(E)} dE = 0. \end{aligned}$$

Тогда получим шум с флуктуирующей фазой и постоянным модулем, равным радиусу окружности r_i .

§ 2.

Покажем теперь, выбрав конкретный механизм сглаживания экспериментальных данных при повышении статистики, как в

ω -плоскости возникает информационная область в смысле [2], т.е. исчезает коридор ошибок вплоть до некоторой частоты $\omega_{пр.}$

Будем называть статистику, набранную в некотором эксперименте, достаточной, если число событий n_i и их статистический разброс $(\Delta n)_i$ в данных m каналах удовлетворяет одному из неравенств:

$$\begin{aligned} n_i + \frac{1}{2}(\Delta n)_i &\leq n_{i+1} - \frac{1}{2}(\Delta n)_{i+1} \\ n_{i+1} + \frac{1}{2}(\Delta n)_{i+1} &\leq n_i - \frac{1}{2}(\Delta n)_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где первое из них соответствует расположению, указанному на рис. 1б. Ясно, что для плоских частей спектра требование

(5) является очень сильным ограничением и может не выполняться даже для очень "богатых статистик". Это показывает, что введенное понятие достаточной статистики зависит от вида спектра и полезно в случае быстрых изменений спектральной

зависимости, например, когда имеется резонанс. Критерий достаточной статистики обладает локальным характером, т.е. может выполняться для $m \leq M$ (где M - полное число каналов).

Рассмотрим сначала случай $m = M$ и покажем, что нули функции f_N с наибольшей вероятностью расположены не реже, чем на расстоянии Δ друг от друга. Действительно, у f_N имеется по меньшей мере один нуль, так как среднее значение $\bar{f}_N = 0$. Допустим, что имеющиеся нули расположены в точках E^1, E^2, \dots, E^m , где $\Delta^i = \sup_{i \in \{1, \dots, M\}} (E^i - E^{i+1})$, и рассмотрим наиболее широкий интервал между двумя нулями. Пусть в этом интервале находятся l элементов гистограммы.

Если $l = 1$, геометрическая вероятность того, что подгоночная кривая, связывающая некоторую точку из области i с некоторой точкой из области $i+1$, пересечет отрезок АВ, равняется

$$P_i = \frac{|n_i - n_{i+1}|}{|n_i - n_{i+1}| + (\Delta n)_i + (\Delta n)_{i+1}}$$

Тогда с учётом (5) имеем:

$$P_i \geq 1 - P_i \quad \text{или} \quad P_i \geq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

(равенство достигается одновременно с равенством в (5)). Таким образом, вероятность пересечения всегда больше 1/2. Для произвольного l , очевидно, вероятность получения флуктуации постоянного знака равняется $\prod_{i=1}^l (1 - P_i) \leq \prod_{i=1}^l P_i$. Тем самым наиболее вероятная последовательность нулей у f_N с учётом условия (5) такая, для которой $\Delta^i = \sup_{i \in \{1, \dots, M\}} (E^i - E^{i+1}) \leq \Delta$. Представим далее наиболее вероятный шум в следующем виде:

$$f_N = b(E) \cos \frac{\pi E}{\Delta},$$

где на $v(E)$ накладываем условие

$$1) |v(E)| \leq \sqrt{f(E)},$$

$$2) \int_{M\Delta}^{M\Delta} v(E) \cos \frac{\pi E}{\Delta} dE = 0,$$

3) $v(E)$ не является периодической функцией.

Если теперь продолжить функцию $v(E)$ на всю ось E периодически

$$v(E + nM\Delta) = v(E), \quad n = 0, 1, \dots$$

и разложить f_N в ряд Фурье, то получим:

$$f_N(E) = \sum_{l=-[\frac{M}{2}]}^{\infty} v_{l-\lceil \frac{M}{2} \rceil}(E) e^{\frac{2\pi i}{M\Delta} l} \quad (6)$$

Разложение (6) показывает, что в ω -плоскости функция f_N имеет с наибольшей вероятностью отличные от нуля компоненты для частот выше $\omega_{np} = \frac{\pi}{\Delta}$.

Отметим: а) что такой результат мы получили бы, если вместо $\cos \frac{\pi E}{\Delta}$ подставили любую периодическую функцию с нулями в точках $E = K\Delta$ и модулем, не превосходящим единицы, и б) что ограничения, накладываемые на $v(E)$, несущественны для этих выводов.

На практике, однако, $m < M$. Это означает, что либо статистика невелика, либо имеются плоские части спектра. Для учёта этих частей разобьём всю энергетическую область на интервалы: I) такие, где условие (5) выполняется и II) такие, где оно не выполняется. Тогда согласно проведенным выше рассуждениям, вклад шума в областях I будет начинаться с наибольшей вероятностью с $\omega_{np} = \frac{\pi}{\Delta}$, а вклад шумов в областях II может начинаться с $\omega_1 < \omega_{np}$, так как порядок следования нулей уже может быть другим. Другими словами, в ω -спектре шума появляются с некой вероятностью и другие частоты $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_{np}$ за счет того, что условие

(5) не выполняется, и для плоских частей вероятность флуктуации постоянного знака в смежных каналах равна вероятности реализации выбросов переменного знака. Очевидно также, что $\omega_1 \geq \frac{f}{\Delta}$, где l — длина наиболее широкого плоского участка типа II спектра рассматриваемой кривой $f(E)$ в единицах Δ .

§ 3.

Учтем теперь возможные изменения в оценке информационной области, возникающие при .. плохой статистике.

Предположим, как обычно делается, что в i -ом канале имеется пуассоновское распределение событий:

$$P(n_i) = \frac{(\mu_i)^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu_i}.$$

Тогда вероятности $P(x = \mu_i \pm \lambda[\sqrt{\mu_i}])$ из-за асимметрии распределения

$$\gamma = \frac{\epsilon[(x - \mu_i)^3]}{\sigma^3} = -\frac{1}{\sqrt{\mu_i}}$$

связаны неравенством

$$P(x = \mu_i + \lambda[\sqrt{\mu_i}]) \geq P(x = \mu_i - \lambda[\sqrt{\mu_i}]),$$

причем равенство практически достигается при достаточно хорошей статистике, когда асимметрия $\gamma \sim \frac{1}{\sqrt{n_i}}$ невелика.

Это показывает, что в каждом канале проявляется тенденция к положительным флуктуациям для любой реализации. Очевидно, вероятность обнаружения только положительных флуктуаций убывает по мере того, как распределение становится более симметричным. Однако условие нор-

мировки и равенство нулю среднего значения шума одновременно требует существования отрицательных выбросов в других каналах. Таким образом, справедливо считать, что в каналах с меньшим числом событий будут реализоваться с большей вероятностью флуктуации выше среднего значения по сравнению с каналами с большим числом событий (в окрестностях пиков).

Таким образом, невыполнение условия (5) при плохой общей статистике означает, что кроме плоских частей спектра к области типа II надо отнести также все те части спектра, где число событий невелико. Окончательно приходим к выводу, что ω_1 , определяющее разброс $\omega_{нр}$, ограничено снизу значением $\pi/K\Delta$; здесь K — максимальное число последовательных элементов гистограмм, где условия (5) могут не выполняться. Ясно также, что чем хуже статистика и чем длиннее гладкие, плоские части спектра, тем ω_1 ближе к нулю и, следовательно, информационная область уже.

§4.

Пусть теперь кроме "статистического шума" имеются еще шумовые выбросы, вызванные побочными факторами (например, за счет изменения ширины каналов, формы аппаратурной функции и т.д.), которые в отдельности нельзя учесть. В соответствии с рассуждениями, проведенными в §1, предположим, однако, что эти факторы в совокупности дают шум, имеющий в плоскости $(\text{Re} F, \text{Im} F)$ гауссовское распределение с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 . Тогда распределение $\frac{dn}{dF}$

(число точек в кольце шириной $d|F|$ и радиусом $|F|$) будет релеевским

$$P(|F|) = \frac{dn}{d|F|} = \frac{1}{\sigma^2} |F| e^{-\frac{|F|^2}{2\sigma^2}},$$

$$\varepsilon(|F|) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$D(|F|) = 2\sigma^2,$$

$$\max_{|F|=\sigma} P(|F|) = \frac{1}{\sigma\sqrt{e}},$$

для тех точек спектра $|F(\omega)|$, которые являются образами шумовых флуктуаций указанного вида.

Таким образом, построив распределение $\frac{dn}{d|F|}$ в каждом конкретном случае, можно выделить "релеевскую часть", соответствующую шумам.

Это сделано для $A_{\frac{1}{2}}$ (рис.2, рис.5), K_N (1480) (рис.3а), ρ_0 (рис.3б), Y^* (рис.4), где параметр σ определялся методом наименьших квадратов. Видно, что $\sigma\sqrt{2}$ определяет естественную шкалу ошибок, в которой можно задавать доверительный интервал λ равенством:

$$P(|F| \geq \lambda \sigma \sqrt{2}; \frac{dn}{d|F|}) = \alpha,$$

где α — требуемая доверительная вероятность.

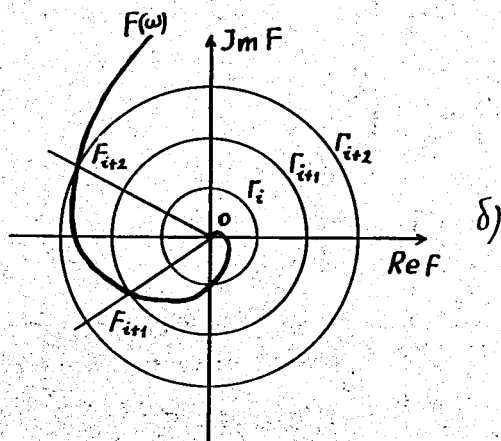
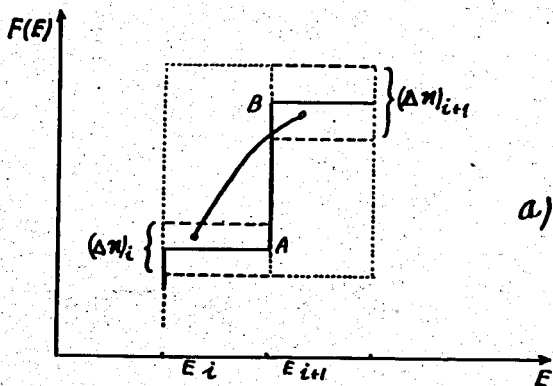
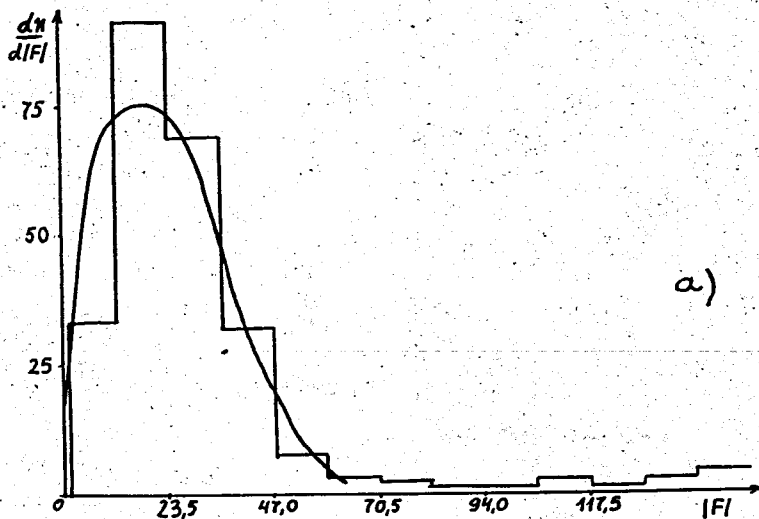
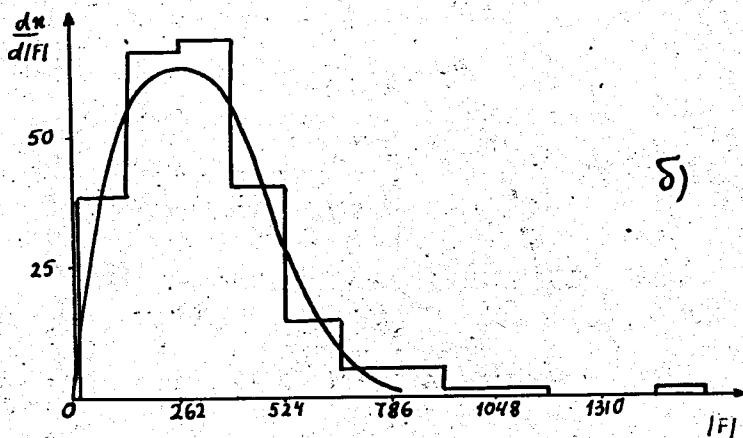


Рис. 1. а) Примерная структура годографа функции $F(\omega)$.
 Через точки $F(\omega_i)$ приведены окружности радиусом r_i . Для случая шума с флюктуирующей фазой (δ) разброс \mathcal{U}_n возможен по всей окружности r_i . Шумы типа (А) дают разброс точек по радиус-вектору $(0, F_i)$

б) Пример достаточной статистики.



a)



б)

Рис. 2. а) Распределение $\frac{\partial n}{\partial |F|}$ для экспериментальных данных по A_2^+ резонансу (K.W.J. Barnham, G. Goldhaber et al. Phys.Rev.Lett. 26, 1495 (1971)); статистика: 44Г событие). Гладкая кривая соответствует релеевскому распределению с $\sigma' = 24$.

б) Распределение $\frac{\partial n}{\partial |F|}$ для экспериментальных данных по A_2^- резонансу (И. Altson-Carnjost, A. Barbaro-Galtieri, et al. Phys.Lett. 33B, 607 (1970); Статистика 4610 событий). Параметр Релея $\sigma' = 260$.

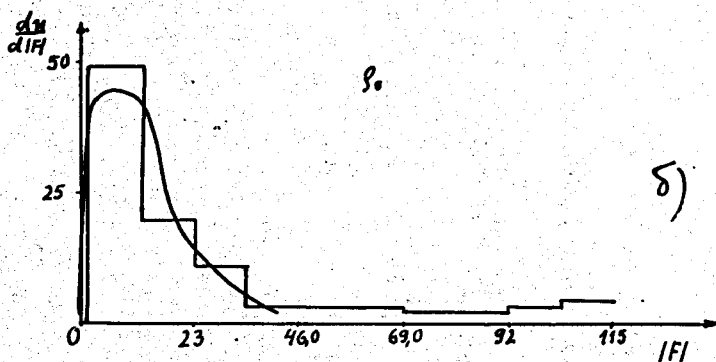
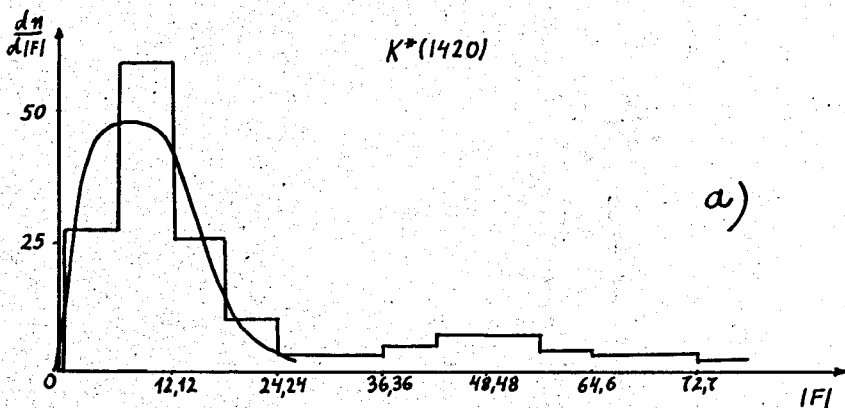


Рис. 3а Распределение $\frac{\partial n}{\partial |F|}$ для $K^*(1420)$ (M.I.Davis, S.E.Derenze et al. Phys.Rev.Lett. 23, 1071 (1969))

Статистика: 2200 события, $\sigma \sim 10$.

б) Распределение $\frac{\partial n}{\partial |F|}$ для ρ_0 (W.W.Allison, W.A.Cooper et al. Phys.Rev.Lett. 24, 618 (1970))

Статистика: 1448 событий. $\sigma \approx 10$.

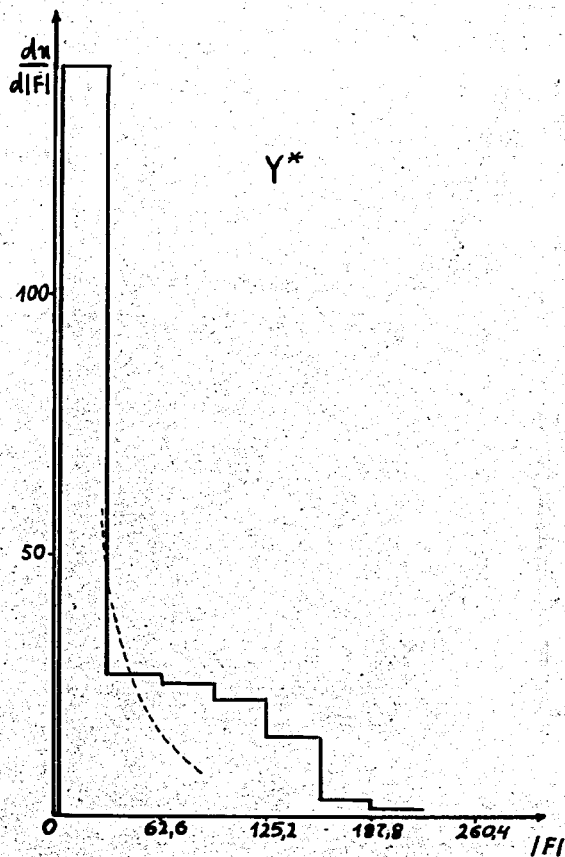


Рис. 4. Распределение $\frac{\partial n}{\partial |F|}$ для Y^*
 (Ph.Eberhard, I.H.Friedman et al. Phys.Rev.Lett. 22, 200
 (1969)); статистика: 220 событий, $\sigma = 10$.

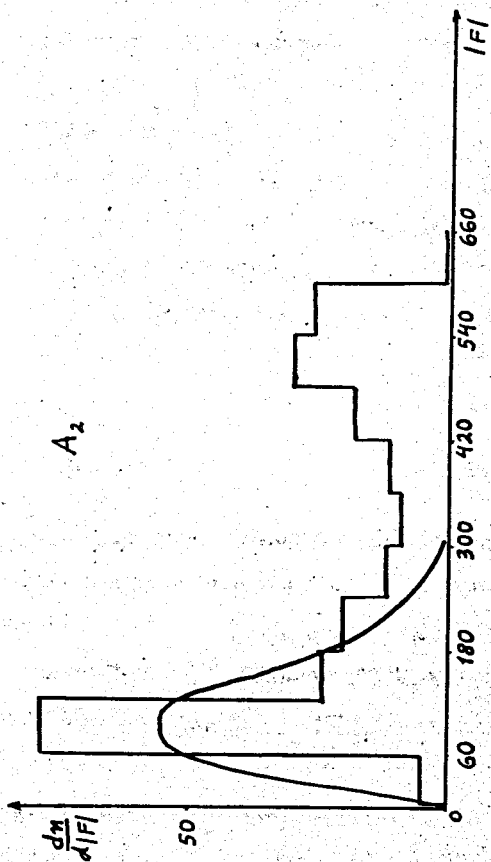


Рис. 5. Распределение $\frac{\partial n}{\partial |F|}$ для A_2 (D.I. Grenell, V. Karhon et al. Phys. Rev. Lett., 22, 1327 (1969)).

Статистика: 746 событий. В информационной области видна сильно выходящая часть, соответствующая расщеплению, наблюдаемому в этом эксперименте.

Ясно, что среди точек, оставшихся в информационной части, могут быть такие, которые соответствуют вкладам высших частот, тогда как вклады некоторых низших частот могут отсутствовать (они попадут в шумовую часть). Это означает, что информационная область будет составлена из отдельных полос $(0, \omega^1)$, (ω^2, ω^3) , ... где $\omega^{i+1} \geq \omega^i$. Однако, так как для выявления структуры резонансов нужны по меньшей мере значения контраста и положение первых минимумов $|F(\omega)|$, то все интервалы, (ω^i, ω^{i+1}) , кроме первого, следует отбросить. Тогда получаем $\omega^1 - \omega_{np}$ с доверительной вероятностью α .

§5.

Для определения информационной области спектра искаженного статистическим шумом, в §§ 2,3 были предложены простые критерии: $\omega_{np} \geq \frac{\pi}{2\Delta}$ и $\omega_{np} \geq \frac{\pi}{K\Delta}$. В общем случае при помощи предлагаемого "релеевого критерия" можно определить предельную частоту ω_{np} , задаваясь уровнем достоверности.

Отметим в заключение, что информационные области для A_2 (рис.5), K_N (1420) и ρ_0 , найденные ранее в работах^{1,2,4/}, согласуются с результатами, полученными теперь "статистическими методами" и при этом достоверности α , определенные с использованием релеевого критерия, оказались не хуже значения 0,9.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Л.М. Сороко. Сообщение ОИЯИ I-5030, Дубна (1970).
2. В.М. Дубовик, Б.Л. Марковски, Л.М. Сороко, Т.А. Стриж
Сообщение ОИЯИ P1-5340, Дубна (1970).
3. В.М. Дубовик, Б.Л. Марковски, Л.М. Сороко, Т.А. Стриж
Сообщение ОИЯИ P2-5659, Дубна (1971).
4. V.M.Dubovik, B.L.Markovsky, L.M.Soroko, T.A.Strizh.
Сообщение ОИЯИ P2-5656, Дубна (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1971 года.